







Archiv

der

Mathematik und Physik

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höhern Unterrichtsanstalten.



Herausgegeben

von

Johann August Grunert,
Professor zu Greifswald.

Fünfter Theil.

Mit fünf lithographirten Tafeln.

Greifswald.
Verlag von C. A. Koch.
1844.

Inhaltsverzeichniss des fünften [illegible]

Inhaltsverzeichniss des fünften Theils.

Arithmetik.

Geometrie.

Trigonometrie.

Geodäsie.

Mechanik.

Optik.

Astronomie.

Physik.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Literarische Berichte *).

*) Ich bemerke hierbei, dass die literarischen Berichte mit besonderen fortlaufenden Seitenzahlen versehen sind.

I.

Ueber die Reflexion und Refraction beim Kreise.

Von

dem Herausgeber.

---

§. 1.

Für einen Kreis, dessen Ebene, in welcher im Folgenden alle Constructionen allein ausgeführt werden, selbst als Ebene der xy angenommen wird, ergiebt sich aus dem in dem Aufsatze Thl. IV. No. XX. entwickelten allgemeinen Formeln unmittelbar die folgende Auflösung des Fundamentalproblems der Katoptrik und Dioptrik.

Gegeben sind:

die Coordinaten p, q des Punktes, von welchem der einfallende Strahl ausgeht;

die 180° nicht übersteigenden Winkel α, β, welche der einfallende Strahl mit den positiven Theilen zweier durch den Punkt (pq) gelegter, den primitiven Axen der x, y paralleler Axen einschliesst;

die Gleichung des zurückwerfenden oder brechenden Kreises, nämlich die Gleichung

$$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2=R^2{}_1,$$

wo der Halbmesser R_1 als positiv oder als negativ betrachtet wird, jenachdem der einfallende Strahl die concave oder convexe Seite dieses Kreises trifft.

Gesucht werden die Coordinaten p_1, q_1 des Einfallspunkts und 180° nicht übersteigenden Winkel α_1, β_1, welche der von dem ·kte $(p_1 q_1)$ ausgehende ausfallende Strahl mit den positiven ·ilen zweier durch den Punkt $(p_1 q_1)$ gelegter, den primitiven ·n der x, y paralleler Axen einschliesst.

Zur Berechnung dieser vier Grössen, durch welche die Lage des ausfallenden Strahls vollkommen bestimmt wird, hat man nach den in dem genannten Aufsatze entwickelten allgemeinen Gleichungen offenbar die folgenden Formeln.

Zuerst berechnet man die Grössen E_1 und K_1 mittelst der Formeln

$$E_1 = \sqrt{(a_1 - p)^2 + (b_1 - q)^2},$$
$$K_1 = (a_1 - p) \cos \alpha + (b_1 - q) \cos \beta;$$

und hierauf den 90° nicht übersteigenden Winkel Θ mittelst einer der Formeln

$$\cos \Theta = \sqrt{1 - \frac{(E_1 + K_1)(E_1 - K_1)}{R_1^2}}$$

oder

$$\sin \Theta = \sqrt{\frac{(E_1 + K_1)(E_1 - K_1)}{R_1^2}}.$$

Dann ergeben sich die Coordinaten p_1, q_1 mittelst der Formeln:

$$p_1 = p + (K_1 + R_1 \cos \Theta) \cos \alpha,$$
$$q_1 = q + (K_1 + R_1 \cos \Theta) \cos \beta;$$

und hierauf die 180° nicht übersteigenden Winkel α', β' mittelst der Formeln

$$\cos \alpha' = \frac{a_1 - p_1}{R_1}, \quad \cos \beta' = \frac{b_1 - q_1}{R_1}.$$

Endlich erhält man die 180° nicht übersteigenden Winkel α_1, β_1 mittelst der Formeln

$$\cos \alpha_1 = \mu \cos \alpha + \cos \alpha' (\mu \cos \Theta \pm \sqrt{1 - \mu^2 \sin \Theta^2}),$$
$$\cos \beta_1 = \mu \cos \beta + \cos \beta' (\mu \cos \Theta \pm \sqrt{1 - \mu^2 \sin \Theta^2});$$

wo μ seine bekannte Bedeutung hat, und im Falle der Reflexion die obern, im Falle der Refraction die untern Zeichen zu nehmen sind.

Wenn man die Lage einer von einem Punkte ausgehenden geraden Linie nicht wie vorher durch die zwei von ihr mit den positiven Theilen zweier durch den in Rede stehenden Punkt gelegter auf einander senkrecht stehender Axen eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel, sondern durch den einen von dieser Linie mit dem positiven Theile der als erste angenommenen Axe des Systems eingeschlossenen, durch den Coordinatenwinkel hindurch von dem positiven Theile der in Rede stehenden Axe an von 0 bis 360° gezählten Winkel bestimmt; so muss man, wie leicht erhellen wird, wenn nämlich jetzt α, α', α_1 die in Rede stehenden auf die angegebene Weise genommenen Bestimmungswinkel sind, in den obigen Formeln statt

$$\cos \alpha, \cos \beta; \cos \alpha', \cos \beta'; \cos \alpha_1, \cos \beta_1$$

respective

$$\cos\alpha,\ \sin\alpha;\ \cos\alpha',\ \sin\alpha';\ \cos\alpha_1,\ \sin\alpha_1$$

setzen. Dies vorausgesetzt, erhalten wir aus dem Obigen unmittelbar die folgende Auflösung unsers Problems:

Gegeben sind:

die Coordinaten p, q des Punktes, von welchem der einfallende Strahl ausgeht;

der von dem einfallenden Strahle mit dem positiven Theile der ersten Axe eines durch den Punkt (pq) gelegten, dem primitiven Systeme der xy parallelen Coordinatensystems eingeschlossene Winkel α, indem man diesen Winkel von dem positiven Theile der ersten Axe des in Rede stehenden Systems an durch den Coordinatenwinkel dieses Systems hindurch von 0 bis 360° zählt;

die Gleichung des zurückwerfenden oder brechenden Kreises, nämlich die Gleichung

$$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2=R_1{}^2,$$

wo der Halbmesser R_1 als positiv oder negativ zu betrachten ist, jenachdem der einfallende Strahl die concave oder convexe Seite dieses Kreises trifft.

Gesucht werden die Coordinaten p_1, q_1 des Einfallspunkts und der Winkel α_1, welchen der von dem Punkte (p_1q_1) ausgehende ausfallende Strahl mit dem positiven Theile der ersten Axe eines durch den Punkt (p_1q_1) gelegten, dem primitiven Systeme der xy parallelen Coordinatensystems einschliesst, indem man diesen Winkel von dem positiven Theile der ersten Axe des in Rede stehenden, dem primitiven Systeme parallelen Systems an durch den Coordinatenwinkel dieses Systems hindurch von 0 bis 360° zählt.

Zur Berechnung dieser drei Grössen hat man nach dem Obigen die folgenden Formeln.

Zuerst berechnet man die Grössen E_1 und K_1 mittelst der Formeln

$$E_1=\sqrt{(a_1-p)^2+(b_1-q)^2},$$
$$K_1=(a_1-p)\cos\alpha+(b_1-q)\sin\alpha;$$

und hierauf den 90° nicht übersteigenden Winkel Θ mittelst einer der Formeln

$$\cos\Theta=\sqrt{1-\frac{(E_1+K_1)(E_1-K_1)}{R_1{}^2}}$$

oder

$$\sin\Theta=\sqrt{\frac{(E_1+K_1)(E_1-K_1)}{R_1{}^2}}.$$

Dann ergeben sich die Coordinaten p_1, q_1 mittelst der Formeln

$$p_1=p+(K_1+R_1\cos\Theta)\cos\alpha,$$
$$q_1=q+(K_1+R_1\cos\Theta)\sin\alpha;$$

und hierauf α' mittelst der Formeln

$$\cos\alpha' = \frac{a_1 - p_1}{R_1},\quad \sin\alpha' = \frac{b_1 - q_1}{R_1}.$$

Endlich erhält man den Winkel α_1 mittelst der Formeln

$$\cos\alpha_1 = \mu\cos\alpha + \cos\alpha'(\mu\cos\Theta \pm \sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}),$$
$$\sin\alpha_1 = \mu\sin\alpha + \sin\alpha'(\mu\cos\Theta \pm \sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2});$$

wo μ seine bekannte Bedeutung hat, und im Falle der Reflexion die obern, im Falle der Refraction die untern Zeichen zu nehmen sind.

§. 2.

Man kann aber die am Ende des vorhergehenden Paragraphen entwickelten Formeln noch auf einen andern Ausdruck bringen.

Zuerst ist nämlich, wie man leicht findet,

$$E_1^2 - K_1^2 = \{(a_1 - p)\sin\alpha - (b_1 - q)\cos\alpha\}^2,$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$L_1 = (a_1 - p)\sin\alpha - (b_1 - q)\cos\alpha$$

setzen,

$$E_1^2 - K_1^2 = (E_1 + K_1)(E_1 - K_1) = L_1^2.$$

Weil nun ferner nach dem vorhergehenden Paragraphen

$$R_1\cos\alpha' = a_1 - p_1,\quad R_1\sin\alpha' = b_1 - q_1$$

ist; so ist, wenn man die bekannten Ausdrücke von p_1 und q_1 einführt:

$$R_1\cos\alpha' = a_1 - p - (K_1 + R_1\cos\Theta)\cos\alpha,$$
$$R_1\sin\alpha' = b_1 - q - (K_1 + R_1\cos\Theta)\sin\alpha;$$

und folglich, wenn man nun auch noch für K_1 seinen bekannten Werth setzt:

$$R_1\cos\alpha' = \{(a_1 - p)\sin\alpha - (b_1 - q)\cos\alpha\}\sin\alpha - R_1\cos\Theta\cos\alpha,$$
$$R_1\sin\alpha' = -\{(a_1 - p)\sin\alpha - (b_1 - q)\cos\alpha\}\cos\alpha - R_1\cos\Theta\sin\alpha;$$

d. i. in der vorher eingeführten Bezeichnung

$$R_1\cos\alpha' = L_1\sin\alpha - R_1\cos\Theta\cos\alpha,$$
$$R_1\sin\alpha' = -L_1\cos\alpha - R_1\cos\Theta\sin\alpha;$$

also

$$\cos\alpha' = \frac{L_1\sin\alpha - R_1\cos\Theta\cos\alpha}{R_1},$$

$$\sin \alpha' = -\frac{L_1 \cos \alpha + R_1 \cos \Theta \sin \alpha}{R_1};$$

oder auch

$$\cos \alpha' = -\cos \Theta \cos \alpha + \frac{L_1}{R_1} \sin \alpha,$$

$$\sin \alpha' = -\cos \Theta \sin \alpha - \frac{L_1}{R_1} \cos \alpha.$$

Führt man diese Ausdrücke in die bekannten Ausdrücke von $\cos \alpha_1$ und $\sin \alpha_1$ ein, so erhält man

$$\cos \alpha_1 =$$
$$\mu \cos \alpha - (\cos \Theta \cos \alpha - \frac{L_1}{R_1} \sin \alpha)(\mu \cos \Theta \pm \sqrt{1 - \mu^2 \sin \Theta^2}),$$
$$\sin \alpha_1 =$$
$$\mu \sin \alpha - (\cos \Theta \sin \alpha + \frac{L_1}{R_1} \cos \alpha)(\mu \cos \Theta \pm \sqrt{1 - \mu^2 \sin \Theta^2});$$

und unsere Aufgabe kann daher jetzt auch durch die folgenden Formeln, in denen der Winkel α' gar nicht mehr vorkommt, und auch die Berechnung der Grösse E_1 nicht erfordert wird, aufgelöst werden:

$$K_1 = (a_1 - p) \cos \alpha + (b_1 - q) \sin \alpha$$
$$L_1 = (a_1 - p) \sin \alpha - (b_1 - q) \cos \alpha;$$
$$\cos \Theta = \sqrt{1 - \frac{L_1^2}{R_1^2}}, \quad \sin \Theta = \sqrt{\frac{L_1^2}{R_1^2}};$$
$$p_1 = p + (K_1 + R_1 \cos \Theta) \cos \alpha,$$
$$q_1 = q + (K_1 + R_1 \cos \Theta) \sin \alpha;$$
$$\cos \alpha_1 =$$
$$\mu \cos \alpha - (\cos \Theta \cos \alpha - \frac{L_1}{R_1} \sin \alpha)(\mu \cos \Theta \pm \sqrt{1 - \mu^2 \sin \Theta^2}),$$
$$\sin \alpha_1 =$$
$$\mu \sin \alpha - (\cos \Theta \sin \alpha + \frac{L_1}{R_1} \cos \alpha)(\mu \cos \Theta \pm \sqrt{1 - \mu^2 \sin \Theta^2});$$

wo immer im Falle der Reflexion die obern, im Falle der Refraction die untern Zeichen zu nehmen sind.

Weil zwei dem Zeichen nach entgegengesetzte Winkel oder Bogen, deren absolute Werthe einander gleich sind, bekanntlich jederzeit gleiche Cosinus haben, so ist klar, dass, wenn man jetzt den Winkel Θ als einen blossen Hülfswinkel mittelst der Formel

$$\sin \Theta = \frac{L_1}{R_1}$$

bestimmt, und dieser Gleichung gemäss gehörig positiv und negativ, seinen absoluten Werth aber nie grösser als 90° nimmt, die

vorhergehenden Gleichungen ihre völlige Richtigkeit behalten; und man hat daher zu der Auflösung unserer Aufgabe jetzt die folgenden Formeln:

$$K_1 = (a_1 - p) \cos \alpha + (b_1 - q) \sin \alpha,$$
$$L_1 = (a_1 - p) \sin \alpha - (b_1 - q) \cos \alpha;$$
$$\sin \Theta = \frac{L_1}{R_1};$$
$$p_1 = p + (K_1 + R_1 \cos \Theta) \cos \alpha,$$
$$q_1 = q + (K_1 + R_1 \cos \Theta) \sin \alpha;$$
$$\cos \alpha_1 =$$
$$\mu \cos \alpha - (\cos \Theta \cos \alpha - \frac{L_1}{R_1} \sin \alpha)(\mu \cos \Theta \pm \sqrt{1 - \mu^2 \sin \Theta^2}),$$
$$\sin \alpha_1 =$$
$$\mu \sin \alpha - (\cos \Theta \sin \alpha + \frac{L_1}{R_1} \cos \alpha)(\mu \cos \Theta \pm \sqrt{1 - \mu^2 \sin \Theta^2});$$

wo der absolute Werth von Θ nie grösser als 90° zu nehmen ist, und dem Falle der Reflexion die obern, dem Falle der Refraction die untern Zeichen entsprechen.

Nun ist aber

$$\cos \Theta \cos \alpha - \frac{L_1}{R_1} \sin \alpha = \cos . (\alpha + \Theta),$$
$$\cos \Theta \sin \alpha + \frac{L_1}{R_1} \cos \alpha = \sin (\alpha + \Theta);$$

und man kann also die obigen Formeln auch unter der folgenden Form darstellen:

$$K_1 = (a_1 - p) \cos \alpha + (b_1 - q) \sin \alpha,$$
$$L_1 = (a_1 - p) \sin \alpha - (b_1 - q) \cos \alpha;$$
$$\sin \Theta = \frac{L_1}{R_1};$$
$$p_1 = p + (K_1 + R_1 \cos \Theta) \cos \alpha,$$
$$q_1 = q + (K_1 + R_1 \cos \Theta) \sin \alpha;$$
$$\cos \alpha_1 = \mu \cos \alpha - \cos (\alpha + \Theta)(\mu \cos \Theta \pm \sqrt{1 - \mu^2 \sin \Theta^2}),$$
$$\sin \alpha_1 = \mu \sin \alpha - \sin (\alpha + \Theta)(\mu \cos \Theta \pm \sqrt{1 - \mu^2 \sin \Theta^2});$$

wo wieder der absolute Werth von Θ nie grösser als 90° genommen wird, und dem Falle der Reflexion die obern, dem Falle der Refraction die untern Zeichen entsprechen.

Nimmt man nun aber μ, welches bisher immer als positiv betrachtet wurde, im Falle der Reflexion positiv, im Falle der Refraction dagegen negativ, und bezeichnet den absoluten Werth von μ durch (μ), so kann man die obigen Formeln auch auf den folgenden Ausdruck bringen, bei welchem man bloss zu beachten hat, dass der absolute Werth von Θ nie grösser als 90° zu nehmen ist:

$$K_1 = (a_1 - p) \cos \alpha + (b_1 - q) \sin \alpha,$$
$$L_1 = (a_1 - p) \sin \alpha - (b_1 - q) \cos \alpha;$$
$$\sin \Theta = \frac{L_1}{R_1};$$
$$p_1 = p + (K_1 + R_1 \cos \Theta) \cos \alpha,$$
$$q_1 = q + (K_1 + R_1 \cos \Theta) \sin \alpha;$$
$$\frac{\cos \alpha_1}{(\mu)} = \cos \alpha - \cos(\alpha + \Theta)(\cos \Theta + \frac{1}{\mu}\sqrt{1 - \mu^2 \sin \Theta^2}),$$
$$\frac{\sin \alpha_1}{(\mu)} = \sin \alpha - \sin(\alpha + \Theta)(\cos \Theta + \frac{1}{\mu}\sqrt{1 - \mu^2 \sin \Theta^2}).$$

Berechnet man die Hülfsgrössen ϱ, η und ξ mittelst der Formeln

$$a_1 - p = \varrho \cos \eta, \quad b_1 - q = \varrho \sin \eta$$

und

$$\sin \xi = \mu \sin \Theta,$$

wobei man den absoluten Werth von ξ nie grösser als 90° nimmt; so können die obigen Gleichungen, wie leicht erhellen wird, auch unter der folgenden Form dargestellt werden:

$$K_1 = \varrho \cos(\alpha - \eta), \quad L_1 = \varrho \sin(\alpha - \eta);$$
$$\sin \Theta = \frac{L_1}{R_1};$$
$$p_1 = p + (K_1 + R_1 \cos \Theta) \cos \alpha,$$
$$q_1 = q + (K_1 + R_1 \cos \Theta) \sin \alpha;$$
$$\frac{\cos \alpha_1}{(\mu)} = \cos \alpha - \frac{\cos(\alpha + \Theta)\sin(\xi + \Theta)}{\sin \xi},$$
$$\frac{\sin \alpha_1}{(\mu)} = \sin \alpha - \frac{\sin(\alpha + \Theta)\sin(\xi + \Theta)}{\sin \xi}.$$

Unter dieser Gestalt enthalten die Formeln, wie es mir scheint, die vollständigste und einfachste Auflösung unsers Problems.

§. 3.

Die Gleichung der durch den einfallenden Strahl und seine Verlängerung über den Punkt (pq) hinaus dargestellten geraden Linie ist

$$\frac{x - p}{\cos \alpha} = \frac{y - q}{\sin \alpha}$$

oder

$$x \sin \alpha - y \cos \alpha = p \sin \alpha - q \cos \alpha.$$

Bezeichnen wir nun die erste Coordinate des Durchschnittspunkts

der in Rede stehenden geraden Linie mit der Axe der x durch Δ, so ist

$$\Delta \sin \alpha = p \sin \alpha - q \cos \alpha,$$

und folglich

$$\Delta = \frac{p \sin \alpha - q \cos \alpha}{\sin \alpha},$$

oder auch

$$\Delta = p - q \cot \alpha.$$

Ganz eben so ist

$$\frac{x - p_1}{\cos \alpha_1} = \frac{y - q_1}{\sin \alpha_1}$$

oder

$$x \sin \alpha_1 - y \cos \alpha_1 = p_1 \sin \alpha_1 - q_1 \cos \alpha_1$$

die Gleichung der durch den ausfallenden Strahl und seine Verlängerung über den Punkt $(p_1 q_1)$ hinaus dargestellten geraden Linie; also ist, wenn wir die erste Coordinate des Durchschnittspunkts dieser geraden Linie mit der Axe der x durch Δ_1 bezeichnen:

$$\Delta_1 \sin \alpha_1 = p_1 \sin \alpha_1 - q_1 \cos \alpha_1,$$

und folglich

$$\Delta_1 = \frac{p_1 \sin \alpha_1 - q_1 \cos \alpha_1}{\sin \alpha_1},$$

oder auch

$$\Delta_1 = p_1 - q_1 \cot \alpha_1.$$

Nun ist aber nach dem vorhergehenden Paragraphen, wie man leicht findet:

$$\begin{aligned} &\frac{p_1 \sin \alpha_1 - q_1 \cos \alpha_1}{(\mu)} \\ &= p \sin \alpha - q \cos \alpha \\ &- \{(K_1 + p \cos \alpha + q \sin \alpha) \sin \Theta + (L_1 + p \sin \alpha - q \cos \alpha) \cos \Theta\} \\ &\qquad \times \left(\cos \Theta + \frac{1}{\mu}\sqrt{1 - \mu^2 \sin \Theta^2}\right) \end{aligned}$$

und

$$K_1 + p \cos \alpha + q \sin \alpha = a_1 \cos \alpha + b_1 \sin \alpha,$$
$$L_1 + p \sin \alpha - q \cos \alpha = a_1 \sin \alpha - b_1 \cos \alpha;$$

also

$$\begin{aligned} &\frac{p_1 \sin \alpha_1 - q_1 \cos \alpha_1}{(\mu)} \\ &= p \sin \alpha - q \cos \alpha \\ &- \{(a_1 \cos \alpha + b_1 \sin \alpha) \sin \Theta + (a_1 \sin \alpha - b_1 \cos \alpha) \cos \Theta\} \\ &\qquad \times \left(\cos \Theta + \frac{1}{\mu}\sqrt{1 - \mu^2 \sin \Theta^2}\right), \end{aligned}$$

oder

$$\frac{p_1 \sin \alpha_1 - q_1 \cos \alpha_1}{(\mu)}$$

$$= p \sin \alpha - q \cos \alpha$$

$$-\{a_1 \sin(\alpha + \Theta) - b_1 \cos(\alpha + \Theta)\} (\cos \Theta + \frac{1}{\mu} \sqrt{1 - \mu^2 \sin \Theta^2}),$$

und folglich nach dem Obigen

$$\Delta \sin \alpha - \Delta_1 \frac{\sin \alpha_1}{(\mu)}$$

$$= \{(a_1 \sin(\alpha + \Theta) - b_1 \cos(\alpha + \Theta)\} (\cos \Theta + \frac{1}{\mu} \sqrt{1 - \mu^2 \sin \Theta^2}).$$

Führt man aber für $\frac{\sin \alpha_1}{(\mu)}$ seinen aus dem vorhergehenden Paragraphen bekannten Werth ein, so erhält man

$$(\Delta - \Delta_1) \sin \alpha$$

$$= \{(a_1 - \Delta_1) \sin(\alpha + \Theta) - b_1 \cos(\alpha + \Theta)\} (\cos \Theta + \frac{1}{\mu} \sqrt{1 - \mu^2 \sin \Theta^2}),$$

oder

$$\frac{(\Delta - \Delta_1) \sin \alpha}{(a_1 - \Delta_1) \sin(\alpha + \Theta) - b_1 \cos(\alpha + \Theta)}$$

$$= \cos \Theta + \frac{1}{\mu} \sqrt{1 - \mu^2 \sin \Theta^2}.$$

Für $b_1 = 0$ ist

$$\frac{\Delta - \Delta_1}{a_1 - \Delta_1} = \frac{\sin(\alpha + \Theta)}{\sin \alpha} (\cos \Theta + \frac{1}{\mu} \sqrt{1 - \mu^2 \sin \Theta^2}),$$

und folglich

$$\frac{a_1 - \Delta}{a_1 - \Delta_1} = 1 - \frac{\sin(\alpha + \Theta)}{\sin \alpha} (\cos \Theta + \frac{1}{\mu} \sqrt{1 - \mu^2 \sin \Theta^2}),$$

oder auch, wie man hieraus leicht findet,

$$\frac{a_1 - \Delta}{a_1 - \Delta_1} = - \frac{\cos(\alpha + \Theta) \sin \Theta}{\sin \alpha} - \frac{\sin(\alpha + \Theta) \sqrt{1 - \mu^2 \sin \Theta^2}}{\mu \sin \alpha}.$$

Berechnet man den Hülfswinkel ω mittelst der Formel

$$\sin \omega = \mu \sin \Theta$$

und nimmt den absoluten Werth von ω nicht grösser als 90°, so ist, wie man leicht findet,

$$\frac{a_1 - \Delta}{a_1 - \Delta_1} = 1 - \frac{\sin(\alpha + \Theta) \sin(\omega + \Theta)}{\sin \alpha \sin \omega}.$$

Weil nun aber bekanntlich nach dem Obigen

$$L_1 = a_1 \sin \alpha - b_1 \cos \alpha - (p \sin \alpha - q \cos \alpha)$$

und

$$\Delta \sin u = p \sin \alpha - q \cos \alpha$$

ist, so ist

$$L_1 = (a_1 - \Delta) \sin \alpha - b_1 \cos \alpha$$

und

$$\sin \Theta = \frac{(a_1 - \Delta) \sin \alpha - b_1 \cos \alpha}{R_1};$$

also für $b_1 = 0$

$$\sin \Theta = \frac{a_1 - \Delta}{R_1} \sin \alpha.$$

Weil also in diesem Falle

$$\frac{R_1}{a_1 - \Delta} = \frac{\sin \alpha}{\sin \Theta}$$

ist, so ist nach dem Obigen

$$\frac{R_1}{a_1 - \Delta_1} = -\cos(\alpha + \Theta) - \frac{\sin(\alpha + \Theta)\sqrt{1 - \mu^2 \sin \Theta^2}}{\mu \sin \Theta}$$

oder

$$\Delta_1 - a_1 = \frac{R_1 \sin \Theta}{\cos(\alpha + \Theta) \sin \Theta + \frac{1}{\mu} \sin(\alpha + \Theta\sqrt{1 - \mu^2 \sin \Theta^2}},$$

also

$$\Delta_1 = a_1 + \frac{R_1 \sin \Theta}{\cos(\alpha + \Theta) \sin \Theta + \frac{1}{\mu} \sin(\alpha + \Theta)\sqrt{1 - \mu^2 \sin \Theta^2}}.$$

Auch ist nach dem Obigen unter der Voraussetzung, dass $b_1 = 0$ ist:

$$\frac{1}{a_1 - \Delta} - \frac{1}{a_1 - \Delta_1} = \frac{\sin \alpha + \Theta)}{(a_1 - \Delta) \sin \alpha}(\cos \Theta + \frac{1}{\mu}\sqrt{1 - \mu^2 \sin \Theta^2}),$$

also, weil $(a_1 - \Delta) \sin \alpha = R_1 \sin \Theta$ ist,

$$\frac{1}{a_1 - \Delta} - \frac{1}{a_1 - \Delta_1} = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{\sin(\alpha + \Theta)}{\sin \Theta}(\cos \Theta + \frac{1}{\mu}\sqrt{1 - \mu^2 \sin \Theta^2}).$$

§. 4.

Nach §. 2. ist

$$K_1 = (a_1 - p) \cos \alpha + (b_1 - q) \sin \alpha,$$
$$L_1 = (a_1 - p) \sin \alpha - (b_1 - q) \cos \alpha;$$

also

$$K_1 \cos\alpha + L_1 \sin\alpha = a_1 - p,$$
$$K_1 \sin\alpha - L_1 \cos\alpha = b_1 - q;$$

lglich

$$K_1 \cos\alpha = a_1 - p - L_1 \sin\alpha,$$
$$K_1 \sin\alpha = b_1 - q + L_1 \cos\alpha.$$

Veil nun nach dem vorhergehenden Paragraphen

$$L_1 = (a_1 - \Delta) \sin\alpha - b_1 \cos\alpha$$

st, so ist, wie man leicht findet:

$$K_1 \cos\alpha = \Delta - p + \{(a_1 - \Delta)\cos\alpha + b_1 \sin\alpha\} \cos\alpha,$$
$$K_1 \sin\alpha = \quad - q + \{(a_1 - \Delta)\cos\alpha + b_1 \sin\alpha\} \sin\alpha;$$

und folglich, weil nach §. 2.

$$p_1 = p + (K_1 + R_1 \cos\Theta) \cos\alpha,$$
$$q_1 = q + (K_1 + R_1 \cos\Theta) \sin\alpha$$

ist:

$$p_1 = \Delta + \{(a_1 - \Delta)\cos\alpha + b_1 \sin\alpha + R_1 \cos\Theta\} \cos\alpha,$$
$$q_1 = \qquad \{(a_1 - \Delta)\cos\alpha + b_1 \sin\alpha + R_1 \cos\Theta\} \sin\alpha.$$

Weil nun aber nach dem vorhergehenden Paragraphen

$$a_1 - \Delta = \frac{R_1 \sin\Theta + b_1 \cos\alpha}{\sin\alpha}$$

ist, so ist, wie man leicht findet:

$$p_1 = \Delta + \{b_1 + R_1 \sin(\alpha + \Theta)\} \cot\alpha,$$
$$q_1 = b_1 + R_1 \sin(\alpha + \Theta).$$

Für $b_1 = 0$ ist

$$p_1 = \Delta + \{(a_1 - \Delta)\cos\alpha + R_1 \cos\Theta\} \cos\alpha,$$
$$q_1 = \qquad \{(a_1 - \Delta)\cos\alpha + R_1 \cos\Theta\} \sin\alpha$$

oder

$$p_1 = \Delta + R_1 \sin(\alpha + \Theta) \cot\alpha,$$
$$q_1 = R_1 \sin(\alpha + \Theta).$$

§. 5.

Weil bekanntlich

$$\frac{\cos\alpha_1}{(\mu)} = \cos\alpha - \cos(\alpha + \Theta)\left(\cos\Theta + \frac{1}{\mu}\sqrt{1 - \mu^2 \sin\Theta^2}\right)$$

$$\frac{\sin\,\alpha_1}{(\mu)} = \sin\,\alpha - \sin\,(\alpha + \Theta)\,(\cos\,\Theta + \frac{1}{\mu}\sqrt{1 - \mu^2\,\sin\,\Theta^2})$$

und

$$\cos\,\Theta + \frac{1}{\mu}\sqrt{1 - \mu^2\,\sin\,\Theta^2}$$

$$= \frac{(\Delta - \Delta_1)\,\sin\,\alpha}{(a_1 - \Delta_1)\,\sin\,(\alpha + \Theta) - b_1\,\cos\,(\alpha + \Theta)}$$

ist, so ist

$$\frac{\cos\,\alpha_1}{(\mu)} = \cos\,\alpha - \frac{(\Delta - \Delta_1)\,\sin\,\alpha\,\cos\,(\alpha + \Theta)}{(a_1 - \Delta_1)\,\sin\,(\alpha + \Theta) - b_1\,\cos\,(\alpha + \Theta)},$$

$$\frac{\sin\,\alpha_1}{(\mu)} = \sin\,\alpha - \frac{(\Delta - \Delta_1)\,\sin\,\alpha\,\sin\,(\alpha + \Theta)}{(a_1 - \Delta_1)\,\sin\,(\alpha + \Theta) - b_1\,\cos\,(\alpha + \Theta)}$$

oder

$$\cos\,\alpha - \frac{\cos\,\alpha_1}{(\mu)} = \frac{(\Delta - \Delta_1)\,\sin\,\alpha\,\cos\,(\alpha + \Theta)}{(a_1 - \Delta_1)\,\sin\,(\alpha + \Theta) - b_1\,\cos\,(\alpha + \Theta)},$$

$$\sin\,\alpha - \frac{\sin\,\alpha_1}{(\mu)} = \frac{(\Delta - \Delta_1)\,\sin\,\alpha\,\sin\,(\alpha + \Theta)}{(a_1 - \Delta_1)\,\sin\,(\alpha + \Theta) - b_1\,\cos\,(\alpha + \Theta)};$$

woraus sich auch sogleich

$$\text{tang}\,(\alpha + \Theta) = \frac{\sin\,\alpha - \frac{\sin\,\alpha_1}{(\mu)}}{\cos\,\alpha - \frac{\cos\,\alpha_1}{(\mu)}}$$

ergiebt.

Für $b_1 = 0$ ist nach dem Vorhergehenden

$$\frac{\cos\,\alpha_1}{(\mu)} = \cos\,\alpha - \frac{\Delta - \Delta_1}{a_1 - \Delta_1}\,\sin\,\alpha\,\cot\,(\alpha + \Theta),$$

$$\frac{\sin\,\alpha_1}{(\mu)} = \frac{a_1 - \Delta}{a_1 - \Delta_1}\,\sin\,\alpha.$$

Nach §. 2. ist auch

$$\frac{\cos\,\alpha_1}{(\mu)} =$$

$$\cos\alpha - (\cos\Theta\,\cos\alpha - \frac{L_1}{R_1}\sin\alpha)\,(\cos\Theta + \frac{1}{\mu}\sqrt{1 - \mu^2\,\sin\,\Theta^2}),$$

und folglich, unter der Voraussetzung, dass $b_1 = 0$ ist:

$$\frac{\cos\,\alpha_1}{(\mu)} =$$

$$\cos\alpha - (\cos\Theta\,\cos\alpha - \frac{a_1 - \Delta}{R_1}\,\sin\,\alpha^2)\,(\cos\Theta + \frac{1}{\mu}\sqrt{1 - \mu^2\,\sin\,\Theta^2}),$$

$$\frac{1}{(\mu)}\cdot\frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha}$$

$$=1-(\cos\Theta+\frac{a_1-\Delta}{R_1}\cos\alpha)(\cos\Theta+\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}),$$

$$+\frac{a_1-\Delta}{R_1\cos\alpha}(\cos\Theta+\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2});$$

also nach dem Obigen

$$\frac{1}{(\mu)}\cdot\frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha}=1-\frac{\sin(\alpha+\Theta)}{\sin\alpha}(\cos\Theta+\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2})$$

$$+\frac{a_1-\Delta}{R_1\cos\alpha}(\cos\Theta+\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}).$$

Bekanntlich ist aber

$$\frac{a_1-\Delta}{a_1-\Delta_1}=1-\frac{\sin(\alpha+\Theta)}{\sin\alpha}(\cos\Theta+\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2})$$

und

$$\frac{\Delta-\Delta_1}{a_1-\Delta_1}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\Theta)}=\cos\Theta+\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}.$$

Daher ist

$$\frac{1}{(\mu)}\cdot\frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha}=\frac{a_1-\Delta}{a_1-\Delta_1}\{1+\frac{\Delta-\Delta_1}{R_1}\cdot\frac{\tan\alpha}{\sin(\alpha+\Theta)}\}$$

oder

$$\cos\alpha_1=(\mu)\frac{a_1-\Delta}{a_1-\Delta_1}\{\cos\alpha+\frac{\Delta-\Delta_1}{R_1}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\Theta)}\}.$$

Weil nun nach dem Obigen

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha}=(\mu)\frac{a_1-\Delta}{a_1-\Delta_1}$$

ist, so ist

$$\cos\alpha_1=\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha}\{\cos\alpha+\frac{\Delta-\Delta_1}{R_1}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\Theta)}\},$$

und folglich

$$\cot\alpha_1=\cot\alpha+\frac{\Delta-\Delta_1}{R_1\sin(\alpha+\Theta)}$$

oder

$$\cot\alpha_1-\cot\alpha=\frac{\Delta-\Delta_1}{R_1\sin(\alpha+\Theta)},$$

woraus auch

$$\sin(\alpha-\alpha_1)=\frac{(\Delta-\Delta_1)\sin\alpha\sin\alpha_1}{R_1\sin(\alpha+\Theta)},$$

also, weil

$$\sin \alpha_1 = (\mu) \frac{a_1 - \Delta}{a_1 - \Delta_1} \sin \alpha = (\mu) \frac{R_1}{a_1 - \Delta_1} \sin \Theta$$

ist,

$$\sin (\alpha - \alpha_1) = (\mu) \frac{\Delta - \Delta_1}{a_1 - \Delta_1} \cdot \frac{\sin \alpha \sin \Theta}{\sin (\alpha + \Theta)}$$

folgt.

§. 6.

So lange nicht ausdrücklich etwas Anderes bestimmt wird, werden wir im Folgenden immer $b_1 = 0$ setzen, und wollen nun annehmen, dass sich, indem Δ ungeändert oder constant bleibt, $\sin \alpha$ immer mehr und mehr dem Zustande des Verschwindens oder der Null nähere; so wird sich, weil unter der gemachten Voraussetzung bekanntlich

$$\sin \Theta = \frac{a_1 - \Delta}{R_1} \sin \alpha$$

ist, und der absolute Werth von Θ nie grösser als 90° genommen wird, auch Θ der Null, also $\sin \Theta$ der Null und $\cos \Theta$ der positiven Einheit nähern. Nähert sich nun unter diesen Voraussetzungen die im Vorhergehenden durch Δ_1 bezeichnete Grösse einer gewissen bestimmten endlichen Gränze, so wollen wir diese Gränze durch F_1 bezeichnen, und wollen nun untersuchen, ob eine solche Gränze wirklich existirt, wobei sich dann, wenn dies der Fall sein sollte, die Bestimmung dieser Gränze zugleich von selbst ergeben wird.

Nach §. 3. ist

$$\frac{a_1 - \Delta}{a_1 - \Delta_1} = 1 - \frac{\sin (\alpha + \Theta)}{\sin \alpha} (\cos \Theta + \frac{1}{\mu} \sqrt{1 - \mu^2 \sin \Theta^2}).$$

Aber

$$\frac{\sin (\alpha + \Theta)}{\sin \alpha} = \cos \Theta + \frac{\sin \Theta}{\sin \alpha} \cos \alpha,$$

und folglich, weil bekanntlich

$$\frac{\sin \Theta}{\sin \alpha} = \frac{a_1 - \Delta}{R_1}$$

ist,

$$\frac{\sin (\alpha + \Theta)}{\sin \alpha} = \cos \Theta + \frac{a_1 - \Delta}{R_1} \cos \alpha;$$

also nach dem Obigen

$$\frac{a_1 - \Delta}{a_1 - \Delta_1} = 1 - (\cos \Theta + \frac{a_1 - \Delta}{R_1} \cos \alpha) (\cos \Theta + \frac{1}{\mu} \sqrt{1 - \mu^2 \sin \Theta^2}).$$

Wenn nun $\sin \alpha$ sich der Null nähert, so nähert sich $\cos \alpha$ entweder

der positiven oder der negativen Einheit. Nehmen wir also im Folgenden immer die obern oder die untern Zeichen, jenachdem sich, wenn $\sin\alpha$ sich der Null nähert, $\cos\alpha$ der Gränze $+1$ oder der Gränze -1 nähert; so ist offenbar, da sich, wenn $\sin\alpha$ sich der Null nähert, $\sin\Theta$ und $\cos\Theta$ respective den Gränzen 0 und $+1$ nähern,

$$\frac{a_1-\Delta}{a_1-F_1}=1-(1+\frac{1}{\mu})(1\pm\frac{a_1-\Delta}{R_1})$$

oder, wie hieraus leicht folgt,

$$\frac{\Delta-F_1}{a_1-F_1}=(1+\frac{1}{\mu})(1\pm\frac{a_1-\Delta}{R_1}).$$

Auch überzeugt man sich leicht von der Richtigkeit der Gleichung

$$\frac{1}{\mu}\cdot\frac{1}{a_1-\Delta}+\frac{1}{a_1-F_1}=\mp(1+\frac{1}{\mu})\cdot\frac{1}{R_1}$$

oder

$$\frac{1}{a_1-F_1}=-\frac{1}{\mu}\cdot\frac{1}{a_1-\Delta}\mp(1+\frac{1}{\mu})\cdot\frac{1}{R_1}.$$

§. 7.

Wir wollen jetzt untersuchen, welche Werthe die beiden Grössen Θ und R_1 nothwendig haben müssen, wenn die beiden Gleichungen

$$\frac{a_1-\Delta}{R_1}=\frac{\sin\Theta}{\sin\alpha}$$

und

$$(1+\frac{1}{\mu})(1\pm\frac{a_1-\Delta}{R_1})=\frac{\sin(\alpha+\Theta)}{\sin\alpha}(\cos\Theta+\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}),$$

wobei wir annehmen, dass $\sin\alpha$ eine nicht verschwindende Grösse sein soll, zugleich erfüllt sein sollen.

Nehmen wir also zu dem Ende diese beiden Gleichungen als erfüllt an, und führen den Werth von

$$\frac{a_1-\Delta}{R_1}$$

aus der ersten Gleichung in die zweite ein, so erhalten wir die Gleichung

$$(1+\frac{1}{\mu})(1\pm\frac{\sin\Theta}{\sin\alpha})$$
$$=\frac{\sin(\alpha+\Theta)}{\sin\alpha}(\cos\Theta+\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}),$$

o

$$\left(1+\frac{1}{\mu}\right)(\sin\,\alpha \pm \sin\,\Theta)$$
$$=\sin(\alpha+\Theta)\left(\cos\,\Theta+\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\,\sin\,\Theta^2}\right).$$

Weil nun bekanntlich

$$\sin\,\alpha+\sin\,\Theta=2\sin\,\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)\,\cos\,\tfrac{1}{2}(\alpha-\Theta),$$
$$\sin\,\alpha-\sin\,\Theta=2\sin\,\tfrac{1}{2}(\alpha-\Theta)\,\cos\,\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)$$

und

$$\sin(\alpha+\Theta)=2\sin\,\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)\,\cos\,\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)$$

ist, so giebt das obere Zeichen die Gleichung

$$\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\Theta)=\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)\left(\cos\,\Theta+\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\,\sin\,\Theta^2}\right),$$

und das untere Zeichen giebt die Gleichung

$$\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\Theta)=\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)\left(\cos\Theta+\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\,\sin\,\Theta^2}\right).$$

Im ersten Falle ist

$$\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\cos\,\tfrac{1}{2}(\alpha-\Theta)-\cos\,\Theta\,\cos\,\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)$$
$$=\frac{1}{\mu}\cos\,\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)\sqrt{1-\mu^2\,\sin\,\Theta^2},$$

und folglich, wenn man auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens quadrirt, wie man leicht findet:

$$\left.\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^2\cos\,\tfrac{1}{2}(\alpha-\Theta)^2+\left(1-\frac{1}{\mu^2}\right)\cos\,\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)^2\\-2\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\cos\,\Theta\,\cos\,\tfrac{1}{2}(\alpha-\Theta)\,\cos\,\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)\end{aligned}\right\}=0,$$

also, wenn man auf beiden Seiten dieser Gleichung durch $1+\frac{1}{\mu}$ dividirt:

$$\left.\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\cos\,\tfrac{1}{2}(\alpha-\Theta)^2+\left(1-\frac{1}{\mu}\right)\cos\,\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)^2\\-2\cos\,\Theta\,\cos\,\tfrac{1}{2}(\alpha-\Theta)\,\cos\,\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)\end{aligned}\right\}=0.$$

Nun ist aber

$$2\cos\,\tfrac{1}{2}(\alpha-\Theta)^2=1+\cos(\alpha-\Theta),$$
$$2\cos\,\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)^2=1+\cos(\alpha+\Theta)$$

und

$$2\cos\,\tfrac{1}{2}(\alpha-\Theta)\,\cos\,\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)=\cos\,\alpha+\cos\,\Theta;$$

$$\left.\begin{array}{l}(1+\frac{1}{\mu})\{1+\cos(\alpha-\Theta)\}\\ +(1-\frac{1}{\mu})\{1+\cos(\alpha+\Theta)\}\\ -2\cos\Theta(\cos\alpha+\cos\Theta)\end{array}\right\}=0,$$

ch

$$\left.\begin{array}{l}(1+\frac{1}{\mu})+(1-\frac{1}{\mu})\\ +\{(1+\frac{1}{\mu})+(1-\frac{1}{\mu})\}\cos\alpha\cos\Theta\\ +\{(1+\frac{1}{\mu})-(1-\frac{1}{\mu})\}\sin\alpha\sin\Theta\\ -2\cos\Theta(\cos\alpha+\cos\Theta)\end{array}\right\}=0,$$

$$1+\frac{1}{\mu}\sin\alpha\sin\Theta-\cos\Theta^2=0$$

$$\sin\Theta(\sin\Theta+\frac{1}{\mu}\sin\alpha)=0,$$

folglich, weil sin α, also auch

$$\sin\Theta=\frac{a_1-\Delta}{R_1}\sin\alpha$$

t verschwindet,

$$\sin\Theta+\frac{1}{\mu}\sin\alpha=0.$$

weiten Falle ist

$$(1+\frac{1}{\mu})\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\Theta)-\cos\Theta\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)$$
$$=\frac{1}{\mu}\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2},$$

folglich, wenn man wieder auf beiden Seiten des Gleichheitsbens quadrirt, wie man leicht findet:

$$\left.\begin{array}{l}(1+\frac{1}{\mu})^2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\Theta)^2+(1-\frac{1}{\mu^2})\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)^2\\ -2(1+\frac{1}{\mu})\cos\Theta\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\Theta)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)\end{array}\right\}=0,$$

o, wenn man auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens durch $1+\frac{1}{\mu}$ idirt:

$$\left.\begin{array}{r}(1+\frac{1}{\mu})\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\Theta)^2+(1-\frac{1}{\mu})\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)^2\\ -2\cos\Theta\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\Theta)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)\end{array}\right\}=$$

Nun ist aber

$$2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\Theta)^2=1-\cos(\alpha-\Theta),$$
$$2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)^2=1-\cos(\alpha+\Theta)$$

und

$$2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\Theta)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)=-(\cos\alpha-\cos\Theta),$$

also

$$\left.\begin{array}{l}(1+\frac{1}{\mu})\{1-\cos(\alpha-\Theta)\}\\ +(1-\frac{1}{\mu})\{1-\cos(\alpha+\Theta)\}\\ +2\cos\Theta(\cos\alpha-\cos\Theta)\end{array}\right\}=0,$$

folglich

$$\left.\begin{array}{l}(1+\frac{1}{\mu})+(1-\frac{1}{\mu})\\ -\{(1+\frac{1}{\mu})+(1-\frac{1}{\mu})\}\cos\alpha\cos\Theta\\ -\{(1+\frac{1}{\mu})-(1-\frac{1}{\mu})\}\sin\alpha\sin\Theta\\ \quad +2\cos\Theta(\cos\alpha-\cos\Theta)\end{array}\right\}=0,$$

d. i.

$$1-\frac{1}{\mu}\sin\alpha\sin\Theta-\cos\Theta^2=0$$

oder

$$\sin\Theta(\sin\Theta-\frac{1}{\mu}\sin\alpha)=0,$$

und folglich, weil $\sin\alpha$, also auch

$$\sin\Theta=\frac{a_1-\Delta}{R_1}\sin\alpha$$

nicht verschwindet,

$$\sin\Theta-\frac{1}{\mu}\sin\alpha=0.$$

Es ist also überhaupt

$$\sin\Theta\pm\frac{1}{\mu}\sin\alpha=0,$$

d. i.

$$\sin\Theta = \mp\frac{1}{\mu}\sin\alpha,$$

und folglich, weil bekanntlich

$$R_1 = (a_1 - \Delta)\frac{\sin\alpha}{\sin\Theta}$$

ist,

$$R_1 = \mp\mu(a_1 - \Delta).$$

Wenn also die beiden Gleichungen

$$\frac{a_1 - \Delta}{R_1} = \frac{\sin\Theta}{\sin\alpha}$$

und

$$\left(1 + \frac{1}{\mu}\right)\left(1 \pm \frac{a_1 - \Delta}{R_1}\right) = \frac{\sin(\alpha + \Theta)}{\sin\alpha}\left(\cos\Theta + \frac{1}{\mu}\sqrt{1 - \mu^2\sin\Theta^2}\right)$$

zugleich erfüllt sein sollen, so muss nothwendig mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander jederzeit

$$\sin\Theta = \mp\frac{1}{\mu}\sin\alpha,\ R_1 = \mp\mu(a_1 - \Delta)$$

sein.

§. 8.

Ferner wollen wir nun aber auch untersuchen, ob sich umgekehrt behaupten lässt, dass für

$$\sin\Theta = \mp\frac{1}{\mu}\sin\alpha,\ R_1 = \mp\mu(a_1 - \Delta)$$

jederzeit mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander

$$\frac{a_1 - \Delta}{R_1} = \frac{\sin\Theta}{\sin\alpha}$$

und

$$\left(1 + \frac{1}{\mu}\right)\left(1 \pm \frac{a_1 - \Delta}{R_1}\right) = \frac{\sin(\alpha + \Theta)}{\sin\alpha}\left(\cos\Theta + \frac{1}{\mu}\sqrt{1 - \mu^2\sin\Theta^2}\right)$$

ist.

Nehmen wir zuerst die obern Zeichen und setzen also

$$\sin\Theta = -\frac{1}{\mu}\sin\alpha,\ R_1 = -\mu(a_1 - \Delta),$$

so ist, wie aus der im vorhergehenden Paragraphen in diesem Falle angestellten Analysis, wenn man dieselbe rückwärts synthetisch verfolgt, sich leicht ergiebt, jederzeit

$$\frac{a_1-\Delta}{R_1}=\frac{\sin\Theta}{\sin\alpha}$$

und

$$\left.\begin{array}{l}(1+\frac{1}{\mu})^2\cos\frac{1}{2}(\alpha-\Theta)^2+(1-\frac{1}{\mu^2})\cos\frac{1}{2}(\alpha+\Theta)^2\\ \quad-2(1+\frac{1}{\mu})\cos\Theta\cos\frac{1}{2}(\alpha-\Theta)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\Theta)\end{array}\right\}=0,$$

also

$$(1+\frac{1}{\mu})^2\cos\frac{1}{2}(\alpha-\Theta)^2+\cos\Theta^2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\Theta)^2$$
$$-2(1+\frac{1}{\mu})\cos\Theta\cos\frac{1}{2}(\alpha-\Theta)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\Theta)$$
$$=\frac{1}{\mu^2}\cos\frac{1}{2}(\alpha+\Theta)^2(1-\mu^2\sin\Theta^2),$$

d. i.

$$\{(1+\frac{1}{\mu})\cos\frac{1}{2}(\alpha-\Theta)-\cos\Theta\cos\frac{1}{2}(\alpha+\Theta)\}^2$$
$$=\frac{1}{\mu^2}\cos\frac{1}{2}(\alpha+\Theta)^2(1-\mu^2\sin\Theta^2),$$

und folglich

$$(1+\frac{1}{\mu})\cos\frac{1}{2}(\alpha-\Theta)-\cos\Theta\cos\frac{1}{2}(\alpha+\Theta)$$
$$=\pm\frac{1}{\mu}\cos\frac{1}{2}(\alpha+\Theta)\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2},$$

wo sich nun frägt, welches Zeichen man zu nehmen hat, was auf folgende Art entschieden werden kann.

Wenn

$$0<\alpha<90^\circ \text{ oder } 270^\circ<\alpha<360^\circ$$

ist, so ist $\cos\alpha$ positiv. Da nun

$$\sin\Theta=-\frac{1}{\mu}\sin\alpha$$

ist, so ist

$$\mu\sin\Theta=-\sin\alpha,$$

und folglich

$$\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}=\cos\alpha.$$

Soll also die Gleichung

$$(1+\frac{1}{\mu})\cos\frac{1}{2}(\alpha-\Theta)-\cos\Theta\cos\frac{1}{2}(\alpha+\Theta)$$
$$=\pm\frac{1}{\mu}\cos\frac{1}{2}(\alpha+\Theta)\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}$$

erfüllt sein, so muss

$$(\sin\alpha-\sin\Theta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\Theta)-\sin\alpha\cos\Theta\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)$$
$$=\mp\cos\alpha\sin\Theta\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta),$$

d. i.

$$(\sin\alpha-\sin\Theta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\Theta)=\sin(\alpha\mp\Theta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)$$

oder

$$\sin(\alpha-\Theta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)=\sin(\alpha\mp\Theta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)$$

sein, welches offenbar nur dann möglich ist, wenn man das obere Zeichen nimmt, und daher

$$\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\Theta)-\cos\Theta\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)$$
$$=\frac{1}{\mu}\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}$$

setzt.

Wenn

$$90^\circ<\alpha<180^\circ \text{ oder } 180^\circ<\alpha<270^\circ$$

ist, so ist $\cos\alpha$ negativ. Da nun

$$\sin\Theta=-\frac{1}{\mu}\sin\alpha$$

ist, so ist

$$\mu\sin\Theta=-\sin\alpha,$$

und folglich

$$\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}=-\cos\alpha.$$

Soll also die Gleichung

$$\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\Theta)-\cos\Theta\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)$$
$$=\pm\frac{1}{\mu}\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}$$

erfüllt sein, so muss

$$(\sin\alpha-\sin\Theta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\Theta)-\sin\alpha\cos\Theta\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)$$
$$=\pm\cos\alpha\sin\Theta\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta),$$

d. i.

$$(\sin\alpha-\sin\Theta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\Theta)=\sin(\alpha\pm\Theta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta),$$

oder

$$\sin(\alpha-\Theta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)=\sin(\alpha\pm\Theta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)$$

sein, welches offenbar nur dann möglich ist, wenn man das untere Zeichen nimmt, und also

$$(1+\frac{1}{\mu})\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\Theta)-\cos\Theta\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)$$
$$=-\frac{1}{\mu}\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}$$

setzt.

Also ist

$$(1+\frac{1}{\mu})\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\Theta)-\cos\Theta\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)$$
$$=\pm\frac{1}{\mu}\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2},$$

indem man das obere oder das untere Zeichen nimmt, jenachdem $\cos\alpha$ positiv oder negativ ist.

Aus dieser Gleichung folgt aber

$$(1+\frac{1}{\mu})\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\Theta)=\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)(\cos\Theta\pm\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2})$$

oder

$$2(1+\frac{1}{\mu})\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\Theta)$$
$$=\sin(\alpha+\Theta)(\cos\Theta\pm\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}),$$

d. i.

$$(1+\frac{1}{\mu})(\sin\alpha+\sin\Theta)=\sin(\alpha+\Theta)(\cos\Theta\pm\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2})$$

oder

$$(1+\frac{1}{\mu})(1+\frac{\sin\Theta}{\sin\alpha})=\frac{\sin(\alpha+\Theta)}{\sin\alpha}(\cos\Theta\pm\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}),$$

also, weil

$$\frac{\sin\Theta}{\sin\alpha}=-\frac{1}{\mu}=\frac{a_1-\Delta}{R_1}$$

ist,

$$(1+\frac{1}{\mu})(1+\frac{a_1-\Delta}{R_1})=\frac{\sin(\alpha+\Theta)}{\sin\alpha}(\cos\Theta\pm\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}).$$

Für

$$\sin\Theta=-\frac{1}{\mu}\sin\alpha,\quad R_1=-\mu(a_1-\Delta)$$

ist folglich immer

$$(1+\frac{1}{\mu})(1+\frac{a_1-\Delta}{R_1})=\frac{\sin(\alpha+\Theta)}{\sin\alpha}(\cos\Theta\pm\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}),$$

wenn man das obere oder das untere Zeichen nimmt, jenachdem $\cos\alpha$ positiv oder negativ ist.

Setzen wir ferner

$$\sin\Theta = \frac{1}{\mu}\sin\alpha,\quad R_1 = \mu(a_1 - \Delta),$$

so ist, wie aus der im vorhergehenden Paragraphen angestellten Analysis, wenn man dieselbe rückwärts synthetisch verfolgt, sich leicht ergiebt, jederzeit

$$\frac{a_1 - \Delta}{R_1} = \frac{\sin\Theta}{\sin\alpha}$$

und

$$\left.\begin{array}{l}(1+\frac{1}{\mu})^2 \sin\frac{1}{2}(\alpha-\Theta)^2 + (1-\frac{1}{\mu^2})\sin\frac{1}{2}(\alpha+\Theta)^2 \\ -2(1+\frac{1}{\mu})\cos\Theta\sin\frac{1}{2}(\alpha-\Theta)\sin\frac{1}{2}(\alpha+\Theta)\end{array}\right\} = 0,$$

also

$$(1+\frac{1}{\mu})^2 \sin\frac{1}{2}(\alpha-\Theta)^2 + \cos\Theta^2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\Theta)^2$$
$$-2(1+\frac{1}{\mu})\cos\Theta\sin\frac{1}{2}(\alpha-\Theta)\sin\frac{1}{2}(\alpha+\Theta)$$
$$=\frac{1}{\mu^2}\sin\frac{1}{2}(\alpha+\Theta)^2(1-\mu^2\sin\Theta^2),$$

d. i.

$$\{(1+\frac{1}{\mu})\sin\frac{1}{2}(\alpha-\Theta) - \cos\Theta\sin\frac{1}{2}(\alpha+\Theta)\}^2$$
$$=\frac{1}{\mu^2}\sin\frac{1}{2}(\alpha+\Theta)^2(1-\mu^2\sin\Theta^2),$$

und folglich

$$(1+\frac{1}{\mu})\sin\frac{1}{2}(\alpha-\Theta) - \cos\Theta\sin\frac{1}{2}(\alpha+\Theta)$$
$$=\pm\frac{1}{\mu}\sin\frac{1}{2}(\alpha+\Theta)\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2},$$

wo sich nun wieder frägt, welches Zeichen man zu nehmen hat, was auf folgende Art entschieden werden kann.

Wenn

$$0 < \alpha < 90^\circ \text{ oder } 270^\circ < \alpha < 360^\circ$$

ist, so ist $\cos\alpha$ positiv, und folglich auf ähnliche Art wie vorher

$$\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2} = \cos\alpha.$$

ist also die Gleichung

$$\left(1+\frac{1}{\mu}\right) \sin \tfrac{1}{2}(\alpha-\Theta) - \cos\Theta \sin \tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)$$
$$= \pm \frac{1}{\mu} \sin \tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta) \sqrt{1-\mu^2 \sin\Theta^2}$$

erfüllt sein, so muss

$$(\sin\alpha + \sin\Theta) \sin \tfrac{1}{2}(\alpha-\Theta) - \sin\alpha \cos\Theta \sin \tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)$$
$$= \pm \cos\alpha \sin\Theta \sin \tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta),$$

d. i.

$$(\sin\alpha + \sin\Theta) \sin \tfrac{1}{2}(\alpha-\Theta) = \sin(\alpha \pm \Theta) \sin \tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)$$

oder

$$\sin(\alpha-\Theta) \sin \tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta) = \sin(\alpha \pm \Theta) \sin \tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)$$

sein, welches offenbar nur dann möglich ist, wenn man das untere Zeichen nimmt, und daher

$$\left(1+\frac{1}{\mu}\right) \sin \tfrac{1}{2}(\alpha-\Theta) - \cos\Theta \sin \tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)$$
$$= -\frac{1}{\mu} \sin \tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta) \sqrt{1-\mu^2 \sin\Theta^2}$$

setzt.

Wenn

$$90^\circ < \alpha < 180^\circ \text{ oder } 180^\circ < \alpha < 270^\circ$$

ist, so ist $\cos\alpha$ negativ, und folglich wie oben

$$\sqrt{1-\mu^2 \sin\Theta^2} = -\cos\alpha.$$

Soll also die Gleichung

$$\left(1+\frac{1}{\mu}\right) \sin \tfrac{1}{2}(\alpha-\Theta) - \cos\Theta \sin \tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)$$
$$= \pm \frac{1}{\mu} \sin \tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta) \sqrt{1-\mu^2 \sin\Theta^2}$$

erfüllt sein, so muss

$$(\sin\alpha + \sin\Theta) \sin \tfrac{1}{2}(\alpha-\Theta) - \sin\alpha \cos\Theta \sin \tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)$$
$$= \mp \cos\alpha \sin\Theta \sin \tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta),$$

d. i.

$$(\sin\alpha + \sin\Theta) \sin \tfrac{1}{2}(\alpha-\Theta) = \sin(\alpha \mp \Theta) \sin \tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)$$

oder

$$\sin(\alpha-\Theta) \sin \tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta) = \sin(\alpha \mp \Theta) \sin \tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)$$

sein, welches offenbar nur dann möglich ist, wenn man das obere Zeichen nimmt, und daher

$$\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\Theta)-\cos\Theta\,\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)$$

$$=\frac{1}{\mu}\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}$$

setzt.

Also ist

$$\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\Theta)-\cos\Theta\,\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)$$

$$=\pm\frac{1}{\mu}\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2},$$

indem man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem $\cos\alpha$ negativ oder positiv ist.

Aus dieser Gleichung folgt aber

$$\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\Theta)=\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)\left(\cos\Theta\pm\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}\right)$$

oder

$$2\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\Theta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\Theta)$$

$$=\sin(\alpha+\Theta)\left(\cos\Theta\pm\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}\right)$$

d. i.

$$\left(1+\frac{1}{\mu}\right)(\sin\alpha-\sin\Theta)=\sin(\alpha+\Theta)\left(\cos\Theta\pm\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}\right)$$

oder

$$\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left(1-\frac{\sin\Theta}{\sin\alpha}\right)=\frac{\sin(\alpha+\Theta)}{\sin\alpha}\left(\cos\Theta\pm\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}\right),$$

also, weil

$$\frac{\sin\Theta}{\sin\alpha}=\frac{1}{\mu}=\frac{a_1-\Delta}{R_1}$$

ist,

$$\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left(1-\frac{a_1-\Delta}{R_1}\right)=\frac{\sin(\alpha+\Theta)}{\sin\alpha}\left(\cos\Theta\pm\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}\right).$$

Für

$$\sin\Theta=\frac{1}{\mu}\sin\alpha,\quad R_1=\mu(a_1-\Delta)$$

ist also immer

$$\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left(1-\frac{a_1-\Delta}{R_1}\right)=\frac{\sin(\alpha+\Theta)}{\sin\alpha}\left(\cos\Theta\pm\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}\right),$$

wenn man das obere oder das untere Zeichen nimmt, jenachdem $\cos\alpha$ negativ oder positiv ist.

Aus der vorhergehenden Untersuchung ergiebt sich nun das folgende Gesammtresultat:

Für

$$\sin\Theta = -\frac{1}{\mu}\sin\alpha,\ R_1 = -\mu(a_1 - \Delta)$$

ist

$$\frac{a_1 - \Delta}{R_1} = \frac{\sin\Theta}{\sin\alpha}$$

und

$$(1+\frac{1}{\mu})(1+\frac{a_1-\Delta}{R_1}) = \frac{\sin(\alpha+\Theta)}{\sin\alpha}(\cos\Theta \pm \frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}),$$

wenn man das obere oder das untere Zeichen nimmt, jenachdem $\cos\alpha$ positiv oder negativ ist. Für

$$\sin\Theta = \frac{1}{\mu}\sin\alpha,\ R_1 = \mu(a_1 - \Delta)$$

ist dagegen

$$\frac{a_1 - \Delta}{R_1} = \frac{\sin\Theta}{\sin\alpha}$$

und

$$(1+\frac{1}{\mu})(1-\frac{a_1-\Delta}{R_1}) = \frac{\sin(\alpha+\Theta)}{\sin\alpha}(\cos\Theta \pm \frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}),$$

wenn man das obere oder das untere Zeichen nimmt, jenachdem $\cos\alpha$ negativ oder positiv ist.

§. 9.

Wir wollen jetzt annehmen, dass auf den in Taf. I. Fig. 1. um den Mittelpunkt C beschriebenen Kreis Strahlen auffallen, welche entweder wirklich sämmtlich aus dem Punkte A ausgehen oder wenigstens als sämmtlich aus diesem Punkte ausgehend betrachtet werden können, und wollen die von A aus durch C gezogene gerade Linie als den positiven Theil der Axe der x annehmen, wo denn im Vorhergehenden $a_1 = AC$ und $\Delta = 0$, also $a_1 - \Delta = AC$ zu setzen ist. Nehmen wir nun ferner an, dass der aus dem Mittelpunkte C beschriebene Kreis mit dem Halbmesser $(\mu).AC$ beschrieben sei, wo (μ) bekanntlich den absoluten Werth von μ bezeichnet, so sind die drei folgenden Fälle zu unterscheiden.

I. Es sei $(\mu) < 1$, welchem Falle Taf. I. Fig. 1. a. entspricht.

Für einen auf die concave Seite des um C mit dem Halbmesser $(\mu).AC$ beschriebenen Kreises unter dem Winkel α fallenden und an dem Kreise eine Brechung erleidenden Strahl ist nach §. 3. bekanntlich, wenn man

$$\sin\Theta = \frac{AC}{R_1}\sin\alpha$$

setzt,

$$\frac{AC}{AC-\Delta_1}=1-\frac{\sin(\alpha+\Theta)}{\sin\alpha}(\cos\Theta+\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}),$$

und μ ist eine negative, R_1 eine positive Grösse.

Weil nun im vorliegenden Falle

$$R_1=-\mu\,.\,AC,\ \text{also}\ \sin\Theta=-\frac{1}{\mu}\sin\alpha$$

und $\cos\alpha$ offenbar positiv ist, so ist nach dem vorhergehenden Paragraphen

$$(1+\frac{1}{\mu})(1+\frac{AC}{R_1})=\frac{\sin(\alpha+\Theta)}{\sin\alpha}(\cos\Theta+\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}$$

oder

$$1-\frac{1}{\mu^2}=\frac{\sin(\alpha+\Theta)}{\sin\alpha}(\cos\Theta+\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}),$$

also

$$\frac{1}{\mu^2}=1-\frac{\sin(\alpha+\Theta)}{\sin\alpha}(\cos\Theta+\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}),$$

und folglich nach dem Obigen

$$\frac{AC}{AC-\Delta_1}=\frac{1}{\mu^2},$$

also, wie sich hieraus leicht ergiebt,

$$\Delta_1=(1-\mu^2)\,.\,AC=(1-\mu)(1+\mu)\,.\,AC.$$

Daher ist Δ_1 eine constante von α unabhängige Grösse.

Für einen auf die convexe Seite des um C mit dem Halbmesser $(\mu)\,.\,AC$ beschriebenen Kreises unter dem Winkel α fallenden und an dem Kreise eine Zurückwerfung erleidenden Strahl ist nach §. 3. bekanntlich, wenn man

$$\sin\Theta=\frac{AC}{R_1}\sin\alpha$$

setzt, wieder

$$\frac{AC}{AC-\Delta_1}=1-\frac{\sin(\alpha+\Theta)}{\sin\alpha}(\cos\Theta+\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}),$$

und jetzt ist μ eine positive, R_1 eine negative Grösse.

Weil nun im vorliegenden Falle

$$R_1=-\mu\,.\,AC,\ \text{also}\ \sin\Theta=-\frac{1}{\mu}\sin\alpha$$

und $\cos\alpha$ positiv ist, so ist nach dem vorhergehenden Paragraphen wieder

$$(1+\frac{1}{\mu})(1+\frac{AC}{R_1})=\frac{\sin(\alpha+\Theta)}{\sin\alpha}(\cos\Theta+\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2})$$

oder

$$1-\frac{1}{\mu^2}=\frac{\sin(\alpha+\Theta)}{\sin\alpha}\left(\cos\Theta+\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}\right),$$

also

$$\frac{1}{\mu^2}=1-\frac{\sin(\alpha+\Theta)}{\sin\alpha}\left(\cos\Theta+\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}\right),$$

und folglich nach dem Obigen

$$\frac{AC}{AC-\Delta_1}=\frac{1}{\mu^2},$$

also, wie sich hieraus leicht ergiebt,

$$\Delta_1=(1-\mu^2).AC=(1-\mu)(1+\mu).AC.$$

Daher ist Δ_1 wieder eine constante von α unabhängige Grösse.

Ueberlegt man nun, dass die constanten Werthe von Δ_1 in den beiden vorher betrachteten Fällen einander gleich sind, so ergiebt sich unmittelbar der folgende Satz:

Wenn A und C zwei beliebige Punkte sind, und man, unter der Voraussetzung, dass der absolute Werth (μ) von μ kleiner als die Einheit ist, aus dem Punkte C als Mittelpunkt mit dem Halbmesser $(\mu).AC$ einen Kreis beschrieben hat; so gehen alle Strahlen, welche als aus dem Punkte A ausgehend betrachtet werden können und auf die concave Seite des in Rede stehenden Kreises fallen, nachdem diese Strahlen an derselben eine Brechung erlitten haben, nöthigenfalls gehörig verlängert, — und alle Strahlen, welche als aus dem Punkte A ausgehend betrachtet werden können und auf die convexe Seite des in Rede stehenden Kreises fallen, nachdem diese Strahlen an derselben eine Zurückwerfung erlitten haben, nöthigenfalls gehörig verlängert, — durch einen und denselben Punkt der durch A und C gehenden geraden Linie, welcher immer von A an nach C hin liegt*), und dessen Entfernung von A durch das Product $(1-\mu^2).AC=(1-\mu)(1+\mu).AC$ bestimmt wird.

II. Es sei $(\mu)>1$, welchem Falle Taf. I. Fig. 1. b. entspricht.

Alle Strahlen, welche als aus dem Punkte A ausgehend betrachtet werden können, fallen in diesem Falle auf die concave Seite des um C beschriebenen Kreises, und für einen unter dem Winkel α auffallenden Strahl ist nach §. 3., wenn

$$\sin\Theta=\frac{AC}{R_1}\sin\alpha$$

gesetzt wird, jederzeit

$$\frac{AC}{AC-\Delta_1}=1-\frac{\sin(\alpha+\Theta)}{\sin\alpha}\left(\cos\Theta+\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}\right).$$

*) Da nämlich in diesem Falle $(1-\mu^2).AC$ positiv ist.

Wenn nun alle unter einem Winkel α, der zwischen 0 und 90° oder zwischen 270° und 360° liegt, auffallende Strahlen eine Brechung erleiden, so ist offenbar

$$R_1 = -\mu . AC, \text{ also } \sin\Theta = -\frac{1}{\mu}\sin\alpha,$$

und folglich nach dem vorhergehenden Paragraphen, da $\cos\alpha$ positiv ist,

$$(1+\frac{1}{\mu})(1+\frac{AC}{R_1}) = \frac{\sin(\alpha+\Theta)}{\sin\alpha}(\cos\Theta + \frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2})$$

oder

$$1-\frac{1}{\mu^2} = \frac{\sin(\alpha+\Theta)}{\sin\alpha}(\cos\Theta + \frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}),$$

also

$$\frac{1}{\mu^2} = 1 - \frac{\sin(\alpha+\Theta)}{\sin\alpha}(\cos\Theta + \frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}),$$

und folglich nach dem Obigen

$$\frac{AC}{AC-\Delta_1} = \frac{1}{\mu^2},$$

also, wie sich hieraus leicht ergiebt,

$$\Delta_1 = (1-\mu^2) . AC = (1-\mu)(1+\mu) . AC.$$

Daher ist Δ_1 eine constante von α unabhängige Grösse.

Wenn ferner alle unter einem Winkel α, der zwischen 90° und 180° oder zwischen 180° und 270° liegt, auffallende Strahlen eine Zurückwerfung erleiden, so ist offenbar

$$R_1 = \mu . AC, \text{ also } \sin\Theta = \frac{1}{\mu}\sin\alpha,$$

und folglich nach dem vorhergehenden Paragraphen, da $\cos\alpha$ negativ ist,

$$(1+\frac{1}{\mu})(1-\frac{AC}{R_1}) = \frac{\sin(\alpha+\Theta)}{\sin\alpha}(\cos\Theta + \frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2})$$

oder

$$1-\frac{1}{\mu^2} = \frac{\sin(\alpha+\Theta)}{\sin\alpha}(\cos\Theta + \frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}),$$

also

$$\frac{1}{\mu^2} = 1 - \frac{\sin(\alpha+\Theta)}{\sin\alpha}(\cos\Theta + \frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}),$$

und folglich nach dem Obigen

$$\frac{AC}{AC-\Delta_1} = \frac{1}{\mu^2},$$

also, wie sich hieraus leicht ergiebt,

$$\Delta_1 = (1-\mu^2) \, . \, AC = (1-\mu)(1+\mu) \, . \, AC.$$

Daher ist auch jetzt Δ_1 eine constante von α unabhängige Grösse.

Ueberlegt man nun wieder, dass die beiden constanten Werthe von Δ_1 in dem ersten und zweiten der beiden vorher betrachteten Fälle einander gleich sind, so ergiebt sich unmittelbar der folgende Satz:

Wenn A und C zwei beliebige Punkte sind, und man, unter der Voraussetzung, dass der absolute Werth (μ) von μ grösser als die Einheit ist, aus dem Punkte C als Mittelpunkt mit dem Halbmesser $(\mu) \, . \, AC$ einen Kreis beschrieben hat; so gehen alle Strahlen, welche als aus dem Punkte A ausgehend betrachtet werden können, und auf derselben Seite des durch A auf AC errichteten Perpendikels, auf welcher der Mittelpunkt C liegt, auf den Kreis fallen, nachdem diese Strahlen an demselben eine Brechung erlitten haben, nöthigenfalls gehörig verlängert, — und alle Strahlen, welche als aus dem Punkte A ausgehend betrachtet werden können, und nicht auf derselben Seite des durch A auf AC errichteten Perpendikels, auf welcher der Mittelpunkt C liegt, auf den Kreis fallen, nachdem diese Strahlen an demselben eine Zurückwerfung erlitten haben, nöthigenfalls gehörig verlängert, — durch einen und denselben Punkt der durch A und C gehenden geraden Linie, welcher immer von A an nicht nach C hin liegt*), und dessen Entfernung von A durch das Product $(\mu^2-1) \, . \, AC = (\mu-1)(\mu+1) \, . \, AC$ bestimmt wird.

III. Dass in dem Falle $(\mu)=1$, welchem Taf. I. Fig. 1. c. entspricht, alle Strahlen, welche als aus dem Punkte A ausgehend betrachtet werden können, auf den Kreis fallen und an demselben eine Brechung erleiden, nach der Brechung wieder sämmtlich durch den Punkt A gehen, fällt auf der Stelle in die Augen und bedarf keiner weitern Erläuterung.

§. 10.

Ferner wollen wir annehmen, dass auf den in Taf. I. Fig. 2. um den Mittelpunkt C beschriebenen Kreis Strahlen auffallen, welche sämmtlich nach dem Punkte A hin convergiren, und wollen wieder die von A aus durch C gezogene gerade Linie als den positiven Theil der Axe der x annehmen, wo denn im Vorhergehenden auch jetzt $a_1 = AC$ und $\Delta = 0$, also $a_1 - \Delta = AC$ zu setzen ist. Nehmen wir nun ausserdem an, dass der aus dem Mittelpunkte C beschriebene Kreis mit dem Halbmesser $(\mu) \, . \, AC$ beschrieben sei, wo (μ) seine bekannte Bedeutung hat, so sind wieder die drei folgenden Fälle zu unterscheiden.

I. Es sei $(\mu) < 1$, welchem Falle Taf. I. Fig. 2. a. entspricht. Für einen auf die concave Seite des um C mit dem Halbmes-

*) Da nämlich in diesem Falle $(1-\mu^2) \, . \, AC$ negativ ist.

ser $(\mu)\,.\,AC$ beschriebenen Kreises unter dem Winkel α fallenden und an dem Kreise eine Zurückwerfung erleidenden Strahl ist nach §. 3. bekanntlich, wenn man

$$\sin\Theta = \frac{AC}{R_1}\sin\alpha$$

setzt,

$$\frac{AC}{AC-\Delta_1} = 1 - \frac{\sin(\alpha+\Theta)}{\sin\alpha}\left(\cos\Theta + \frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}\right),$$

und μ ist, so wie auch R_1 eine positive Grösse.

Weil nun im vorliegenden Falle

$$R_1 = \mu\,.\,AC, \text{ also } \sin\Theta = \frac{1}{\mu}\sin\alpha$$

und $\cos\alpha$ offenbar negativ ist, so ist nach §. 8.

$$\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left(1-\frac{AC}{R_1}\right) = \frac{\sin(\alpha+\Theta)}{\sin\alpha}\left(\cos\Theta + \frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}\right)$$

oder

$$1-\frac{1}{\mu^2} = \frac{\sin(\alpha+\Theta)}{\sin\alpha}\left(\cos\Theta + \frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}\right),$$

also

$$\frac{1}{\mu^2} = 1 - \frac{\sin(\alpha+\Theta)}{\sin\alpha}\left(\cos\Theta + \frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}\right),$$

und folglich nach dem Obigen

$$\frac{AC}{AC-\Delta_1} = \frac{1}{\mu^2},$$

also, wie sich hieraus leicht ergiebt,

$$\Delta_1 = (1-\mu^2)\,.\,AC = (1-\mu)(1+\mu)\,.\,AC.$$

Daher ist Δ_1 eine constante von α unabhängige Grösse.

Für einen auf die convexe Seite des um C mit dem Halbmesser $(\mu)\,.\,AC$ beschriebenen Kreises unter dem Winkel α fallenden und an dem Kreise eine Brechung erleidenden Strahl ist nach §. 3., wenn man

$$\sin\Theta = \frac{AC}{R_1}\sin\alpha$$

setzt, bekanntlich wieder

$$\frac{AC}{AC-\Delta_1} = 1 - \frac{\sin(\alpha+\Theta)}{\sin\alpha}\left(\cos\Theta + \frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}\right),$$

und μ ist, so wie R_1 eine negative Grösse.

Weil nun im vorliegenden Falle wieder

$$R_1 = \mu . AC, \text{ also } \sin\Theta = \frac{1}{\mu}\sin\alpha$$

und $\cos\alpha$ offenbar negativ ist, so ist nach §. 8.

$$(1+\frac{1}{\mu})(1-\frac{AC}{R_1}) = \frac{\sin(\alpha+\Theta)}{\sin\alpha}(\cos\Theta + \frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2})$$

oder

$$1-\frac{1}{\mu^2} = \frac{\sin(\alpha+\Theta)}{\sin\alpha}(\cos\Theta + \frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}),$$

also

$$\frac{1}{\mu^2} = 1 - \frac{\sin(\alpha+\Theta)}{\sin\alpha}(\cos\Theta + \frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}),$$

und folglich nach dem Obigen

$$\frac{AC}{AC-\Delta_1} = \frac{1}{\mu^2},$$

also, wie sich hieraus leicht ergiebt,

$$\Delta_1 = (1-\mu^2).AC = (1-\mu)(1+\mu).AC.$$

Daher ist Δ_1 wieder eine constante von α unabhängige Grösse.

Ueberlegt man nun, dass die beiden constanten Werthe von Δ_1 im ersten und zweiten der beiden vorher betrachteten Fälle einander gleich sind, so ergiebt sich unmittelbar der folgende Satz:

Wenn A und C zwei beliebige Punkte sind, und man, unter der Voraussetzung, dass der absolute Werth (μ) von μ kleiner als die Einheit ist, aus dem Punkte C als Mittelpunkt mit dem Halbmesser $(\mu).AC$ einen Kreis beschrieben hat; so gehen alle nach dem Punkte A convergirende Strahlen, welche auf die concave Seite des in Rede stehenden Kreises fallen, nachdem diese Strahlen an derselben eine Zurückwerfung erlitten haben, nöthigenfalls gehörig verlängert, — und alle nach dem Punkte A convergirende Strahlen, welche auf die convexe Seite des in Rede stehenden Kreises fallen, nachdem diese Strahlen an derselben eine Brechung erlitten haben, nöthigenfalls gehörig verlängert, — durch einen und denselben Punkt der durch A und C gehenden geraden Linie, welcher immer von A an nach C liegt*), und dessen Entfernung von A durch das Product $(1-\mu^2).AC = (1-\mu)(1+\mu).AC$ bestimmt wird.

II. Es sei $(\mu) > 1$, welchem Falle Taf. I. Fig. 2.b. entspricht. Alle nach dem Punkte A convergirende Strahlen fallen in diesem Falle auf die convexe Seite des um C beschriebenen Kreises, und für einen unter dem Winkel α auffallenden Strahl ist nach §. 3., wenn

---

*) Da nämlich in diesem Falle $(1-\mu^2).AC$ positiv ist.

$$\sin \Theta = \frac{AC}{R_1} \sin \alpha$$

gesetzt wird, jederzeit

$$\frac{AC}{AC - \Delta_1} = 1 - \frac{\sin(\alpha + \Theta)}{\sin \alpha} (\cos \Theta + \frac{1}{\mu} \sqrt{1 - \mu^2 \sin \Theta^2}).$$

Wenn nun alle unter einem Winkel α, der zwischen 90° und 180° oder zwischen 180° und 270° liegt, auffallende Strahlen eine Brechung erleiden, so ist offenbar

$$R_1 = \mu . AC, \text{ also } \sin \Theta = \frac{1}{\mu} \sin \alpha,$$

und folglich nach §. 8., weil $\cos \alpha$ negativ ist,

$$(1 + \frac{1}{\mu})(1 - \frac{AC}{R_1}) = \frac{\sin(\alpha + \Theta)}{\sin \alpha} (\cos \Theta + \frac{1}{\mu} \sqrt{1 - \mu^2 \sin \Theta^2})$$

oder

$$1 - \frac{1}{\mu^2} = \frac{\sin(\alpha + \Theta)}{\sin \alpha} (\cos \Theta + \frac{1}{\mu} \sqrt{1 - \mu^2 \sin \Theta^2}),$$

also

$$\frac{1}{\mu^2} = 1 - \frac{\sin(\alpha + \Theta)}{\sin \alpha} (\cos \Theta + \frac{1}{\mu} \sqrt{1 - \mu^2 \sin \Theta^2}),$$

und folglich nach dem Obigen

$$\frac{AC}{AC - \Delta_1} = \frac{1}{\mu^2},$$

also, wie sich hieraus leicht ergiebt,

$$\Delta_1 = (1 - \mu^2) . AC = (1 - \mu)(1 + \mu) . AC.$$

Daher ist Δ_1 eine constante von α unabhängige Grösse.

Wenn ferner alle unter einem Winkel α, der zwischen 0 und 90° oder zwischen 270° und 360° liegt, auffallende Strahlen eine Zurückwerfung erleiden, so ist offenbar

$$R_1 = -\mu . AC, \text{ also } \sin \Theta = -\frac{1}{\mu} \sin \alpha,$$

und folglich nach §. 8., weil $\cos \alpha$ positiv ist,

$$(1 + \frac{1}{\mu})(1 + \frac{AC}{R_1}) = \frac{\sin(\alpha + \Theta)}{\sin \alpha} (\cos \Theta + \frac{1}{\mu} \sqrt{1 - \mu^2 \sin \Theta^2})$$

oder

$$1 - \frac{1}{\mu^2} = \frac{\sin(\alpha + \Theta)}{\sin \alpha} (\cos \Theta + \frac{1}{\mu} \sqrt{1 - \mu^2 \sin \Theta^2}),$$

$$\frac{1}{\mu^2} = 1 - \frac{\sin(\alpha + \Theta)}{\sin \alpha} (\cos \Theta + \frac{1}{\mu} \sqrt{1 - \mu^2 \sin \Theta^2}),$$

und folglich nach dem Obigen

$$\frac{AC}{AC-\Delta_1}=\frac{1}{\mu^2},$$

also, wie sich hieraus leicht ergiebt,

$$\Delta_1=(1-\mu^2).AC=(1-\mu)(1+\mu).AC.$$

Daher ist Δ_1 wieder eine constante von α unabhängige Grösse.

Da die constanten Werthe von Δ_1 in den beiden vorher betrachteten Fälle einander gleich sind, so ergiebt sich der folgende Satz:

Wenn A und C zwei beliebige Punkte sind, und man, unter der Voraussetzung, dass der absolute Werth (μ) von μ grösser als die Einheit ist, aus dem Mittelpunkte C mit dem Halbmesser $(\mu).AC$ einen Kreis beschrieben hat; so gehen alle nach dem Punkte A convergirende Strahlen, welche auf derselben Seite des durch A auf AC errichteten Perpendikels, auf welcher der Mittelpunkt C liegt, auf den Kreis fallen, nachdem diese Strahlen an demselben eine Brechung erlitten haben, nöthigenfals gehörig verlängert, — und alle nach dem Punkte A convergirende Strahlen, welche nicht auf derselben Seite des durch A auf AC errichteten Perpendikels, auf welcher der Mittelpunkt C liegt, auf den Kreis fallen, nachdem diese Strahlen an demselben eine Zurückwerfung erlitten haben, nöthigenfalls gehörig verlängert, — durch einen und denselben Punkt der durch A und C gehenden geraden Linie, welcher immer von A an nicht nach C hin liegt*), und dessen Entfernung von A durch das Product $(\mu^2-1).AC=(\mu-1)(\mu+1).AC$ bestimmt wird.

III. Dass in dem Falle $(\mu)=1$, welchem Taf. I. Fig. 2. c. entspricht, alle nach dem Punkte A convergirende Strahlen, welche auf den Kreis fallen und an demselben eine Brechung erleiden, nach der Brechung wieder sämmtlich durch den Punkt A gehen, fällt auf der Stelle in die Augen und bedarf keiner weitern Erläuterung.

§. 11.

Indem wir jetzt zuvörderst wieder α_1 beliebig annehmen, wollen wir einen von dem Punkte (pq) ausgehenden Strahl betrachten, welcher der Axe der x parallel ist.

In diesem Falle ist offenbar

$$\sin\alpha=0,\ \cos\alpha=\pm1$$

und folglich nach §. 2., weil

*) Da nämlich in diesem Falle $(1-\mu^2).AC$ negativ ist.

$$\cos(\alpha+\Theta)=\cos\alpha\cos\Theta-\sin\alpha\sin\Theta=\pm\cos\Theta,$$
$$\sin(\alpha+\Theta)=\sin\alpha\cos\Theta+\cos\alpha\sin\Theta=\pm\sin\Theta$$

ist:

$$K_1=\pm(a_1-p),\ L_1=\mp(b_1-q);$$
$$\sin\Theta=\mp\frac{b_1-q}{R_1};$$
$$p_1=a_1\pm R_1\cos\Theta,\ q_1=q;$$
$$\pm\frac{\cos\alpha_1}{(\mu)}=1-\cos\Theta(\cos\Theta+\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}),$$
$$\mp\frac{\sin\alpha_1}{(\mu)}=\sin\Theta(\cos\Theta+\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2});$$

so dass also durch die folgenden Formeln, in denen die obern oder die untern Zeichen zu nehmen sind, jenachdem der von dem Punkte (pq) ausgehende Strahl von diesem Punkte an nach der Seite der positiven oder nach der Seite der negativen x hin gerichtet ist, die Lage des ausfallenden Strahls vollkommen bestimmt wird:

$$\sin\Theta=\mp\frac{b_1-q}{R_1};$$
$$p_1=a_1\pm R_1\cos\Theta,\ q_1=q;$$
$$\pm\frac{\cos\alpha_1}{(\mu)}=1-\cos\Theta(\cos\Theta+\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}),$$
$$\mp\frac{\sin\alpha_1}{(\mu)}=\sin\Theta(\cos\Theta+\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu_2\sin\Theta^2}).$$

Nach §. 3. ist also

$$\frac{x-a_1\mp R_1\cos\Theta}{1-\cos\Theta(\cos\Theta+\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2})}$$
$$=-\frac{y-q}{\sin\Theta(\cos\Theta+\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2})}$$

die Gleichung der durch den ausfallenden Strahl und seine Verlängerung über den Punkt $(p_1 q_1)$ hinaus dargestellten geraden Linie.

Bezeichnet nun Δ_1 die erste Coordinate des Durchschnittspunkts dieser geraden Linie mit der Axe der x; so haben wir zur Bestimmung von Δ_1 nach dem Vorhergehenden die Gleichung

$$\frac{\Delta_1-a_1\mp R_1\cos\Theta}{1-\cos\Theta(\cos\Theta+\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2})}$$
$$=\frac{q}{\sin\Theta(\cos\Theta+\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2})},$$

also nach dem Obigen

$$\frac{\Delta_1 - a_1 \mp R_1 \cos\Theta}{1-\cos\Theta(\cos\Theta + \frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta_2})}$$

$$= \mp \frac{qR_1}{(b_1 - q)(\cos\Theta + \frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2})},$$

woraus sich ohne Schwierigkeit

$$\Delta_1 - a_1 = \mp \frac{q - b_1 \cos\Theta(\cos\Theta + \frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2})}{(b_1 - q)(\cos\Theta + \frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2})} R_1$$

ergiebt. Multiplicirt man aber den Zähler und Nenner des Bruchs auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens mit

$$\cos\Theta - \frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2},$$

so erhält man

$$\Delta_1 - a_1 = \pm \frac{(1-\frac{1}{\mu^2})b_1\cos\Theta - q(\cos\Theta - \frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2})}{(1-\frac{1}{\mu^2})(b_1 - q)} R_1$$

oder

$$\Delta_1 - a_1 = \pm \frac{(1-\frac{1}{\mu})(1+\frac{1}{\mu})b_1\cos\Theta - q(\cos\Theta - \frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2})}{(1-\frac{1}{\mu})(1+\frac{1}{\mu})(b_1 - q)} R_1$$

Weil nach dem Obigen

$$\sin\Theta = \mp\frac{b_1 - q}{R_1},\ \cos\Theta = \sqrt{1-(\frac{b_1-q}{R_1})^2}$$

ist, so nähern sich, wenn q sich der Null nähert, $\sin\Theta$ und $\cos\Theta$ respective den Gränzen

$$\mp\frac{b_1}{R_1} \text{ und } \sqrt{1-(\frac{b_1}{R_1})^2}.$$

Bezeichnen wir nun die Gränze, welcher Δ_1 sich nähert, durch F_1, so ist nach dem Obigen, unter der Voraussetzung, dass b_1 nicht verschwindet,

$$F_1 - a_1 = \pm R_1\sqrt{1-(\frac{b_1}{R_1})^2},$$

also

$$F_1 = a_1 \pm R_1 \sqrt{1 - (\frac{b_1}{R_1})^2},$$

ein Ausdruck, der jedenfalls deshalb mit dem Namen eines merkwürdigen bezeichnet zu werden verdient, weil er von μ ganz unabhängig ist.

Für $b_1 = 0$ ist nach dem Obigen

$$\sin \Theta = \pm \frac{q}{R_1};$$

$$p_1 = a_1 \pm R_1 \cos \Theta,\ q_1 = q;$$

$$\pm \frac{\cos \alpha_1}{(\mu)} = 1 - \cos \Theta (\cos \Theta + \frac{1}{\mu} \sqrt{1 - \mu^2 \sin \Theta^2}),$$

$$\mp \frac{\sin \alpha_1}{(\mu)} = \sin \Theta (\cos \Theta + \frac{1}{\mu} \sqrt{1 - \mu^2 \sin \Theta^2})$$

und

$$\Delta_1 - a_1 = \pm \frac{R_1}{\cos \Theta + \frac{1}{\mu} \sqrt{1 - \mu^2 \sin \Theta^2}}$$

oder

$$\Delta_1 - a_1 = \pm \frac{R_1 (\cos \Theta - \frac{1}{\mu} \sqrt{1 - \mu^2 \sin \Theta^2})}{1 - \frac{1}{\mu^2}},$$

oder auch

$$\Delta_1 - a_1 = \pm \frac{R_1 (\cos \Theta - \frac{1}{\mu} \sqrt{1 - \mu^2 \sin \Theta^2})}{(1 - \frac{1}{\mu})(1 + \frac{1}{\mu})}.$$

Berechnet man den Hülfswinkel ω mittelst der Formel

$$\sin \omega = \mu \sin \Theta$$

und nimmt den absoluten Werth von ω nie grösser als 90°, so erhält man leicht

$$\Delta_1 - a_1 = \pm \frac{R_1 \sin \omega}{\sin (\omega + \Theta)}.$$

Führt man für $\sin \Theta$ und $\cos \Theta$ ihre Werthe ein, so erhält man

$$p_1 = a_1 \pm R_1 \sqrt{1 - \frac{q^2}{R_1^2}},\ q_1 = q;$$

$$\pm \frac{\cos \alpha_1}{(\mu)} = 1 - \sqrt{1 - \frac{q^2}{R_1^2}} . (\sqrt{1 - \frac{q^2}{R_1^2}} + \frac{1}{\mu} \sqrt{1 - \mu^2 \frac{q^2}{R_1^2}}),$$

$$\frac{\sin \alpha_1}{(\mu)} = - \frac{q}{R_1} (\sqrt{1 - \frac{q^2}{R_1^2}} + \frac{1}{\mu} \sqrt{1 - \mu^2 \frac{q^2}{R_1^2}})$$

und

$$\Delta_1 - a_1 = \pm \frac{\mu R_1}{\mu\sqrt{1-\frac{q^2}{R_1^2}} + \sqrt{1-\mu^2\frac{q^2}{R_1^2}}},$$

oder

$$\Delta_1 - a_1 = \pm \frac{R_1\left(\sqrt{1-\frac{q^2}{R_1^2}} - \frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\frac{q^2}{R_1^2}}\right)}{1-\frac{1}{\mu^2}},$$

oder auch

$$\Delta_1 - a_1 = \pm \frac{R_1\left(\sqrt{1-\frac{q^2}{R_1^2}} - \frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\frac{q^2}{R_1^2}}\right)}{(1-\frac{1}{\mu})(1+\frac{1}{\mu})}.$$

Ferner ergiebt sich in diesem Falle, wo $b_1 = 0$ ist, aus den obigen Formeln sogleich

$$F_1 - a_1 = \pm \frac{R_1}{1+\frac{1}{\mu}} \text{ oder } F_1 - a_1 = \pm \frac{\mu R_1}{1+\mu},$$

also

$$F_1 = a_1 \pm \frac{R_1}{1+\frac{1}{\mu}} \text{ oder } F_1 = a_1 \pm \frac{\mu R_1}{1+\mu}.$$

§. 12.

Für $F_1 = \Delta_1$ ist auch $F_1 - a_1 = \Delta_1 - a_1$, also nach dem vorhergehenden Paragraphen, wenn wir wieder $b_1 = 0$ setzen,

$$\pm \frac{\mu R_1}{1+\mu} = \pm \frac{\mu R_1}{\mu\sqrt{1-\frac{q^2}{R_1^2}} + \sqrt{1-\mu^2\frac{q^2}{R_1^2}}},$$

d. i.

$$1+\mu = \mu\sqrt{1-\frac{q^2}{R_1^2}} + \sqrt{1-\mu^2\frac{q^2}{R_1^2}},$$

und folglich, wie sich leicht ergiebt, wenn man auf beiden Seiten quadrirt:

$$1+\mu\frac{q^2}{R_1^2} = \sqrt{1-\frac{q^2}{R_1^2}} \cdot \sqrt{1-\mu^2\frac{q^2}{R_1^2}},$$

also, wenn man wieder auf beiden Seiten quadrirt,

$$(1+\mu)^2=0, \text{ folglich } \mu=-1.$$

Für $\mu=-1$ werden aber die obigen Ausdrücke von F_1-a_1 und Δ_1-a_1 beide $\mp\frac{R_1}{0}$, und man kann also eigentlich nicht sagen, dass die Gleichung $F_1-a_1=\Delta_1-a_1$ oder $F_1=\Delta_1$ für $\mu=-1$ erfüllt sei. Vielmehr ist dieselbe, wie leicht erhellet, nur dann erfüllt, wenn $\mu=0$ ist.

§. 13.

Es ist leicht zu zeigen, dass die beiden Grössen

$$1+\mu \text{ und } \mu\sqrt{1-\frac{q^2}{R_1^2}}+\sqrt{1-\mu^2\frac{q^2}{R_1^2}}$$

immer gleiche Vorzeichen haben.

Wenn nämlich zuvörderst μ positiv ist, so sind die Grössen

$$1+\mu \text{ und } \mu\sqrt{1-\frac{q^2}{R_1^2}}+\sqrt{1-\mu^2\frac{q^2}{R_1^2}}$$

offenbar beide positiv.

Wenn dagegen μ negativ ist, so hat man die drei folgenden Fälle zu unterscheiden.

1. Wenn $-\mu<1$ ist, so ist $1+\mu$ positiv. Weil nun ferner

$$(\mu\sqrt{1-\frac{q^2}{R_1^2}})^2=\mu^2-\mu^2\frac{q^2}{R_1^2},$$

$$(\sqrt{1-\mu^2\frac{q^2}{R_1^2}})^2=1-\mu^2\frac{q^2}{R_1^2}$$

und $\mu^2<1$ ist, so ist offenbar

$$\sqrt{1-\mu^2\frac{q^2}{R_1^2}}$$

grösser als der absolute Werth von

$$\mu\sqrt{1-\frac{q^2}{R_1^2}},$$

und folglich

$$\mu\sqrt{1-\frac{q^2}{R_1^2}}+\sqrt{1-\mu^2\frac{q^2}{R_1^2}}$$

positiv.

2. Wenn $-\mu>1$ ist, so ist $1+\mu$ negativ. Weil nun

er

$$(\mu\sqrt{1-\frac{q^2}{R_1^2}})^2=\mu^2-\mu^2\frac{q^2}{R_1^2},$$

$$(\sqrt{1-\mu^2\frac{q^2}{R_1^2}})^2=1-\mu^2\frac{q^2}{R_1^2}$$

und $\mu^2>1$ ist, so ist offenbar

$$\sqrt{1-\mu^2\frac{q^2}{R_1^2}}$$

kleiner als der absolute Werth von

$$\mu\sqrt{1-\frac{q^2}{R_1^2}},$$

und folglich

$$\mu\sqrt{1-\frac{q^2}{R_1^2}}+\sqrt{1-\mu^2\frac{q^2}{R_1^2}}$$

negativ.

3. Für $-\mu=1$ verschwinden die Grössen

$$1+\mu \text{ und } \mu\sqrt{1-\frac{q^2}{R_1^2}}+\sqrt{1-\mu^2\frac{q^2}{R_1^2}}$$

beide, und können daher auch in diesem Falle als einerlei Vorzeichen habend betrachtet werden.

Man sieht also, dass die Grössen

$$1+\mu \text{ und } \mu\sqrt{1-\frac{q^2}{R_1^2}}+\sqrt{1-\mu^2\frac{q^2}{R_1^2}}$$

immer gleiche Vorzeichen haben, woraus sich ferner unmittelbar ergiebt, dass auch die Grössen

$$\pm\frac{\mu R_1}{1+\mu} \text{ und } \pm\frac{\mu R_1}{\mu\sqrt{1-\frac{q^2}{R_1^2}}+\sqrt{1-\mu^2\frac{q^2}{R_1^2}}},$$

d. i. in §. 11. für $b_1=0$ die Grössen F_1-a_1 und Δ_1-a_1, immer gleiche Vorzeichen haben.

§. 14.

Wenn wir der Kürze wegen

$$V=\frac{1}{\mu\sqrt{1-\frac{q^2}{R_1^2}}+\sqrt{1-\mu^2\frac{q^2}{R_1^2}}}$$

setzen, so ist für $b_1=0$ nach §. 11.

$$F_1-a_1=\pm\frac{\mu R_1}{1+\mu},\ \Delta_1-a_1=\pm\mu R_1 V.$$

Um nun zu untersuchen, unter welchen Bedingungen, wenn r als gegeben oder constant, dagegen R_1 als veränderlich betrachtet wird, der absolute Werth der Differenz

$$U=(F_1-\alpha_1)-(\Delta_1-\alpha_1)=F_1-\Delta_1$$

ein Minimum oder ein Maximum wird, müssen wir vor allen Dingen den ersten Differentialquotienten von U^2 in Bezug auf R_1 als veränderliche Grösse entwickeln. Weil aber

$$\frac{d\,.\,U^2}{dR_1}=2U\frac{dU}{dR_1}$$

ist, so kommt es bloss auf die Entwickelung des ersten Differentialquotienten von U in Bezug auf R_1 als veränderliche Grösse an.

Nach dem Obigen ist

$$U=\pm\mu R_1\left(\frac{1}{1+\mu}-V\right),$$

und folglich

$$\frac{dU}{dR_1}=\pm\mu\left(\frac{1}{1+\mu}-V-R_1\frac{dV}{dR_1}\right).$$

Nun ist aber, wie man leicht findet,

$$\frac{d\sqrt{1-\frac{q^2}{R_1^2}}}{dR_1}=\frac{q^2}{R_1^3\sqrt{1-\frac{q^2}{R_1^2}}},$$

$$\frac{d\sqrt{1-\mu^2\frac{q^2}{R_1^2}}}{dR_1}=\frac{\mu^2q^2}{R_1^3\sqrt{1-\mu^2\frac{q^2}{R_1^2}}};$$

und folglich

$$\frac{dV}{dR_1}=-\frac{\mu q^2V}{R_1^3\sqrt{1-\frac{q^2}{R_1^2}}\,.\sqrt{1-\mu^2\frac{q^2}{R_1^2}}},$$

oder, wenn der Kürze wegen

$$\frac{q^2}{R_1^2}=x^2$$

gesetzt wird:

$$V=\frac{1}{\mu\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-\mu^2x^2}},$$

$$\frac{dV}{dR_1}=-\frac{\mu x^2V}{R_1\sqrt{1-x^2}\,.\sqrt{1-\mu^2x^2}}.$$

Also ist nach dem Obigen

$$\pm\frac{1}{\mu}\cdot\frac{dU}{dR_1}=\frac{1}{1+\mu}-\frac{1}{\mu\sqrt{1-z^2}+\sqrt{1-\mu^2z^2}}$$
$$+\frac{\mu z^2}{(\mu\sqrt{1-z^2}+\sqrt{1-\mu^2z^2}).\sqrt{1-z^2}.\sqrt{1-\mu^2z^2}}.$$

Um nun die Bedingungen aufzufinden, unter denen der absolute Werth von U ein Minimum oder ein Maximum wird, muss man bekanntlich

$$\frac{d.U^2}{dR_1}=0,$$

d. i. nach dem Obigen

$$2U\frac{dU}{dR_1}=0$$

setzen, eine Gleichung, welche für

$$U=0 \text{ und } \frac{dU}{dR_1}=0$$

erfüllt ist. Da aber die Gleichung $U=0$, wie aus §. 12. erhellet, zu $\mu=-1$ führt, in welchem Falle die Grössen F_1 und Δ_1 beide unendlich werden, so bleibt bloss die Gleichung

$$\frac{dU}{dR_1}=0,$$

d. i. die Gleichung

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{1}{1+\mu}-\dfrac{1}{\mu\sqrt{1-z^2}+\sqrt{1-\mu^2z^2}}\\ +\dfrac{\mu z^2}{(\mu\sqrt{1-z^2}+\sqrt{1-\mu^2z^2}).\sqrt{1-z^2}.\sqrt{1-\mu^2z^2}}\end{array}\right\}=0.$$

Multiplicirt man auf beiden Seiten dieser Gleichung mit

$$(1+\mu)(\mu\sqrt{1-z^2}+\sqrt{1-\mu^2z^2}).\sqrt{1-z^2}.\sqrt{1-\mu^2z^2},$$

so wird dieselbe

$$\mu(1-z^2)\sqrt{1-\mu^2z^2}+(1-\mu^2z^2)\sqrt{1-z^2}$$
$$=(1+\mu)(\sqrt{1-z^2}.\sqrt{1-\mu^2z^2}-\mu z^2),$$

und folglich, wenn man auf beiden Seiten quadrirt, nach einigen leichten Reductionen:

$$\mu(1+\mu)^2z^4+2(1-z^2)(1+\mu z^2)(1-\mu^2z^2)$$
$$=2(1+\mu z^2)^2\sqrt{1-z^2}.\sqrt{1-\mu^2z^2}.$$

Quadrirt man nun wieder auf beiden Seiten dieser Gleichung, so erhält man nach einigen leichten Reductionen die Gleichung

$$\mu^2(1+\mu)^2x^6 = 4(1-x^2)(1+\mu x^2)(1-\mu^2x^2)$$

oder

$$\mu^2(1+\mu)^2x^6 - 4(1-x^2)(1+\mu x^2)(1-\mu^2x^2) = 0,$$

oder

$$\left.\begin{array}{r} \mu^2(1-\mu)^2x^6 \\ +4\mu(1-\mu+\mu^2)x^4 \\ +4(1-\mu+\mu^2)x^2 \\ -4 \end{array}\right\} = 0,$$

oder auch, insofern $1-\mu$ nicht verschwindet:

$$\left.\begin{array}{r} x^6 + \dfrac{4(1-\mu+\mu^2)}{\mu(1-\mu)^2}x^4 \\ + \dfrac{4(1-\mu+\mu^2)}{\mu^2(1-\mu)^2}x^2 \\ - \dfrac{4}{\mu^2(1-\mu)^2} \end{array}\right\} = 0.$$

Setzt man, um aus dieser Gleichung das zweite Glied wegzuschaffen,

$$x^2 = t - \frac{4(1-\mu+\mu^2)}{3\mu(1-\mu)^2},$$

so erhält man zur Bestimmung von t die Gleichung

$$\left.\begin{array}{r} t^3 - \frac{4}{3}\cdot\dfrac{(1+\mu)^2(1-\mu+\mu^2)}{\mu^2(1-\mu)^4}t \\ - \frac{4}{27}\cdot\dfrac{4(1-10\mu+\mu^2)(1-\mu+\mu^2)^2+27\mu(1-\mu)^4}{\mu^3(1-\mu)^6} \end{array}\right\} = 0.$$

Es ist nun noch nöthig, den zweiten Differentialquotienten von U^2 in Bezug auf R_1 als veränderliche Grösse zu entwickeln. Weil aber

$$\frac{d.U^2}{dR_1} = 2U\frac{dU}{dR_1},$$

also

$$\frac{d^2.U^2}{dR_1^2} = 2U\frac{d^2U}{dR_1^2} + 2\left(\frac{dU}{dR_1}\right)^2$$

ist, und

$$\frac{dU}{dR_1} = 0$$

gesetzt worden ist, so braucht man bloss

$$\frac{d^2U}{dR_1^2}$$

zu entwickeln. Nach dem Obigen ist

$$\frac{dU}{dR_1} = \pm\mu\left(\frac{1}{1+\mu} - V - R_1\frac{dV}{dR_1}\right),$$

und folglich

$$\frac{d^2U}{dR_1^2} = \mp\mu\left(2\frac{dV}{dR_1} + R_1\frac{d^2V}{dR_1^2}\right),$$

so dass es also, da

$$\frac{dV}{dR_1}$$

aus dem Obigen bekannt ist, bloss noch auf die Entwickelung von

$$\frac{d^2V}{dR_1^2}$$

ankommt. Weil nun nach dem Obigen

$$R_1^3\sqrt{1-\frac{q^2}{R_1^2}}\cdot\sqrt{1-\mu^2\frac{q^2}{R_1^2}}\cdot\frac{dV}{dR_1} = -\mu q^2 V$$

ist, so ist, wie man hieraus leicht findet,

$$R_1^3\sqrt{1-\frac{q^2}{R_1^2}}\cdot\sqrt{1-\mu^2\frac{q^2}{R_1^2}}\cdot\frac{d^2V}{dR_1^2}$$

$$= \frac{\mu q^2 V}{R_1}\left(3 + \frac{q^2}{R_1^2-q^2} + \frac{\mu^2q^2}{R_1^2-\mu^2q^2}\right) - \mu q^2\frac{dV}{dR_1},$$

also

$$\frac{d^2V}{dR_1^2} =$$

$$-R_1^{-1}\left(3 + \frac{q^2}{R_1^2-q^2} + \frac{\mu^2q^2}{R_1^2-\mu^2q^2}\right)\frac{dV}{dR_1} + V^{-1}\left(\frac{dV}{dR_1}\right)^2$$

oder

$$\frac{d^2V}{dR_1^2} = -R_1^{-1}\left(3 + \frac{z^2}{1-z^2} + \frac{\mu^2z^2}{1-\mu^2z^2}\right)\frac{dV}{dR_1} + V^{-1}\left(\frac{dV}{dR_1}\right)^2.$$

Setzt man der Kürze wegen

$$W = -\frac{\mu z^2 V}{\sqrt{1-z^2}\cdot\sqrt{1-\mu^2z^2}},$$

so ist

$$\frac{dV}{dR_1} = R_1^{-1}W \text{ oder } R_1\frac{dV}{dR_1} = W,$$

und folglich nach dem Vorhergehenden, wie man leicht findet,

$$R_1^2\frac{d^2V}{dR_1^2} = -W\left(3 + \frac{z^2}{1-z^2} + \frac{\mu^2z^2}{1-\mu^2z^2} - \frac{W}{V}\right).$$

Weil nun nach dem Obigen

$$\frac{d^2U}{dR_1^2} = \mp \mu(2\frac{dV}{dR_1} + R_1\frac{d^2V}{dR_1^2})$$

ist, so ist

$$R_1\frac{d^2U}{dR_1^2} = \pm \mu W(1 + \frac{z^2}{1-z^2} + \frac{\mu^2 z^2}{1-\mu^2 z^2} - \frac{W}{V}).$$

Da aber bekanntlich

$$U = \pm \mu R_1(\frac{1}{1+\mu} - V)$$

und

$$\frac{d^2 . U^2}{dR_1^2} = 2U\frac{d^2U}{dR_1^2}$$

ist, so wird man bei der Berechnung des zweiten Differentialquotienten von U^2 sich am besten an die folgenden Formeln halten:

$$V = \frac{1}{\mu\sqrt{1-z^2} + \sqrt{1-\mu^2 z^2}},$$

$$W = -\frac{\mu z^2 V}{\sqrt{1-z^2} . \sqrt{1-\mu^2 z^2}}$$

und

$$\frac{d^2 . U^2}{dR_1^2} =$$

$$2\mu^2 W(\frac{1}{1+\mu} - V)(1 + \frac{z^2}{1-z^2} + \frac{\mu^2 z^2}{1-\mu^2 z^2} - \frac{W}{V}).$$

§. 15.

Wenn, indem λ eine gegebene Zahl bezeichnet,

$$F_1 - \Delta_1 = \lambda R_1$$

sein soll, so haben wir nach dem Obigen die Gleichung

$$\pm \mu R_1(\frac{1}{1+\mu} - \frac{1}{\mu\sqrt{1-z^2} + \sqrt{1-\mu^2 z^2}}) = \lambda R_1,$$

wo z seine bekannte Bedeutung hat, also, wie man leicht findet, wenn der Kürze wegen

$$k = \frac{\mu(1+\mu)}{\mu \mp \lambda(1+\mu)}$$

gesetzt wird,

$$\mu\sqrt{1-z^2} + \sqrt{1-\mu^2 z^2} = k.$$

Quadrirt man nun auf beiden Seiten dieser Gleichung, so ergiebt sich

$$2\mu\sqrt{1-x^2}.\sqrt{1-\mu^2x^2}=k^2-\mu^2-1+2\mu^2x^2,$$

und folglich, wenn man jetzt wieder auf beiden Seiten quadrirt, nach einigen leichten Reductionen:

$$x^2=\frac{4\mu^2-(k^2-\mu^2-1)^2}{4\mu^2k^2}$$

oder

$$x^2=\frac{\{(1+\mu)^2-k^2\}\{k^2-(1-\mu)^2\}}{4\mu^2k^2},$$

oder auch

$$x^2=-\frac{(k+\mu+1)(k+\mu-1)(k-\mu+1)(k-\mu-1)}{4\mu^2k^2}.$$

Hat man mittelst dieser Formel x^2 gefunden, so ergiebt sich auch q^2 mittelst der Formel

$$q^2=x^2R_1{}^2.$$

§. 16.

Wir wollen nun noch die wichtigsten der im Obigen gefundenen Formeln in Reihen entwickeln, und werden dabei die Binomialcoefficienten für den Exponenten m wie gewöhnlich durch

$$m_1,\ m_2,\ m_3,\ m_4,\ m_5,\ \ldots.$$

bezeichnen.

Dies vorausgesetzt, wollen wir nun zuerst

$$\sin\Theta=\frac{a_1-\Delta}{R_1}\sin\alpha$$

setzen. Dann ist

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\Theta)&=\sin\alpha\cos\Theta+\cos\alpha\sin\Theta\\&=\sin\alpha\sqrt{1-\sin\Theta^2}+\cos\alpha\sin\Theta\\&=\sin\alpha\left\{\begin{aligned}1+\frac{a_1-\Delta}{R_1}\cos\alpha&-(\tfrac{1}{2})_1\sin\Theta^2\\&+(\tfrac{1}{2})_2\sin\Theta^4\\&-(\tfrac{1}{2})_3\sin\Theta^6\\&+(\tfrac{1}{2})_4\sin\Theta^8\\&-\ldots\ldots\end{aligned}\right\},\end{aligned}$$

und folglich

$$\frac{\sin(\alpha+\Theta)}{\sin\alpha} = 1 + \frac{a_1-\Delta}{R_1}\cos\alpha - (\tfrac{1}{2})_1 \sin\Theta^2 + (\tfrac{1}{2})_2 \sin\Theta^4 - (\tfrac{1}{2})_3 \sin\Theta^6 + (\tfrac{1}{2})_4 \sin\Theta^8 - \dots$$

er ist, wenn wir im Folgenden der Kürze wegen

$$\Omega = \cos\Theta + \frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2 \sin\Theta^2}$$

$$\Omega = \sqrt{1-\sin\Theta^2} + \frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2 \sin\Theta^2}$$

n, wie man leicht findet:

$$\Omega = 1 + \frac{1}{\mu} - (\tfrac{1}{2})_1 (1+\mu)\sin\Theta^2 + (\tfrac{1}{2})_2 (1+\mu^3)\sin\Theta^4 - (\tfrac{1}{2})_3 (1+\mu^5)\sin\Theta^6 + (\tfrac{1}{2})_4 (1+\mu^7)\sin\Theta^8 - \dots$$

ist

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(\alpha+\Theta)}{\sin\alpha} = {} & (1+\frac{1}{\mu})(1+\frac{a_1-\Delta}{R_1}\cos\alpha) \\
& - \left\{ \begin{array}{l} (\tfrac{1}{2})_1 (1+\mu)(1+\frac{a_1-\Delta}{R_1}\cos\alpha) \\ + (\tfrac{1}{2})_1 (1+\frac{1}{\mu}) \end{array} \right\} \sin\Theta^2 \\
& + \left\{ \begin{array}{l} (\tfrac{1}{2})_2 (1+\mu^3)(1+\frac{a_1-\Delta}{R_1}\cos\alpha) \\ + (\tfrac{1}{2})_1 (\tfrac{1}{2})_1 (1+\mu) \\ + (\tfrac{1}{2})_2 (1+\frac{1}{\mu}) \end{array} \right\} \sin\Theta^4 \\
& - \left\{ \begin{array}{l} (\tfrac{1}{2})_3 (1+\mu^5)(1+\frac{a_1-\Delta}{R_1}\cos\alpha) \\ + (\tfrac{1}{2})_1 (\tfrac{1}{2})_2 (1+\mu^3) \\ + (\tfrac{1}{2})_2 (\tfrac{1}{2})_1 (1+\mu) \\ + (\tfrac{1}{2})_3 (1+\frac{1}{\mu}) \end{array} \right\} \sin\Theta^6 \\
& + \dots
\end{aligned}$$

in allgemeines Glied dieser Reihe ist

$$(-1)^n \left\{\begin{array}{l} (\frac{1}{2})_n (1+\mu^{2n-1})(1+\frac{a_1-\Delta}{R_1}\cos\alpha) \\ +(\frac{1}{2})_1 (\frac{1}{2})_{n-1} (1+\mu^{2n-3}) \\ +(\frac{1}{2})_2 (\frac{1}{2})_{n-2} (1+\mu^{2n-5}) \\ \quad \text{u. s. w.} \\ +(\frac{1}{2})_{n-1} (\frac{1}{2})_1 (1+\mu) \\ +(\frac{1}{2})_n (1+\frac{1}{\mu}) \end{array}\right\} \sin\Theta^{2n}.$$

Nach einem sehr bekannten Satze von den Binomialcoefficienten i[st] aber, wie man leicht finden wird, für $n>1$:

$$(\tfrac{1}{2})_n + (\tfrac{1}{2})_1 (\tfrac{1}{2})_{n-1} + (\tfrac{1}{2})_2 (\tfrac{1}{2})_{n-2} + \ldots + (\tfrac{1}{2})_{n-1} (\tfrac{1}{2})_1 + (\tfrac{1}{2})_n = 0,$$

und das obige allgemeine Glied lässt sich also für $n>1$, wen[n] man unter dieser Voraussetzung der Kürze wegen

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{K}_n = \frac{1}{\mu}\{(\frac{1}{2})_n + (\frac{1}{2})_{n-1} (\frac{1}{2})_1 \mu^2 \\ \qquad + (\frac{1}{2})_{n-2} (\frac{1}{2})_2 \mu^4 \\ \qquad\quad \text{u. s. w.} \\ \qquad + (\frac{1}{2})_1 (\frac{1}{2})_{n-1} \mu^{2n-2} \\ \qquad + (\frac{1}{2})_n \mu^{2n} \end{array}\right\}$$

setzt, auch auf den folgenden Ausdruck bringen:

$$(-1)^n \{\mathfrak{K}_n + (\tfrac{1}{2})_n (1+\mu^{2n-1}) \frac{a_1-\Delta}{R_1} \cos\alpha\} \sin\Theta^{2n}.$$

Setzt man nun noch der Kürze wegen

$$\mathfrak{K}_1 = (\tfrac{1}{2})_1 (1+\mu)(1+\frac{1}{\mu}),$$

so erhält man nach dem Obigen für

$$\Omega \frac{\sin(\alpha+\Theta)}{\sin\alpha}$$

folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} &\Omega \frac{\sin(\alpha+\Theta)}{\sin\alpha} \\ &= (1+\frac{1}{\mu})(1+\frac{a_1-\Delta}{R_1}\cos\alpha) \\ &- \{\mathfrak{K}_1 + (\tfrac{1}{2})_1 (1+\mu) \frac{a_1-\Delta}{R_1} \cos\alpha\} \sin\Theta^2 \\ &+ \{\mathfrak{K}_2 + (\tfrac{1}{2})_2 (1+\mu^3) \frac{a_1-\Delta}{R_1} \cos\alpha\} \sin\Theta^4 \\ &- \{\mathfrak{K}_3 + (\tfrac{1}{2})_3 (1+\mu^5) \frac{a_1-\Delta}{R_1} \cos\alpha\} \sin\Theta^6 \\ &+ \{\mathfrak{K}_4 + (\tfrac{1}{2})_4 (1+\mu^7) \frac{a_1-\Delta}{R_1} \cos\alpha\} \sin\Theta^8 \\ &- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

lglich nach §. 3.

$$\frac{a_1-\Delta}{a_1-\Delta_1}$$

$$=1-(1+\frac{1}{\mu})(1+\frac{a_1-\Delta}{R_1}\cos\alpha)$$

$$+\{\mathfrak{K}_1+(\tfrac{1}{2})_1(1+\mu)\frac{a_1-\Delta}{R_1}\cos\alpha\}\sin\Theta^2$$

$$-\{\mathfrak{K}_2+(\tfrac{1}{2})_2(1+\mu^3)\frac{a_1-\Delta}{R_1}\cos\alpha\}\sin\Theta^4$$

$$+\{\mathfrak{K}_3+(\tfrac{1}{2})_3(1+\mu^5)\frac{a_1-\Delta}{R_1}\cos\alpha\}\sin\Theta^6$$

$$-\{\mathfrak{K}_4+(\tfrac{1}{2})_4(1+\mu^7)\frac{a_1-\Delta}{R_1}\cos\alpha\}\sin\Theta^8$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{a_1-\Delta}{a_1-\Delta_1}$$

$$=1-(1+\frac{1}{\mu})(1+\frac{a_1-\Delta}{R_1}\cos\alpha)$$

$$+\{\mathfrak{K}_1+(\tfrac{1}{2})_1(1+\mu)\frac{a_1-\Delta}{R_1}\cos\alpha\}(\frac{a_1-\Delta}{R_1})^2\sin\alpha^2$$

$$-\{\mathfrak{K}_2+(\tfrac{1}{2})_2(1+\mu^3)\frac{a_1-\Delta}{R_1}\cos\alpha\}(\frac{a_1-\Delta}{R_1})^4\sin\alpha^4$$

$$+\{\mathfrak{K}_3+(\tfrac{1}{2})_3(1+\mu^5)\frac{a_1-\Delta}{R_1}\cos\alpha\}(\frac{a_1-\Delta}{R_1})^6\sin\alpha^6$$

$$-\{\mathfrak{K}_4+(\tfrac{1}{2})_4(1+\mu^7)\frac{a_1-\Delta}{R_1}\cos\alpha\}(\frac{a_1-\Delta}{R_1})^8\sin\alpha^8$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

l nun aber

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \pm\sqrt{1-\sin\alpha^2}\\ &= \pm 1 \mp (\tfrac{1}{2})_1 \sin\alpha^2\\ &\quad \pm (\tfrac{1}{2})_2 \sin\alpha^4\\ &\quad \mp (\tfrac{1}{2})_3 \sin\alpha^6\\ &\quad \pm \ldots\ldots\end{aligned}$$

l, so ist, wie man leicht findet:

$$\frac{a_1-\Delta}{a_1-\Delta_1}$$

$$=1-(1+\frac{1}{\mu})(1\pm\frac{a_1-\Delta}{R_1})$$

$$\pm \frac{a_1-\Delta}{R_1} \left\{ \begin{array}{c} (\tfrac{1}{2})_1 (1+\frac{1}{\mu}) \\ + (\tfrac{1}{2})_1 (1+\mu)(\frac{a_1-\Delta}{R_1})^2 \\ \pm \mathfrak{R}_1 \frac{a_1-\Delta}{R_1} \end{array} \right\} \sin \alpha^2$$

$$\mp \frac{a_1-\Delta}{R_1} \left\{ \begin{array}{c} (\tfrac{1}{2})_2 (1+\frac{1}{\mu}) \\ + (\tfrac{1}{2})_1 (\tfrac{1}{2})_1 (1+\mu) (\frac{a_1-\Delta}{R_1})^2 \\ + (\tfrac{1}{2})_2 (1+\mu^3) (\frac{a_1-\Delta}{R_1})^4 \\ \pm \mathfrak{R}_2 (\frac{a_1-\Delta}{R_1})^3 \end{array} \right\} \sin \alpha^4$$

$$\pm \frac{a_1-\Delta}{R_1} \left\{ \begin{array}{c} (\tfrac{1}{2})_3 (1+\frac{1}{\mu}) \\ + (\tfrac{1}{2})_1 (\tfrac{1}{2})_2 (1+\mu)(\frac{a_1-\Delta}{R_1})^2 \\ + (\tfrac{1}{2})_2 (\tfrac{1}{2})_1 (1+\mu^3)(\frac{a_1-\Delta}{R_1})^4 \\ + (\tfrac{1}{2})_3 (1+\mu^5) (\frac{a_1-\Delta}{R_1})^6 \\ \pm \mathfrak{R}_3 (\frac{a_1-\Delta}{R_1})^5 \end{array} \right\} \sin \alpha^6$$

$$\mp \frac{a_1-\Delta}{R_1} \left\{ \begin{array}{c} (\tfrac{1}{2})_4 (1+\frac{1}{\mu}) \\ + (\tfrac{1}{2})_1 (\tfrac{1}{2})_3 (1+\mu) (\frac{a_1-\Delta}{R_1})^2 \\ + (\tfrac{1}{2})_2 (\tfrac{1}{2})_2 (1+\mu^3)(\frac{a_1-\Delta}{R_1})^4 \\ + (\tfrac{1}{2})_3 (\tfrac{1}{2})_1 (1+\mu^5) (\frac{a_1-\Delta}{R_1})^6 \\ + (\tfrac{1}{2})_4 (1+\mu^7) (\frac{a_1-\Delta}{R_1})^8 \\ \pm \mathfrak{R}_4 (\frac{a_1-\Delta}{R_1})^7 \end{array} \right\} \sin \alpha^8$$

$\pm \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Ueber die durch

$$\mathfrak{R}_1,\ \mathfrak{R}_2,\ \mathfrak{R}_3,\ \mathfrak{R}_4,\ \mathfrak{R}_5,\ \ldots.$$

chneten Grössen wollen wir noch bemerken, dass, wie leichte Rechnung findet:

$$\mathfrak{K}_1 = \frac{(1+\mu)^2}{2\mu},$$
$$\mathfrak{K}_2 = -\frac{(1-\mu^2)^2}{8\mu},$$
$$\mathfrak{K}_3 = \frac{(1-\mu^2)^2(1+\mu^2)}{16\mu},$$
$$\mathfrak{K}_4 = -\frac{(1-\mu^2)^2(5+6\mu^2+5\mu^4)}{128\mu},$$
$$\mathfrak{K}_5 = \frac{(1-\mu^2)^2(1+\mu^2)(7+2\mu^2+7\mu^4)}{256\mu}$$

ist, und man wird leicht ähnliche Ausdrücke auch für die folgenden Coefficienten finden können.

Für $\mu = 1$ ist $\mathfrak{K}_1 = 2$, und, wie leicht aus dem angeführten Satze von den Binomialcoefficienten geschlossen wird,

$$\mathfrak{K}_2 = \mathfrak{K}_3 = \mathfrak{K}_4 = \mathfrak{K}_5 = \ldots = 0,$$

also für $\mu = 1$ nach dem Obigen:

$$\begin{aligned}
&\frac{a_1 - \Delta}{a_1 - \Delta_1} \\
&= 1 - 2\left(1 \pm \frac{a_1 - \Delta}{R_1}\right) \\
&\quad \pm \frac{a_1 - \Delta}{R_1}\left(1 \pm \frac{a_1 - \Delta}{R_1}\right)^2 \sin\alpha^2 \\
&\quad \mp 2\frac{a_1 - \Delta}{R_1}\left\{(\tfrac{1}{2})_2 + (\tfrac{1}{2})_1(\tfrac{1}{2})_1\left(\frac{a_1 - \Delta}{R_1}\right)^2 + (\tfrac{1}{2})_2\left(\frac{a_1 - \Delta}{R_1}\right)^4\right\}\sin\alpha^4 \\
&\quad \pm 2\frac{a_1 - \Delta}{R_1}\left\{(\tfrac{1}{2})_3 + (\tfrac{1}{2})_1(\tfrac{1}{2})_2\left(\frac{a_1 - \Delta}{R_1}\right)^2 + (\tfrac{1}{2})_2(\tfrac{1}{2})_1\left(\frac{a_1 - \Delta}{R_1}\right)^4 + (\tfrac{1}{2})_3\left(\frac{a_1 - \Delta}{R_1}\right)^6\right\}\sin\alpha^6 \\
&\quad \mp 2\frac{a_1 - \Delta}{R_1}\left\{(\tfrac{1}{2})_4 + (\tfrac{1}{2})_1(\tfrac{1}{2})_3\left(\frac{a_1 - \Delta}{R_1}\right)^2 + (\tfrac{1}{2})_2(\tfrac{1}{2})_2\left(\frac{a_1 - \Delta}{R_1}\right)^4 + (\tfrac{1}{2})_3(\tfrac{1}{2})_1\left(\frac{a_1 - \Delta}{R_1}\right)^6 + (\tfrac{1}{2})_4\left(\frac{a_1 - \Delta}{R_1}\right)^8\right\}\sin\alpha^8 \\
&\quad \pm \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

oder auch

$$\frac{a_1 - \Delta}{a_1 - \Delta_1}$$

$$= 1 - 2\left(1 \pm \frac{a_1 - \Delta}{R_1}\right)$$

$$\pm \frac{a_1 - \Delta}{R_1}\left(1 \pm \frac{a_1 - \Delta}{R_1}\right)^2 \sin \alpha^2$$

$$\pm \frac{1}{4}\cdot\frac{a_1 - \Delta}{R_1}\left(1 - \frac{a_1 - \Delta}{R_1}\right)^2\left(1 + \frac{a_1 - \Delta}{R_1}\right)^2 \sin \alpha^4$$

$$\pm \frac{1}{8}\cdot\frac{a_1 - \Delta}{R_1}\left(1 - \frac{a_1 - \Delta}{R_1}\right)^2\left(1 + \frac{a_1 - \Delta}{R_1}\right)^2\left\{1 + \left(\frac{a_1 - \Delta}{R_1}\right)^2\right\} \sin \alpha^6$$

$$\pm \frac{1}{64}\cdot\frac{a_1 - \Delta}{R_1}\left(1 - \frac{a_1 - \Delta}{R_1}\right)^2\left(1 + \frac{a_1 - \Delta}{R_1}\right)^2\left\{5 + 6\left(\frac{a_1 - \Delta}{R_1}\right)^2 + 5\left(\frac{a_1 - \Delta}{R_1}\right)^4\right\} \sin \alpha^8$$

$$\pm \frac{1}{128}\cdot\frac{a_1 - \Delta}{R_1}\left(1 - \frac{a_1 - \Delta}{R_1}\right)^2\left(1 + \frac{a_1 - \Delta}{R_1}\right)^2\left\{1 + \left(\frac{a_1 - \Delta}{R_1}\right)^2\right\}\left\{7 + 2\left(\frac{a_1 - \Delta}{R_1}\right)^2 + 7\left(\frac{a_1 - \Delta}{R_1}\right)^4\right\} \sin \alpha^{10}$$

$$\pm \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Wenn man

$$\sin \Theta = \frac{a_1 - \Delta}{R_1} \sin \alpha$$

und

$$\cos \alpha = \pm 1 \mp (\tfrac{1}{2})_1 \sin \alpha^2 \pm (\tfrac{1}{2})_2 \sin \alpha^4 \mp (\tfrac{1}{2})_3 \sin \alpha^6 \pm \ldots\ldots$$

setzt, so ergiebt sich aus der oben für

$$\frac{\sin(\alpha+\Theta)}{\sin\alpha}$$

gefundenen Reihe leicht:

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(\alpha+\Theta)}{\sin\alpha} = \; & 1 \pm \frac{a_1-\Delta}{R_1} \\
& \mp (\tfrac{1}{2})_1 \frac{a_1-\Delta}{R_1} \left\{1 \pm \frac{a_1-\Delta}{R_1}\right\} \sin\alpha^2 \\
& \pm (\tfrac{1}{2})_2 \frac{a_1-\Delta}{R_1} \left\{1 \pm \left(\frac{a_1-\Delta}{R_1}\right)^3\right\} \sin\alpha^4 \\
& \mp (\tfrac{1}{2})_3 \frac{a_1-\Delta}{R_1} \left\{1 \pm \left(\frac{a_1-\Delta}{R_1}\right)^5\right\} \sin\alpha^6 \\
& \pm (\tfrac{1}{2})_4 \frac{a_1-\Delta}{R_1} \left\{1 \pm \left(\frac{a_1-\Delta}{R_1}\right)^7\right\} \sin\alpha^8 \\
& \mp \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

und hieraus mit Hülfe des schon mehrmals angewandten Satzes von den Binomialcoefficienten

$$\frac{\sin(\alpha+\Theta)}{\sin\alpha}\cos\alpha = \sin(\alpha+\Theta)\cot\alpha$$

$$\begin{aligned}
= & \pm \left(1 \pm \frac{a_1-\Delta}{R_1}\right) \\
& \mp (\tfrac{1}{2})_1 \left(1 \pm \frac{a_1-\Delta}{R_1}\right)^2 \sin\alpha^2 \\
& \pm \left\{(\tfrac{1}{2})_2 + (\tfrac{1}{2})_1 (\tfrac{1}{2})_1 \left(\frac{a_1-\Delta}{R_1}\right)^2 + (\tfrac{1}{2})_2 \left(\frac{a_1-\Delta}{R_1}\right)^4\right\} \sin\alpha^4 \\
& \mp \left\{(\tfrac{1}{2})_3 + (\tfrac{1}{2})_1 (\tfrac{1}{2})_2 \left(\frac{a_1-\Delta}{R_1}\right)^2 + (\tfrac{1}{2})_2 (\tfrac{1}{2})_1 \left(\frac{a_1-\Delta}{R_1}\right)^4 + (\tfrac{1}{2})_3 \left(\frac{a_1-\Delta}{R_1}\right)^6\right\} \sin\alpha^6 \\
& \pm \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Weil nun nach §. 4. bekanntlich

$$p_1 = \Delta + R_1 \sin(\alpha+\Theta)\cot\alpha,$$
$$q_1 = R_1 \sin(\alpha+\Theta)$$

oder

$$\frac{p_1-\Delta}{R_1} = \sin(\alpha+\Theta)\cot\alpha,$$
$$\frac{q_1}{R_1} = \sin(\alpha+\Theta)$$

, so ist nach dem Vorhergehenden

$$\frac{p_1 - \Delta}{R_1} =$$

$$\pm (1 \pm \frac{a_1 - \Delta}{R_1})$$

$$\mp (\tfrac{1}{2})_1 \, (1 \pm \frac{a_1 - \Delta}{R_1})^2 \sin \alpha^2$$

$$\pm \{(\tfrac{1}{2})_2 + (\tfrac{1}{2})_1 (\tfrac{1}{2})_1 (\frac{a_1 - \Delta}{R_1})^2 + (\tfrac{1}{2})_2 (\frac{a_1 - \Delta}{R_1})^4\} \sin \alpha^4$$

$$\mp \{(\tfrac{1}{2})_3 + (\tfrac{1}{2})_1 (\tfrac{1}{2})_2 (\frac{a_1 - \Delta}{R_1})^2 + (\tfrac{1}{2})_2 (\tfrac{1}{2})_1 (\frac{a_1 - \Delta}{R_1})^4 + (\tfrac{1}{2})_3 (\frac{a_1 - \Delta}{R_1})^6\} \sin \alpha^6$$

$$\pm \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

und

$$\frac{q_1}{R_1} = (1 \pm \frac{a_1 - \Delta}{R_1}) \sin \alpha$$

$$\mp (\tfrac{1}{2})_1 \frac{a_1 - \Delta}{R_1} \{1 \pm \frac{a_1 - \Delta}{R_1}\} \sin \alpha^3$$

$$\pm (\tfrac{1}{2})_2 \frac{a_1 - \Delta}{R_1} \{1 \pm (\frac{a_1 - \Delta}{R_1})^3\} \sin \alpha^5$$

$$\mp (\tfrac{1}{2})_3 \frac{a_1 - \Delta}{R_1} \{1 \pm (\frac{a_1 - \Delta}{R_1})^5\} \sin \alpha^7$$

$$\pm (\tfrac{1}{2})_4 \frac{a_1 - \Delta}{R_1} \{1 \pm (\frac{a_1 - \Delta}{R_1})^7\} \sin \alpha^9$$

$$\mp \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Weil nach §. 5.

$$\sin \alpha_1 = (\mu) \frac{a_1 - \Delta}{a_1 - \Delta_1} \sin \alpha$$

ist, so braucht man die oben für

$$\frac{a_1 - \Delta}{a_1 - \Delta_1}$$

gefundene Reihe nur mit $(\mu) \sin \alpha$ zu multipliciren, um auf der Stelle eine nach den ungeraden Potenzen von $\sin \alpha$ fortschreitende Reihe für $\sin \alpha_1$ zu erhalten. Die Reihe für $\cos \alpha_1$ mag, als weniger wichtig, und weil ihre Entwickelung nicht ohne einige Weitläufigkeit möglich ist, der Kürze wegen für jetzt hier übergangen werden.

§. 17.

Wir wollen nun noch den Fall besonders betrachten, wenn der einfallende Strahl der Axe der x parallel ist. In diesem Falle ist, wenn wir die in §. 11. eingeführten Bezeichnungen beibehalten, und immer $b_1 = 0$ setzen:

$$\sin\Theta = \pm\frac{q}{R_1}$$

$$\Delta_1 - \alpha_1 = \pm\frac{R_1(\cos\Theta - \frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2})}{1-\frac{1}{\mu^2}},$$

ie obern oder untern Zeichen zu nehmen sind, jenachdem der lende Strahl von seinem Ausgangspunkte an nach der Seite ositiven x, oder nach der Seite der negativen x hin gerich-.

ntwickeln wir nun, indem wir $\cos\Theta = \sqrt{1-\sin\Theta^2}$ setzen, ähler des vorstehenden Bruchs nach den Potenzen von $\sin\Theta$, alten wir:

$$\Delta_1 = \alpha_1 \mp \frac{\mu^2}{1-\mu^2} R_1 \left\{ \begin{array}{l} 1 - \frac{1}{\mu} - (\frac{1}{2})_1 (1-\mu) \sin\Theta^2 \\ + (\frac{1}{2})_2 (1-\mu^3) \sin\Theta^4 \\ - (\frac{1}{2})_3 (1-\mu^5) \sin\Theta^6 \\ + (\frac{1}{2})_4 (1-\mu^7) \sin\Theta^8 \\ - \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right\},$$

$$\Delta_1 = \alpha_1 \mp \frac{\mu^2}{1-\mu^2} R_1 \left\{ \begin{array}{l} 1 - \frac{1}{\mu} - (\frac{1}{2})_1 (1-\mu) (\frac{q}{R_1})^2 \\ + (\frac{1}{2})_2 (1-\mu^3) (\frac{q}{R_1})^4 \\ - (\frac{1}{2})_3 (1-\mu^5) (\frac{q}{R_1})^6 \\ + (\frac{1}{2})_4 (1-\mu^7) (\frac{q}{R_1})^8 \\ - \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right\}.$$

r ist nach §. 11.

$$\mp\frac{\sin\alpha_1}{(\mu)} = \sin\Theta(\cos\Theta + \frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}),$$

olglich, wie man leicht findet:

$$\mp\sin\alpha_1 = (\mu) \left\{ \begin{array}{l} (1+\frac{1}{\mu})\sin\Theta - (\frac{1}{2})_1 (1+\mu) \sin\Theta^3 \\ + (\frac{1}{2})_2 (1+\mu^3) \sin\Theta^5 \\ - (\frac{1}{2})_3 (1+\mu^5) \sin\Theta^7 \\ + (\frac{1}{2})_4 (1+\mu^7) \sin\Theta^9 \\ - \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right\}.$$

oder

$$\sin\alpha_1 = -(\mu)\left\{\begin{array}{l}(1+\frac{1}{\mu})\frac{q}{R_1} - (\tfrac{1}{2})_1(1+\mu)(\frac{q}{R_1})^3 \\ \qquad + (\tfrac{1}{2})_2(1+\mu^3)(\frac{q}{R_1})^5 \\ \qquad - (\tfrac{1}{2})_3(1+\mu^5)(\frac{q}{R_1})^7 \\ \qquad + (\tfrac{1}{2})_4(1+\mu^7)(\frac{q}{R_1})^9 \\ \qquad - \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}.$$

Endlich ist nach §. 11.

$$\pm\frac{\cos\alpha_1}{(\mu)} = 1 - \cos\Theta(\cos\Theta + \frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}),$$

und folglich, wie man mit Hülfe des schon mehrfach angewandten Satzes von den Binomialcoefficienten leicht findet:

$$\pm\cos\alpha_1 = -\frac{(\mu)}{\mu}\left\{\begin{array}{l}1 \\ -(\tfrac{1}{2})_1(1+\mu)^2\sin\Theta^2 \\ +\{(\tfrac{1}{2})_2 + (\tfrac{1}{2})_1(\tfrac{1}{2})_1\mu^2 + (\tfrac{1}{2})_2\mu^4\}\sin\Theta^4 \\ -\{(\tfrac{1}{2})_3 + (\tfrac{1}{2})_1(\tfrac{1}{2})_2\mu^2 + (\tfrac{1}{2})_2(\tfrac{1}{2})_1\mu^4 + (\tfrac{1}{2})_3\mu^6\}\sin\Theta^6 \\ +\{(\tfrac{1}{2})_4 + (\tfrac{1}{2})_1(\tfrac{1}{2})_3\mu^2 + (\tfrac{1}{2})_2(\tfrac{1}{2})_2\mu^4 + (\tfrac{1}{2})_3(\tfrac{1}{2})_1\mu^6 + (\tfrac{1}{2})_4\mu^8\}\sin\Theta^8 \\ -\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\};$$

oder

$$\cos\alpha_1 = \mp\frac{(\mu)}{\mu}\left\{\begin{array}{l}1 \\ -(\tfrac{1}{2})_1(1+\mu)^2(\frac{q}{R_1})^2 \\ +\{(\tfrac{1}{2})_2 + (\tfrac{1}{2})_1(\tfrac{1}{2})_1\mu^2 + (\tfrac{1}{2})_2\mu^4\}(\frac{q}{R_1})^4 \\ -\{(\tfrac{1}{2})_3 + (\tfrac{1}{2})_1(\tfrac{1}{2})_2\mu^2 + (\tfrac{1}{2})_2(\tfrac{1}{2})_1\mu^4 + (\tfrac{1}{2})_3\mu^6\}(\frac{q}{R_1})^6 \\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}$$

oder auch, wie man durch leichte Rechnung findet:

$$\cos\alpha_1 = \mp\frac{(\mu)}{\mu}\left\{\begin{array}{l}1 \\ -\frac{1}{2}(1+\mu)^2(\frac{q}{R_1})^2 \\ -\frac{1}{8}(1-\mu^2)^2(\frac{q}{R_1})^4 \\ -\frac{1}{16}(1-\mu^2)^2(1+\mu^2)(\frac{q}{R_1})^6 \\ -\frac{1}{128}(1-\mu^2)^2(5+6\mu^2+5\mu^4)(\frac{q}{R_1})^8 \\ -\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}.$$

§. 18.

In §. 16. haben wir

$$\frac{a_1 - \Delta}{a_1 - \Delta_1}$$

in eine nach den geraden Potenzen von sin α fortschreitende Reihe entwickelt. Um nun aber auch

$$\frac{a_1 - \Delta_1}{a_1 - \Delta}$$

in eine solche Reihe zu entwickeln, müsste man auf folgende Art verfahren. Man setze

$$\frac{a_1 - \Delta}{a_1 - \Delta_1} = A + B\sin\,\alpha^2 + C\sin\,\alpha^4 + D\sin\,\alpha^6 + \ldots,$$

wo die Coefficienten $A, B, C, D, \ldots$ aus §. 16. bekannt sind, und

$$\frac{a_1 - \Delta_1}{a_1 - \Delta} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}\sin\,\alpha^2 + \mathfrak{C}\sin\,\alpha^4 + \mathfrak{D}\sin\,\alpha^6 + \ldots.$$

Weil nun

$$\frac{a_1 - \Delta}{a_1 - \Delta_1} \cdot \frac{a_1 - \Delta_1}{a_1 - \Delta} = 1$$

ist, so erhält man durch Multiplication der beiden obigen Reihen in einander die Gleichung

$$\begin{aligned} 1 = & A\mathfrak{A} \\ & + (A\mathfrak{B} + B\mathfrak{A})\sin\,\alpha^2 \\ & + (A\mathfrak{C} + B\mathfrak{B} + C\mathfrak{A})\sin\,\alpha^4 \\ & + (A\mathfrak{D} + B\mathfrak{C} + C\mathfrak{B} + D\mathfrak{A})\sin\,\alpha^6 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

aus welcher sich zur Bestimmung der Coefficienten $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \ldots$ die Gleichungen

$$\begin{aligned} & A\mathfrak{A} = 1, \\ & A\mathfrak{B} + B\mathfrak{A} = 0, \\ & A\mathfrak{C} + B\mathfrak{B} + C\mathfrak{A} = 0, \\ & A\mathfrak{D} + B\mathfrak{C} + C\mathfrak{B} + D\mathfrak{A} = 0, \end{aligned}$$

u. s. w.

ergeben, deren Gesetz klar vor Augen liegt. Diese kurze Andeutung über den in Rede stehenden Gegenstand mag für jetzt genügen, um diese Abhandlung, welche vorzüglich nur die Grundlagen für andere spätere Untersuchungen enthalten soll, nicht zu sehr auszudehnen.

II.

Lehrsätze und Formeln aus der analytischen Geometrie und mathematischen Geographie, welche in der practischen Geometrie zur Anwendung kommen.

Von

Herrn Professor Dr. Gerling

zu Marburg.

Zum Behuf meiner Triangulirungs-Arbeiten habe ich schon vor mehr als zwanzig Jahren die nöthigen Lehrsätze und Formeln mir in möglichst elementarer und anschaulicher Weise selbstständig entwickelt. Dieses hat mir gute Dienste geleistet, und habe ich auch dabei gelegentlich Eins und das Andere aufgefunden, was, meines Wissens, wenigstens nicht so allgemein bekannt ist, als für die Anwendung vielleicht zu wünschen wäre. Ich stelle also meine Ableitungen hier zum Gebrauch der Practiker zusammen und gebe ihnen dadurch zugleich vollständige Auskunft über das Verfahren, welches in dieser Beziehung von mir beobachtet wurde, in meinem Buche über die Triangulirung aber (*Beiträge zur Geographie von Kurhessen*. 1838.) namentlich §. 51. 54. 96. nur kurz angedeutet werden konnte.

Den elliptischen Erd-Meridian betreffend.

§. 1.

Bezeichnen wir die halbe grosse Axe der Ellipse mit a, die halbe kleine Axe mit b, so haben wir bekanntlich die Gleichung der Ellipse für rechtwinkliche aus dem Mittelpunkt den Axen parallel gezählte Coordinaten

$$(1)\quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Diese Form der Gleichung ist aber für die Rechnungen, die sich auf den Erdmeridian beziehen, nicht die bequemste. Wir haben hiebei nämlich immer zuerst nach der Polhöhe (unverbesserten geographischen Breite) des Orts zu fragen, für welchen es etwas zu rechnen giebt. Diese Polhöhe ist bekanntlich der Winkel, den die Verticale des Orts mit der Ebene des Aequators macht, der

sonst auch wohl Subnormalen-Winkel genannt wird. — Sodann aber brauchen wir uns während unserer meisten Rechnungen um das wirkliche Längenmaass von a (dem Halbmesser des Aequators) und b (dem Halbmesser des Pols oder der halben Rotations-Axe) gar nicht zu bekümmern, wenn wir nur von Anfang die Gestalt der Ellipse kennen, und zuletzt die richtige Maass-Einheit einführen.

Wir werden also uns die Rechnungen erleichtern, wenn wir gleich von Anfang in der Gleichung der Ellipse sowohl a zum Maass aller Längen nehmen, als auch die rechtwinklichen Coordinaten selbst, und alles, was damit zusammenhängt, als Functionen des Subnormalen-Winkels oder der Polhöhe des Orts ausdrücken, die wir mit N bezeichnen wollen.

§. 2.

Die Gestalt des elliptischen Erdmeridians ist nun durch die Abplattung c gegeben, wofür wir die Formel haben

$$(2) \quad c = \frac{a-b}{a}$$

Wir gebrauchen aber in den practischen Rechnungen gewöhnlich die in abstracter Zahl ausgedrückte Excentricität e der Ellipse, die wir durch die Formel

$$(3) \quad e^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}$$

berechnen.

Die Vergleichung von (2) und (3) giebt

$$\frac{b^2}{a^2} = 1 - e^2 = (1-c)^2,$$

also

$$(4) \quad e^2 = (2-c)c.$$

Dieser Formel bedienen wir uns schon mit Nutzen zu Ueberschlägen. Denn da wir wissen, dass c nach dem Zeugniss aller Gradmessungen nur sehr wenig von $\frac{1}{300}$ abweicht; so haben wir

$$e^2 < \frac{1}{150}$$

$$e^4 < \frac{1}{22500}$$

$$e^6 < \frac{1}{3375000} \text{ u. s. w.}$$

[illegible] uns also Reihenentwickelungen vorkommen, die nach Poten[illegible] von e^2 fortschreiten, so können wir nach dem jedesmaligen [illegible]cke hiedurch leicht beurtheilen, wie viel Glieder davon wir [illegible]unehmen haben.

Beschliessen wir nun für das Folgende a zur Maass-Einheit aller Längen zu wählen, so haben wir zu setzen

$$(6)\quad a=1$$

$$(7)\quad b=(1-e^2)^{\frac{1}{2}}$$

und somit wird unsere Formel (1) in

$$(8)\quad y^2=(1-e^2)(1-x^2)$$

sich verwandeln.

§. 3.

Um nun weiter die Coordinaten als Functionen der Polhöhe (des Subnormalen-Winkels) N auszudrücken, erinnern wir uns, dass ganz allgemein vermöge des sogenannten characteristischen Differential-Dreiecks ist:

$$tang\ N^2=\left(\frac{dx}{dy}\right)^2$$

also entweder

$$tang\ N=+\frac{dx}{dy} \text{ oder } tang\ N=-\frac{dx}{dy}.$$

In unserm besondern Fall werden wir für $tang\ N$ den letzten dieser Ausdrücke zu wählen haben, weil die Polhöhen und mit ihnen die elliptischen Meridian-Bögen immer im ersten Quadranten bleiben und vom Aequator gegen den Pol hin wachsen, somit also die dx und dy nothwendig verschiedene Zeichen haben.

Differentiiren wir nun die Gleichung (8), so kommt uns zunächst

$$2ydy=-2(1-e^2)xdx,$$

d. h.

$$\frac{dx}{dy}=-\frac{y}{(1-e^2)x}.$$

Erheben wir ins Quadrat und setzen für y^2 seinen Werth aus (8), so wird

$$(9)\quad tang\ N^2=\frac{1-x^2}{(1-e^2)x^2}.$$

Gehen wir von der Tangente auf die Secante und von dieser auf den Cosinus über, so kommt uns

$$(10)\quad cos\ N^2=\frac{(1-e^2)x^2}{1-e^2x^2}$$

und endlich durch Multiplication von (9) und (10)

$$(11)\quad sin\ N^2=\frac{1-x^2}{1-e^2x^2}.$$

Drücken wir nun x^2 durch die Formel (11) aus, so kommt uns

$$(12) \quad x^2 = \frac{\cos N^2}{1 - e^2 \sin N^2},$$

also endlich

$$(13) \quad x = \frac{\cos N}{(1 - e^2 \sin N^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Setzen wir den Werth von x^2 aus (12) in die Formel (8), so erhalten wir

$$(14) \quad y^2 = \frac{(1 - e^2)(1 - e^2 \sin N^2 - \cos N^2)}{1 - e^2 \sin N^2},$$

also zusammengenommen und ausgezogen

$$(15) \quad y = \frac{(1 - e^2) \sin N}{(1 - e^2 \sin N^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Der für x und y gemeinschaftliche Factor $\frac{1}{(1 - e^2 \sin N^2)^{\frac{1}{2}}}$ ist, wie weiter unten erhellen wird, von grosser practischer Wichtigkeit. Er bietet aber auch ein geometrisches Interesse dar. Denn ist **Fig. 1.** L der Punkt des Meridians, für welchen die Rechnung zu führen ist, und LO in seiner Verticale, so ist nach unsern bisherigen Festsetzungen $CP = x$, also aus (13)

$$\frac{1}{(1 - e^2 \sin N^2)^{\frac{1}{2}}} = LO,$$

d. h. gleich dem Theil der Verticale, welcher zwischen dem in Rechnung zu nehmenden Ort und der Rotations-Axe des elliptischen Sphäroids liegt. Ich habe für diese Linie den Namen Conormale vorgeschlagen und werde auch hier den Buchstaben k zu ihrer kurzen Bezeichnung gebrauchen.

§. 4.

Mit Hülfe der Conormale k lassen sich nun die sämmtlichen Linien, die in dem elliptischen Meridiane zur Berechnung kommen können, leicht und in bequemen Ausdrücken als Functionen der Polhöhe darstellen. Wir haben nämlich **Fig. 1.**

n. 1 $k (= LO) = \frac{1}{(1 - e^2 \sin N^2)^{\frac{1}{2}}}$

n. 2 $x (= CP) = k . \cos N$

n. 3 $y (= LP) = (1 - e^2) k \sin N$

n. 4 NORMALE $(= LN) = (1 - e^2) k$

n. 5 SUBNORMALE $(= NP) = (1 - e^2) k \cos N$

n. 6 SUBTANGENTE $(= PT) = (1 - e^2) k \sin N . \tang N$

n. 7 TANGENTE $(= LT) = (1 - e^2) k \tang N$

$$\text{n. 8} \quad CN = e^2 k \cos N$$
$$\text{n. 9} \quad CO = e^2 k \sin N$$
$$\text{n. 10} \quad ON = e^2 k.$$

Eben so leicht ergeben sich nun zwei andere Grössen, welche man mitunter gebraucht, die Entfernung $CL (= R)$ des Orts vom Mittelpunkt der Erde (der sogenannte locale Erd-Radius) und der Winkel $CLN (= v)$, den diese Linie mit der Verticale macht (die sogenannte Verbesserung der Polhöhe), welcher Winkel auf unserer Erde bekanntlich höchstens 12′ beträgt und von der Polhöhe abzuziehen ist, um die sogenannte verbesserte Breite $NCL = N - v$ zu haben.

Denken wir uns nämlich von C auf die Conormale ein Perpendikel gefällt, so ist

$$(16) \quad R \sin v = CN \sin N = \tfrac{1}{2} e^2 k \sin 2N$$

$$(17) \quad R \cos v = LO - CO \sin N = \frac{1}{k}.$$

Hieraus ergiebt sich nun leicht durch Division

$$\text{n. 11} \quad \tan v = \tfrac{1}{2} e^2 k^2 \sin 2N$$

$$\text{n. 12} \quad R = \frac{1}{k \cos v}.$$

Diese letzte Formel zeigt auch eine elegante geometrische Eigenschaft der Ellipse an, womit wir uns hier aber nicht aufhalten. Ich habe sie mitgetheilt in meinem Programm *de parallaxi elationis* 1830, wo auch die obigen Formeln, meines Wissens, zuerst bekannt gemacht wurden.

§. 5.

Die Formeln des vorigen Paragraphen zeigen, dass es bei allen Rechnungen, die sich auf das Erd-Sphäroid beziehen. am vortheilhaftesten sein wird, aus dem zum Grunde zu legenden c, erst nach (4) das e^2 scharf zu berechnen, und sodann nach **n. 1** für die Gegend, worin man zu thun hat, eine Hülfstafel zu construiren, aus welcher man für das Argument N das jedesmalige k abliest. Hieraus folgt dann alles Weitere nach obigen Formeln leicht, und kann erforderlichen Falls auch in Tafeln gebracht werden.

Ich habe zweimal eine solche Hülfstafel berechnet. Zuerst 1822 für die *Walbeck*sche Abplattung (*Beiträge* u. s. w. S. 84 und 198) und sodann 1830 für die (erste) *Schmidt*sche Abplattung (*parallaxis elat.*, vergl. *Schumacher Astronomische Nachrichten* X. S. 7.). Hier will ich also für Practiker, die vielleicht sich ähnliche Tafeln entwerfen wollten, etwa nach der neuesten *Bessel*schen Abplattung $c = \frac{1}{299{,}1528}$ (*Schumacher* a. a. O. XIX. S. 116.), noch die Weise angeben, wie ich dabei verfuhr.

Man gebraucht in der Praxis gemeiniglich nicht k selbst, son-

dern seinen Logarithmus, und ist also auch die Tafel gleich für *log k* zu construiren.

Erhebe ich also die Formel **n. 1** erst ins Quadrat, so kommt

$$k^2 = (1 - e^2 \, sin \, N^2)^{-1}.$$

Differentiire ich dieses nach *sin N*, so kommt

$$kdk = (1 - e^2 \, sin \, N^2)^{-2} e^2 \, sin \, N d \, sin \, N.$$

Dividire ich dann das untere durch das obere, so erhalte ich

$$\frac{dk}{k} = d \, log \, nat. \, k = (1 - e^2 \, sin \, N^2)^{-1} e^2 \, sin \, N d \, sin \, N.$$

Entwickele ich rechts die Parenthese und multiplicire mit $e^2 \, sin \, N$, so ergiebt sich

$$d \, log \, nat. \, k = (e^2 \, sin \, N + e^4 \, sin \, N^3 + e^6 \, sin \, N^5 + \ldots.) \, d \, sin \, N,$$

also durch Integration und Multiplication mit dem Modulus des briggischen Systems ($= M$)

$$(18) \quad log \, k = M(\tfrac{1}{2} e^2 \, sin \, N^2 + \tfrac{1}{4} e^4 \, sin \, N^4 + \tfrac{1}{6} e^6 \, sin \, N^6 + \ldots.)$$

Dass keine Integrations-Constante beizufügen ist, erhellt daraus, dass für $N = 0$ nach **n. 1**, $k = 1$ werden muss, also auch $log \, k = 0$.

Man kann also zur Entwerfung der Hülfstafel für *log k* einen grossen Theil der Rechnung mit 5stelligen Logarithmen ausführen, und hat dann, um die Logarithmen aller im vorigen Paragraphen erwähnten Grössen für den Halbmesser des Aequators als Einheit durch leichte Formeln zu erhalten, ausser dem $log \, e^2$, den man schon für die Hülfstafel gebrauchte, nur noch den $log (1 - e^2)$ ein für allemal zu berechnen und sich aufzuschreiben. Zuletzt ist dann, wenn man absolutes Längenmaass verlangt, noch *log a* hinzuzufügen.

Bessel (a. a. O.) giebt nach seiner so höchst verdienstlichen definitiven Berechnung von zehn Gradmessungen

$$log \, e = 8{,}9122052$$
$$log (1 - e^2)^{\frac{1}{2}} = 9{,}9985458.202$$
$$a = 3272077{,}14 \text{ Toisen}$$
$$log \, a = 6{,}5148235.337$$

Den Krümmungshalbmesser des Meridians betreffend.

§. 6.

Bei Untersuchungen über Quantität und Qualität der Krümmung einer ebenen Curve pflegt man gemeiniglich denselben Weg einzuschlagen, den man auch bei den meisten andern Untersuchun-

gen geht; so dass man also dx als constant annimmt, (d. h. die x als unabhängige der Zeit proportional wachsende Grössen betrachtet), alle übrigen Differentiale zunächst mit dx vergleicht, und dadurch die bekannten Formeln mit Hülfe des zweiten Differential-Verhältnisses $\frac{d^2y}{dx^2}$ entwickelt.

Mich hat aber immer bedünken wollen, dass man auf einem andern Wege in manchen practischen Fällen bequemer und jedenfalls übersichtlicher zum Ziel kommt. Folgendes ist dieser Weg.

1. Ich denke mir nämlich von Anfang den Bogen s der ebenen Curve als unabhängige Veränderliche, das heisst also mit andern Worten, ich denke mir die Curve als entstanden aus einem eingeschriebenen Polygonzuge, der ursprünglich über den Polygonseiten lauter gleiche Bögen hatte, und nun durch fortgesetzte Halbirung dieser Bögen in die Curve überging, worin also inneres und äusseres Polygon zusammenfallen. Oder noch anders ausgedrückt, ich denke die Curve nicht bloss als Polygonzug, sondern als gleichseitigen Polygonzug von unendlich vielen unendlich kleinen Seiten, deren jede den constanten Werth ds hat.

2. Zwei benachbarte ds können nun nicht in gerader Linie liegen, weil sonst ein Theil der Curve aus einer geraden Linie entsprungen sein müsste. Der Winkel aber, den sie mit einander bilden, muss nur um eine unendlich kleine Differenz von zwei rechten Winkeln verschieden sein, weil sonst ds nicht unendlich klein wäre. (Oder, will ich noch hinzusetzen, weil sonst die Stetigkeit unterbrochen wäre, welcher Fall aber für gegenwärtigen Zweck ausser Betrachtung bleibt.)

3. Denke ich mir nun am Anfang und am Ende eines beliebigen Elements jenen Winkel mit seinem benachbarten Element durch eine gerade Linie halbirt, so erhalte ich zwei benachbarte Normalen. Diese Normalen kann ich mir, wenn es erforderlich ist, auch senkrecht auf andern Curvenelementen errichtet denken, indem ich die Mitte eines in Betrachtung gezogenen Elements ds mit der Mitte des vorhergehenden und folgenden durch neue gleich grosse Elemente verbunden denke, die also auch wieder mit der Curve zusammenfallen.

4. Je zwei auf solche Weise einander benachbarte Normalen werden sich nun, allgemein zu reden (denn Ausnahmsfälle erfordern eine besondere Betrachtung), in einem Punkt schneiden, und hier einen Winkel einschliessen, welcher auch unendlich klein ist, weil ein Elementardreieck entsteht, in welchem die beiden dem ds anliegenden Winkel nur um einen unendlich kleinen Unterschied von rechten Winkeln abweichen. Denke ich mir aber irgendwo in der Ebene der Figur eine beliebige Abscissenlinie gezogen, bezeichne den Winkel, den die durch den Anfang von ds gezogene Normale mit derselben macht, mit N, und zwar in dem Sinn, dass für das wachsende s auch N wachsen muss, so ist der obige von zwei einander unendlich nahen Normalen eingeschlossene unendlich kleine Winkel mit dN zu bezeichnen. Diesen Winkel dN kann man dabei am bequemsten durch einen sehr kleinen Bruch des, als Einheit zu nehmenden, Halbmessers ausgedrückt denken. Sollte er in Secunden dargestellt werden, so käme dann nur noch der bekannte Factor $\varrho(=206264{,}81)$ hinzu.

5. Ist nun die zu betrachtende Curve ein Kreis, so ist sie

nach bekannten Elementar-Sätzen aus einem regelmässigen, also nicht bloss gleichseitigen, sondern auch gleichwinklichen Polygon entstanden. Demnach werden alle Elementar-Dreiecke auch gleichschenklich und einander congruent, und alle Normalen schneiden sich also in einem und demselben Punkt, dem Mittelpunkt des Kreises.

6. Ist aber die Curve kein Kreis, so muss sie aus einem gleichseitigen, nicht gleichwinklichen Polygonzuge entstanden gedacht werden. Allgemein zu reden werden also je drei auf einander folgende *ds* zwei Winkel mit einander bilden, die von einander verschieden sind, und zwar verschieden um die Differenz zweier unendlich kleiner Winkel, d. h. um einen Winkel, welcher im zweiten Grad unendlich klein ist.

7. Denkt man sich nun auf dem mittelsten von drei auf einander folgenden Elementen in seiner Mitte ein beliebig verlängertes Perpendikel errichtet, so muss dieses, nach dem obigen 3., auch als Normale der Curve gedacht werden. Es steht, wie oben, senkrecht auf der Berührungs-Linie, die als Verlängerung eines Curven-Elements zu denken ist. Es ist also auch der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, welche an dieser Stelle die Curve berühren und also die Berührungs-Linie und auch dies eine Element mit ihr gemein haben.

8. In Kreisen nun, welche eine Curve von aussen berühren, liegen alle übrigen Kreis-Elemente auf der andern Seite der Berührungs-Linie als wo die entsprechenden Curven-Elemente liegen.

Bei inneren Berührungs-Kreisen aber tritt, rücksichtlich der drei auf einander folgenden Elemente, eine fünffache Verschiedenheit ein.

a) Es können, wie **Fig. 2.** roh angedeutet ist, die beiden benachbarten Kreis-Elemente innerhalb der entsprechenden Curven-Elemente fallen.

b) Es können, wie **Fig. 3.**, die beiden benachbarten Kreis-Elemente ausserhalb der Curve fallen.

c) Es kann, wie **Fig. 4.**, das benachbarte Curven-Element, welches den kleineren Winkel mit dem mittelsten Element macht, mit seinem Kreis-Element zusammenfallen, dann wird im dritten Element die Curve zwischen den Kreis und die Berührungs-Linie fallen.

d) Es kann, wie **Fig. 5.**, dasjenige benachbarte Curven-Element, welches den grösseren Winkel macht, mit dem Kreis-Element zusammenfallen, dann wird im dritten Element der Kreis zwischen Curve und Berührungslinie fallen.

Zur Vergleichung dieser vier ersten Fälle denken wir uns den Halbmesser des betreffenden Kreises stetig wachsend. Dann geht zuerst der Fall *a*) in den Fall *c*) über. In beiden Fällen ist das dN des Kreises grösser als das dN der Curve, und zwar beträgt der Unterschied dieser beiden dN ein unendlich Kleines des zweiten Grades. — Von der andern Seite muss bei abnehmendem Halbmesser der Fall *b*) zuerst in den Fall *d*) übergehen, und ist in beiden Fällen das dN des Kreises um ein unendlich Kleines des zweiten Grades kleiner als das dN der Curve.

e) Zwischen den Fällen *c*) und *d*) sind nun die Fälle enthalten, bei welchen ein benachbartes Element innerhalb fällt, das andere ausserhalb. Unter diesen muss also auch einer begriffen sein,

bei welchem jener Unterschied der beiden dN gänzlich verschwindet. Dies lässt sich nämlich nur auf die einzige Weise erreichen, dass man die beiden benachbarten Kreis-Elemente unter gleichen Winkeln (unendlich kleinen des zweiten Grades) gegen die Curven-Elemente zu beiden Seiten geneigt denkt, wie **Fig. 6.** angedeutet ist. Weil nämlich der geometrische Ort des Kreismittelpunkts nach 7) gegeben ist, so kommt es nur noch darauf an, durch die beiden Endpunkte des Elements und den Durchschnittspunkt der beiden benachbarten Normalen der Curve einen Kreis gelegt zu denken, der den verlangten Mittelpunkt auf dem Perpendikel abschneidet.

9. Denjenigen berührenden Kreis nun, dessen dem gemeinschaftlichen ds entsprechendes dN mit dem dN der Curve völlig übereinstimmt (welcher also die Curve unter gleichen, im zweiten Grad unendlich kleinen Winkeln schneidet) nennen wir den Krümmungskreis und seinen Halbmesser $(=r)$ den Krümmungshalbmesser der Curve an dem entsprechenden Punkt, wo wir uns im Vorigen das mittelste Element oder vielmehr dessen Mitte dachten. Damit haben wir also die Gleichung gewonnen

$$\text{n. 13.} \quad r = \frac{ds}{dN}.$$

Für die practische Anwendung dieser Gleichung ist es nun natürlich nicht mehr nöthig gerade, wie bisher zum Behuf der Ableitung geschah, s als unabhängige Veränderliche zu denken. Es genügt, wenn wir nur auf irgend eine Weise uns Kenntniss von dem Quotienten $\frac{ds}{dN}$ verschaffen.

§. 7.

Bei der Anwendung des Vorigen auf den elliptischen Erdmeridian ergiebt sich für den Krümmungshalbmesser $\frac{ds}{dN}$ zuerst vermittelst des sogenannten characteristischen Dreiecks die Gleichung

$$ds = -\frac{dx}{\sin N},$$

also

$$\frac{ds}{dN} = -\frac{dx}{\sin N dN}.$$

Der letzte Theil des letzten Ausdrucks findet sich hier aus der Differentiation von (12).

Aus

$$\cos N^2 = (1 - e^2 \sin N^2) x^2$$

kommt nämlich

$$-\cos N . \frac{\sin N dN}{dx} = (1 - e^2 \sin N^2) x - e^2 x^2 \cos N \frac{\sin N dN}{dx}.$$

§. 18.

In §. 16. haben wir

$$\frac{a_1 - \Delta}{a_1 - \Delta_1}$$

in eine nach den geraden Potenzen von sin α fortschreitende Reihe entwickelt. Um nun aber auch

$$\frac{a_1 - \Delta_1}{a_1 - \Delta}$$

in eine solche Reihe zu entwickeln, müsste man auf folgende Art verfahren. Man setze

$$\frac{a_1 - \Delta}{a_1 - \Delta_1} = A + B\sin \alpha^2 + C\sin \alpha^4 + D\sin \alpha^6 + \ldots,$$

wo die Coefficienten $A, B, C, D, \ldots$ aus §. 16. bekannt sind, und

$$\frac{a_1 - \Delta_1}{a_1 - \Delta} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}\sin \alpha^2 + \mathfrak{C}\sin \alpha^4 + \mathfrak{D}\sin \alpha^6 + \ldots.$$

Weil nun

$$\frac{a_1 - \Delta}{a_1 - \Delta_1} \cdot \frac{a_1 - \Delta_1}{a_1 - \Delta} = 1$$

ist, so erhält man durch Multiplication der beiden obigen Reihen in einander die Gleichung

$$\begin{aligned}1 = & A\mathfrak{A} \\ & + (A\mathfrak{B} + B\mathfrak{A}) \sin \alpha^2 \\ & + (A\mathfrak{C} + B\mathfrak{B} + C\mathfrak{A}) \sin \alpha^4 \\ & + (A\mathfrak{D} + B\mathfrak{C} + C\mathfrak{B} + D\mathfrak{A}) \sin \alpha^6 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

aus welcher sich zur Bestimmung der Coefficienten $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \ldots$ die Gleichungen

$$\begin{aligned}& A\mathfrak{A} = 1, \\ & A\mathfrak{B} + B\mathfrak{A} = 0, \\ & A\mathfrak{C} + B\mathfrak{B} + C\mathfrak{A} = 0, \\ & A\mathfrak{D} + B\mathfrak{C} + C\mathfrak{B} + D\mathfrak{A} = 0,\end{aligned}$$

u. s. w.

ergeben, deren Gesetz klar vor Augen liegt. Diese kurze Andeutung über den in Rede stehenden Gegenstand mag für jetzt genügen, um diese Abhandlung, welche vorzüglich nur die Grundlagen für andere spätere Untersuchungen enthalten soll, nicht zu sehr auszudehnen.

Der Winkel w kann nun alle Werthe von 0 bis 180° annehmen, und nur in dem Fall, dass w die Polhöhe des Punkts S um 90° übertrifft, wird die schneidende Ebene in eine berührende, also der Schnitt in einen Punkt sich verwandeln. Bei der Entwickelung der nöthigen Formeln kann man also von einem w ausgehen, welches in den ersten Quadranten fällt und in demselben Sinn gezählt wird, wie die N der früheren Paragraphen.

1. Die Durchschnittslinie des Schnitts mit dem zum Grunde gelegten auf ihm senkrechten Meridian trifft nun seine beiden Axen, allgemein zu reden, in den Punkten Q und O. (Die beiden besondern Fälle, wo einer dieser Punkte ins Unendliche fällt, werden wir demnächst abgesondert betrachten.) Man hat also zuvörderst die beiden constanten Hülfsgrössen

$$SQ = p \text{ und } SO = q$$

zur Benutzung, die man aus den Coordinaten des Punkts S in seinem Meridian und dem gegebenen Winkel w nach Bedürfniss leicht berechnet.

2. Wählt man nun einen beliebigen Punkt L in der Curve, die der ebne Schnitt auf dem Sphäroid bestimmt, und fällt von ihm die beiden Perpendikel, LM auf den senkrechten Meridian, und LP auf den Aequator; so trifft auch LM auf SQ in M unter rechten Winkeln ein, man kann also die Linie

$$LM = v$$

als die eine Coordinate der zu untersuchenden ebenen Schnitt-Curve betrachten. Zur andern Coordinate wähle man dann den Abstand des Punkts M von S, und setze

$$SM = u,$$

so dass jetzt eine Gleichung zwischen u und v zu suchen ist.

3. Für den Punkt L findet sich nun auch ein Meridian bestimmt und in ihm seine Coordinaten

$$CP = x \text{ und } LP = y.$$

Legt man aber durch LP und LM eine Ebene, so entstehen rechtwinkliche Dreiecke, aus welchen sich sogleich ergiebt

$$(19)\quad y = (p - u)\, sin\, w$$

$$(20)\quad x^2 = (q - u)^2\, cos\, w^2 + v^2.$$

Durch Substitution dieser Gleichungen in die Ellipsen-Gleichung (8) muss sich also die gesuchte Gleichung des Schnitts ergeben.

4. Statt der verlangten Substitution kann man aber kürzer zum Ziel kommen, wenn man die Gleichungen (19) und (20) differentiirt, dann in die Differential-Gleichung der Ellipse substituirt, und endlich integrirt.

So erhält man zuerst aus (19)

$$(21)\quad dy = -\, sin\, w \,.\, du$$

$$(22)\quad xdx = -(q - u)\, cos\, w^2 du + vdv.$$

Die Differentialgleichung der Ellipse aber kann nach §. 3. geschrieben werden

$$(23)\quad \frac{dy}{xdx} = -\frac{1-e^2}{y}.$$

Folglich hat man durch Division von (22) in (21) und Einführung von (19) zunächst

$$\frac{\sin w du}{(q-u)\cos w^2 du - v dv} = -\frac{1-e^2}{(p-u)\sin w},$$

also wenn man vdv absondert, nach u ordnet und zusammenzieht:

$$(24)\quad vdv = (p\,.\,\frac{\sin w^2}{1-e^2} + q\cos w^2)du - (\frac{1-e^2\cos w^2}{1-e^2})udu.$$

Diese Gleichung integrirt giebt

$$(25)\quad v^2 = 2(p\frac{\sin w^2}{1-e^2} + q\cos w^2)u - (\frac{1-e^2\cos w^2}{1-e^2})u^2,$$

wo keine Constante beizufügen ist, weil für $u=0$ auch $v=0$ wird.

Unsere Gleichung ist also von der Form

$$v^2 = Pu - Qu^2,$$

und somit bewiesen, dass jeder ebene Schnitt des Erdsphäroids eine Ellipse giebt, deren Scheitel der Punkt S und deren Abscissen-Axe die gerade Linie ist, welche die Schnitt-Ebene mit dem auf ihr senkrechten Meridian gemein hat.

§. 9.

Um nun die Beschaffenheit dieser Ellipse näher zu untersuchen, bezeichne man die halbe Abscissen-Axe mit A, ihre coordinirte mit B. Dann ist die Gleichung (25) zuerst auf die Gleichung der Ellipse aus dem Scheitel

$$v^2 = \frac{B^2}{A^2}\,.\,u\,.\,(2A-u)$$

zu bringen.

Demnach haben wir zu setzen

$$(26)\quad \frac{B^2}{A^2} = Q = \frac{1-e^2\cos w^2}{1-e^2},$$

$$(27)\quad A = \frac{P}{2Q} = \frac{p\sin w^2 + q(1-e^2)\cos w^2}{1-e^2\cos w^2}.$$

Aus (26) ergeben sich gleich schon einige wichtige Eigenschaften des Schnitts.

1. Das Verhältniss $\frac{B^2}{A^2}$ ist bloss von e^2 und w abhängig. Dem-

nach erhält man lauter einander ähnliche Ellipsen, wenn man lauter unter sich parallele Schnitte durch das Sphäroid führt.

2. Es giebt nur einen einzigen Fall, in welchem $\frac{B^2}{A^2}=1$ wird, d. h. in welchem der elliptische Schnitt sich in einen Kreis verwandelt, den nämlich wenn $w=0$ oder $=180^\circ$ wird, und dies ist einer von den beiden oben vorbehaltenen besondern Fällen, wo der Schnitt also in einen Parallel-Kreis übergeht.

3. Es ist (den letzterwähnten besondern Fall als Ausnahme bei Seite gesetzt) immer $B^2 > A^2$, d. h. man bekommt lauter sogenannte breite Ellipsen, deren Scheitel der kleinen Axe in den auf ihren Ebenen senkrechten Meridian fällt.

Man wird also, um die Analogie mit den gewöhnlichen Axen herzustellen, die Formeln (26) und (27) umschreiben müssen, indem man

$$A=\beta \text{ und } B=\alpha$$

setzt.

Dies giebt

$$(28)\quad \frac{\beta^2}{\alpha^2}=\frac{1-e^2}{1-e^2\ cos\ w^2}$$

$$(29)\quad \beta=\frac{p\ sin\ w^2+q(1-e^2)\ cos\ w^2}{1-e^2\ cos\ w^2}.$$

4. Bezeichnet man die Excentricität des elliptischen Schnitts, in abstracter Zahl ausgedrückt, mit ε, so wird

$$\varepsilon^2=1-\frac{\beta^2}{\alpha^2},$$

also nach (28)

$$(30)\quad \varepsilon^2=e^2\left(\frac{sin\ w^2}{1-e^2\ cos\ w^2}\right),$$

woraus erhellt, dass für $w=90^\circ$, und nur für $w=90^\circ$, an jedem beliebigen Punkt des Sphäroids $\varepsilon^2=e^2$ wird, d. h. dass nur diejenige auf den Meridian eines Orts senkrechte Ebene, welche zugleich mit der Rotations-Axe der Erde parallel ist (die Ebene des „sechsten Stundenkreises") eine dem Erdmeridian ähnliche Ellipse abschneidet. Das ist also der zweite der beiden oben vorbehaltenen besondern Fälle.

5. Weil $e^2<1$, so ist auch für $w<$ und $>90^\circ$

$$1-e^2\ cos\ w^2 > sin\ w^2, \text{ d. h. } \varepsilon^2<e^2.$$

Alle auf den Meridian senkrechten Schnitte auf beiden Seiten des sechsten Stundenkreises geben also Ellipsen, welche runder sind, als der Erdmeridian.

Da aber $\frac{\varepsilon^2}{e^2}$ von dem Zeichen des $cos\ w$ unabhängig ist, so erhellt, dass die Schnitte, welche auf beiden Seiten des sechsten Stundenkreises gleiche Winkel mit diesem machen, einander ähnlich sind.

Die Differentiation von (28) giebt endlich

$$d(\frac{\alpha^2}{\beta^2}) = \frac{e^2 \sin 2w}{1-e^2} dw,$$

woraus hervorgeht, dass die Rundung für positive $\sin 2w$, d. h. vom Parallelkreis bis zum sechsten Stundenkreis stetig abnimmt, und dagegen auf der andern Seite dieses Stundenkreises wieder stetig wächst, bis der Parallelkreis wieder erreicht ist.

6. Den Uebergang von den Schnitten, die südlich von dem sechsten Stundenkreis liegen, bildet dabei immer der schon oben erwähnte Fall, wo für ein mit S zusammenfallendes L $w = N + 90^\circ$ wird, demnach die schneidende Ebene sich in die berührende (den Horizont), die Ellipse also sich in einen Punkt verwandelt. In diesem Fall haben wir also auch das Flächen-Element um den Berührungspunkt als eine unendlich kleine Ellipse von ganz bestimmter Excentricität zu betrachten. Für $w = N + 90^\circ$ wird nämlich

$$\varepsilon^2 = e^2(\frac{\cos N^2}{1-e^2 \sin N^2}) = e^2 k^2 \cos N^2,$$

wofür sich nach **n. 8** auch leicht eine geometrische Darstellung in der mit $\alpha = 1$ zu beschreibenden Ellipse finden liesse.

Die Vertical-Schnitte des Erd-Sphäroids betreffend.

§. 10.

Unter den Schnitten des Sphäroids sind vorzugsweise die Vertical-Schnitte für den practischen Geometer wichtig, weil deren Ebenen gerade von seinem Theodolithen-Fernrohr beschrieben werden. Unter diesen Vertical-Schnitten aber kommt wieder zunächst derjenige zur Anwendung, welcher senkrecht auf dem Orts-Meridian steht (im „ersten Vertical" des Orts liegt), und also dem sogenannten Perpendikel auf den Meridian angehört.

Um die Ellipse für dieses Perpendikel auf den Meridian zu finden, brauchen wir nur **Fig. I.** den Winkel N an die Stelle des w unserer beiden vorigen Paragraphen zu setzen (indem wir auch hier das S der **Fig. 7.** mit L zusammenfallend denken). Demnach wird, da wir für jedes N auch das ihm zugehörige k besitzen, aus §. 8. und **n. 4.**

$$p = (1-e^2)k \text{ und } q = k,$$

und somit aus (29)

$$(31) \quad \beta = \frac{(1-e^2)k}{1-e^2 \cos N^2}.$$

Machen wir nun auch die Substitution in (28), so wird

$$(32) \quad \frac{\beta^2}{\alpha^2} = \frac{1-e^2}{1-e^2 \cos N^2}.$$

Hieraus folgt nun mit Leichtigkeit der Krümmungshalbmesser des Perpendikels auf den Meridian, den wir mit n bezeichnen wollen. Weil nämlich unser Ort im Scheitel der kleinen Axe des betreffenden Schnittes liegt, so haben wir nach §. 7.

$$n = \frac{\alpha^2}{\beta}$$

zu setzen, d. h. wir brauchen nur (31) durch (32) zu dividiren, wodurch uns die Gleichung entspringt

$$\text{n. 15} \quad n = k.$$

Die §. 5. erwähnte Hülfstafel giebt also diesen Krümmungshalbmesser des Perpendikels unmittelbar, und wir können das Element dieses elliptischen Schnitts als das Element eines Kreises betrachten, welcher **Fig. I.** O zum Mittelpunkt und die Conormale selbst zum Halbmesser hätte.

§. 11.

Der Krümmungshalbmesser für einen Vertical-Schnitt in beliebigem Azimuth findet sich nun aus r (dem Krümmungshalbmesser des Meridians) und n (dem des Perpendikels) auf folgende Weise.

Ein solcher Schnitt, dessen Azimuth mit i bezeichnet werden mag, muss bei gehöriger Erweiterung den auf ihm senkrechten Meridian AS **Fig. 8.** treffen. Die drei Ebenen, dieses senkrechten Meridians AS, des Schnitts LS und des Orts-Meridians AL, bilden nun bei O, wo sie in der Rotations-Axe zusammentreffen, eine dreikantige Ecke, in welcher LO die Conormale für den Ort L ist, AO ein Stück der Rotations-Axe vorstellt und SO gerade wie **Fig. 7.** in der Richtung der kleinen Axe der elliptischen Schnitt-Curve liegt. Da nun die Verticale LO auf dem Horizont von L, also auch auf dem Element des Bogens LS bei L senkrecht steht, so ist LO auch Conormale für den Schnitt und der Winkel SOL, den wir Kürze halber mit O bezeichnen wollen, bildet in der Ebene des Schnitts das Complement des Subnormalen-Winkels. Behalten wir also für den Schnitt die Buchstabenbezeichnung der §§. 8. und 9. bei, so haben wir für den Krümmungshalbmesser m des Schnitts am Ort L nach **n. 14** und **n. 1** zunächst die Gleichung

$$m = \frac{(1-\varepsilon^2)\alpha}{(1-\varepsilon^2 \cos O^2)^{\frac{3}{2}}}$$

oder durch Einführung von (28)

$$m = \frac{\alpha}{(1-\varepsilon^2 \cos O^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{(1-e^2)}{(1-e^2 \cos w^2)} \cdot \frac{1}{1-\varepsilon^2 \cos O^2}.$$

Drückt man hier in dem letzten Factor ε^2 durch (30) aus, und bemerkt, dass der erste Factor nichts weiter ist als die Conormale LO selbst, so erhält man zunächst

$$(33)\quad m = k(1-e^2)\cdot\frac{1}{1-e^2\ cos\ w^2 - e^2\ sin\ w^2\ cos\ O^2}.$$

Um nun in diese Formel die Polhöhe N und das Azimuth i statt der Grössen w und O einzuführen, bemerkt man, dass die dreikantige Ecke bei O einem rechtwinklichen sphärischen Dreieck entspricht, dessen Hypotenuse $= 90^\circ - N$ ist, und worin dem sphärischen Winkel i die Kathete O anliegt, die Kathete $(90^\circ - w)$ aber gegenüber liegt. Demnach hat man nach bekannten Formeln der Trigonometrie (*Grundriss n.* 41. *und n.* 42.).

$$sin\ w\ cos\ O = sin\ N$$

$$cos\ w = cos\ N\,.\,sin\ i.$$

Dieses substituirt giebt zunächst

$$(34)\quad m = \frac{k(1-e^2)}{1-e^2\ cos\ N^2\ sin\ i^2 - e^2\ sin\ N^2},$$

wofür man auch schreiben kann

$$(35)\quad m = \frac{k(1-e^2)}{1-e^2+e^2\ cos\ N^2\ cos\ i^2}.$$

Zum practischen Gebrauch scheint es mir, wie gesagt, am bequemsten, das m auf die obigen r und n zurückzuführen. Zu dem Ende dividire man die Gleichungen (34) und (35) in 1.

Dies giebt zunächst

$$\frac{1}{m} = \frac{1-e^2\ sin\ N^2 - e^2\ cos\ N^2\ sin\ i^2}{k(1-e^2)}$$

und

$$\frac{1}{m} = \frac{1-e^2+e^2\ cos\ N^2\ cos\ i^2}{k(1-e^2)}.$$

Sondert man nun in diesen Brüchen das letzte Glied des Zählers jedesmal ab, und bemerkt die Bedeutung, welche die ersten Brüche dadurch nach **n. I**, **n. 14** und **n. 15** erhalten, so kommt

$$(36)\quad \frac{1}{m} = \frac{1}{r} - \frac{e^2\ cos\ N^2\ sin\ i^2}{k(1-e^2)},$$

$$(37)\quad \frac{1}{m} = \frac{1}{n} + \frac{e^2\ cos\ N^2\ cos\ i^2}{k(1-e^2)};$$

also endlich, wenn man (36) mit $cos\ i^2$, (37) mit $sin\ i^2$ multiplicirt und dann addirt:

$$\textbf{n. 16}\quad \frac{1}{m} = \frac{cos\ i^2}{r} + \frac{sin\ i^2}{n}$$

$$\textbf{n. 17}\quad m = \frac{rn}{r\ sin\ i^2 + n\ cos\ i^2}.$$

Da nach n. 14 und n. 15

$$\frac{r}{n} = (1-e^2)k^2$$

und (mit Ausnahme des Falls, wo $N = 90^\circ$, also die Vertic lauter Meridiane sind) nach n. I $k^2 < \frac{1}{1-e^2}$, so wird f Verticalschnitt

$$\frac{r}{n} < 1,$$

folglich auch aus n. 16.

$$\frac{r}{m} < 1 \text{ und } \frac{n}{m} > 1,$$

d. h.

$$r < m \text{ und } n > m.$$

Demnach sind auch r und n die extremen Werthe alle mungshalbmesser für den angenommenen Punkt des Sphär

Bezeichnet man endlich einen beliebigen Halbmesse einer Ellipse mit R und seinen Winkel gegen die klei mit i, so wird

$$R \cos i = y \text{ und } R \sin i = x,$$

folglich aus (1)

$$\frac{1}{R^2} = \frac{\cos i^2}{b^2} + \frac{\sin i^2}{a^2},$$

welche Gleichung, mit (3) und n. 16. verglichen, den L beweist: Eine im Horizont eines Orts beschriebene Ellipse den Horizontalschnitten des Erd-Sphäroids für denselben Or ist, hat durchweg Halbmesser, welche den Quadratwur den Krümmungshalbmessern der entsprechenden Vertical- proportional sind.

Den sphäroidischen Excess betreffe

Die gemessenen Winkel eines geodätischen Dreiecks sin lich Winkel zwischen Vertical-Schnitten des Sphäroi denen die Durchschnittlinien der Ebenen, im Allgemeinen stens, keine dreikantige Ecke bilden, indem diese drei Li der Rotations-Axe in drei oder doch in zwei verschiedene ten zusammenzutreffen pflegen. Den Excess dieser gem Winkel über zwei Rechte pflegt man aber, weil er in der R wenige Secunden beträgt, zu berechnen, als ob das sphaer Dreieck (welches ganz streng genommen gar nicht einmal z lauter Verticalschnitten, sondern zwischen drei „geodätisc

nien" liegt) ein sphärisches wäre. Will man jedoch bei dieser nur annähernd richtigen Voraussetzung nicht allzusehr wissentlich von der Wahrheit abweichen, so ist der Halbmesser (H) der Kugel, welche man dabei zum Grunde legen will, vor Allem erst gehörig festzusetzen. Dazu führen nun folgende, an das Obige sich unmittelbar anschliessende Betrachtungen.

1. Denkt man sich an einem Punkt des Sphäroids ausser der berührenden Ebene (dem Horizont) auch noch eine berührende Kugel, so muss deren Halbmesser mit der Verticale des Orts zusammenfallen. Ein unendlich kleiner Theil sowohl der sphäroidischen Fläche als der Kugelfläche um den Berührungspunkt, muss dann als in die Berührungsebene fallend angesehen werden können.

Solche Flächen-Elemente kann man aber construiren. Dazu errichte man zuvörderst in einer einstweilen beliebigen Tiefe (t) vom Berührungspunkt gegen die Rotations-Axe hin, eine der Berührungsebene parallele, also auf der Verticale senkrechte Ebene. Diese schneidet auf dem Sphäroid eine Ellipse mit der Excentricität $e^2 k^2 \cos N^2$ ab (siehe §. 9. 6)), deren Mittelpunkt in der Verticale liegt, und deren Grösse nur von t abhängt. Auf der Kugel aber wird ein Kreis abgeschnitten, dessen Grösse ausser von t auch noch von dem Halbmesser H derselben abhängt.

Denkt man sich nun eine durch den Mittelpunkt der Kugel gehende gerade Linie auf dem Umfang des letzterwähnten kleinen Kugelkreises herumgeführt, so beschreibt dieselbe auf dem Horizont die Grundfläche eines geraden kreisförmigen Kegels. Eben so erhält man einen geraden elliptischen Kegel mit derselben Spitze, wenn man die Linie auf dem Umfang des elliptischen Schnitts herumführt.

In beiden Fällen wird die aus der Kegelspitze so auf den Horizont projicirte ebene Figur zu ihrer Projection selbst in einem bestimmten Verhältniss stehen, nämlich rücksichtlich der linearen Dimensionen im Verhältniss $(H-t):H$ und rücksichtlich der Flächengrösse im Verhältniss $(H-t)^2:H^2$.

Lässt man endlich t so weit abnehmen, bis alle Durchmesser der betreffenden Schnitte unendlich klein werden, so sind dieselben im Sinn dieses §. 6. als Elemente der Bögen zu betrachten, welche auf den entsprechenden krummen Flächen dadurch erzeugt werden, dass man durch die Axe der obigen Kegel Ebenen legt. Zugleich aber müssen dann die Schnitte als mit ihren entsprechenden Projectionen auf den Horizont zusammenfallend gedacht werden, und sind also ihre Figuren als die gesuchten Flächen-Elemente zu betrachten. Die oben erwähnten geraden Kegel werden dann Körper-Elemente.

2. Weil nun eine Ellipse mit einem ihr concentrischen Kreise nicht congruent werden kann, so kann man auch nicht wie oben §. 6. auf Congruenz der Bogen-Elemente, wohl aber auf Gleichheit der Flächen-Elemente und also auch der Körper-Elemente die Bestimmung des noch festzusetzenden Kugelhalbmessers H gründen. Das heisst mit andern Worten: man wird das H, und also das Kreis-Element, welches mit dem elliptischen Element gleiches t hat, so bestimmen können, dass innerhalb und ausserhalb des letzteren zwei Paar Monde entstehen, welche gleichen Flächeninhalt haben, wie **Fig. 9.** roh angedeutet ist.

3. Betrachtet man nun zuerst den Kreis, welcher in einer

endlichen Tiefe t auf der Kugel entsteht, und bezeichnet seinen Halbmesser mit s, so ist bekanntlich **Fig. 10.**

$$(38)\quad s^2 = t(2H - t) = 2Ht - t^2.$$

Da nun aber

$$(39)\quad s = H \sin M$$
$$t = 2H \sin \tfrac{1}{2}M^2,$$

so gehört zu einem unendlich kleinen s ein t, welches im zweiten Grade unendlich klein ist, und muss also bei dieser Voraussetzung in (38) das letzte Glied t^2 gegen $2Ht$ verschwinden.

Demnach hat man für ein solches im zweiten Grade unendlich kleines t, welches mit τ bezeichnet werden möge, den entsprechenden Halbmesser des Kreis-Elements, welcher σ heissen mag, und als mit einem halben Bogen-Element auf der Kugel zusammenfallend gedacht wird, zu berechnen nach der Formel

$$(40)\quad \sigma\sigma = 2H\tau.$$

Man erhält demnach die Fläche des Kreis-Elements f durch die Formel

$$(41)\quad f = \pi\sigma\sigma = 2\pi \,.\, H \,.\, \tau.$$

Hieraus kann man auch schon gelegentlich überschlagen, in wie weit für ein vorliegendes Bedürfniss des practischen Lebens unsere Annäherung sich der Wirklichkeit anschliesst. Denn auf einer Kugel von nur 800 preussischen Meilen Halbmesser würde für einen Schacht von 1500 preussischen Fuss (etwa halb so tief als der Inselsberg hoch ist) das f schon über 300 Quadratmeilen betragen. Es umschlösse ein solches Kreis-Element ein gleichseitiges Dreieck von ungefähr 17 Meilen Seite und 40″ Excess.

4. Die Betrachtung des elliptischen Elements muss nun davon ausgehen, dass für dasselbe τ die σ verschiedener Länge sind, wenn wir sie als geradlinig betrachten, und zugleich als mit verschiedenen Krümmungshalbmessern beschrieben, wenn wir sie als Bögen des Sphäroids betrachten.

Bezeichnen wir also das mit dem Meridian zusammenfallende σ (die halbe kleine Axe unsers Elements) mit σ', das in das Perpendikel auf den Meridian fallende (die halbe grosse Axe) mit σ'', so haben wir durch dieselben Schlüsse, die uns zu (40) führten,

$$(42)\quad \sigma'\sigma' = 2r\tau$$
$$\sigma''\sigma'' = 2n\tau.$$

Jedes andere σ des elliptischen Elements würde mit seinem eigenen m zu berechnen sein, nach **n. 16** und dem dabei angeführten Lehrsatz.

Für die Fläche des elliptischen Elements, die mit f' bezeichnet werden mag, ergiebt sich also nach dem bekannten Satz über die Quadratur der Ellipse

$$(43)\quad f' = \pi\sigma'\sigma'' = 2\pi \,.\, \sqrt{rn} \,.\, \tau.$$

5. Setzen wir endlich, unserer Annahme gemäss, die beiden Elemente einander gleich, so entspringt die Gleichung

$$\text{n. 18} \quad H = \sqrt{rn},$$

d. h. der Lehrsatz: Das geometrische Mittel aus den beiden extremen Krümmungshalbmessern ist zum Kugelhalbmesser zu nehmen, wenn man den sphäroidischen Excess als einen sphärischen zu berechnen sich erlauben will.

Dieses geometrische Mittel ist übrigens nach **n. 14** und **n. 15** vermöge der Proportion

$$(1-e^2)^{\frac{1}{2}} : (1-e^2)k = k : \sqrt{rn}$$

auch als die vierte Proportionale zu der halben kleinen Axe, der Normale und der Conormale zu betrachten, und somit in der Ebene des Meridians leicht zu construiren.

6. Es bleibt nur noch übrig, den Punkt des sphäroidischen Dreiecks zu bestimmen, für welchen die r und n gelten (aus den Tafeln genommen werden) sollen, die wir nach dem Vorhergehenden für Berechnung des Excesses gebrauchen.

Dazu wählte ich denjenigen Punkt, dessen Polhöhe das arithmetische Mittel aus den Polhöhen der Winkelpunkte ist. Denn denke ich mir das Dreieck als eben, und die betreffenden Meridianbögen der beiden nördlicheren Punkte als geradlinige Perpendikel auf den gleichfalls als geradlinig gedachten Parallelkreis durch den südlichsten Punkt, so erhalte ich auf diese Weise mit grösster Bequemlichkeit den Schwerpunkt des ebenen Dreiecks, welcher die bekannte Eigenschaft hat, dass jede durch ihn und einen Winkelpunkt gezogene gerade Linie das Dreieck in Hälften von gleichem Flächeninhalt theilt.

III.

Verschiedene mathematische Bemerkungen.

Von dem

Herrn Professor C. T. Anger

zu Danzig.

---

1. Die Gaussischen Gleichungen für ebene Dreiecke.

Die Gaussischen Gleichungen:

$$\text{I.}\quad \sin\tfrac{1}{2}(b-c).\cos\tfrac{1}{2}A=\sin\tfrac{1}{2}a.\sin\tfrac{1}{2}(B-C)$$
$$\text{II.}\quad \sin\tfrac{1}{2}(b+c).\sin\tfrac{1}{2}A=\sin\tfrac{1}{2}a.\cos\tfrac{1}{2}(B-C)$$
$$\text{III.}\quad \cos\tfrac{1}{2}(b-c).\cos\tfrac{1}{2}A=\cos\tfrac{1}{2}a.\sin\tfrac{1}{2}(B+C)$$
$$\text{IV.}\quad \cos\tfrac{1}{2}(b+c).\sin\tfrac{1}{2}A=\cos\tfrac{1}{2}a.\cos\tfrac{1}{2}(B+C)$$

bieten die Frage dar, was aus ihnen werde, wenn die Seiten des sphärischen Dreiecks unendlich klein angenommen werden, d. h. wenn sich das sphärische Dreieck in ein ebenes verwandelt, dessen Seiten a, b, c und dessen Winkel A, B, C sind. Man ersieht leicht, dass sich dadurch die folgenden ergeben:

$$1.\quad (b-c).\cos\tfrac{1}{2}A=a\sin\tfrac{1}{2}(B-C)$$
$$2.\quad (b+c).\sin\tfrac{1}{2}A=a\cos\tfrac{1}{2}(B-C)$$
$$3.\quad \cos\tfrac{1}{2}A=\sin\tfrac{1}{2}(B+C)$$
$$4.\quad \sin\tfrac{1}{2}A=\cos\tfrac{1}{2}(B+C).$$

Die Gleichungen 3. und 4. geben nichs Neues, sondern sprechen nur den Satz aus, dass in einem ebenen Dreiecke die Summe der drei Winkel zweien Rechten gleich ist. Die Gleichungen 1. und 2. dagegen geben jene eleganten Formeln der Trigonometrie, welche früher in den Lehrbüchern vermisst wurden, gegenwärtig aber, nachdem Mollweide und später Gerling ihrer erwähnt haben, bekannter geworden sind. Mollweide stellt in einem Aufsatze in v. Zach's monatlicher Correspondenz vom Jahre 1808. S. 396. die beiden Proportionen auf

$$b+c:a=\cos\tfrac{1}{2}(B-C):\sin\tfrac{1}{2}A$$
$$b-c:a=\sin\tfrac{1}{2}(B-C):\cos\tfrac{1}{2}A,$$

welche resp. mit den Gleichungen 2. und 1. identisch sind, und bemerkt dabei, dass man diese eleganten Sätze, welche in einem

vollständigen System der Trigonometrie nicht fehlen sollten, sehr leicht aus Betrachtung der Figur erweise. Ungefähr 16 Jahre später giebt Gerling in Schumacher's Astronomischen Nachrichten No. 62. dieselben Formeln mit folgender Bemerkung: „So nützlich ich diese Formeln, welche ich vor einigen Jahren zufällig fand, für die Ausführung halte, so unwahrscheinlich ist mir doch, dass sie neu sein sollten, weil ihre Ableitung aus der Gleichung $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$ gar zu nahe liegt. Ich habe sie aber bis jetzt in keinem Lehrbuche aufgefunden".

Aus der obigen Ableitung ersieht man, dass diese Formeln für die ebene Trigonometrie nichts Anderes sind, als die Gaussischen für die sphärische. Durch solche Betrachtungen, welche ich beim Unterrichte nicht gerne unterlasse, tritt dem Schüler der innere Organismus der Wissenschaft oft deutlich vor Augen. Diese Gleichungen ergeben auch, wenn man auf beiden Seiten aufs Quadrat erhebt und dann addirt, ohne geometrische Betrachtung, sogleich die Erweiterung des pythagorischen Satzes.

II. Ueber die allgemeine Ableitung der Grundformel der sphärischen Trigonometrie.

Es ist bekanntlich von Wichtigkeit die Grundformel der sphärischen Trigonometrie in ihrer Allgemeinheit abzuleiten, d. h. so, dass die Richtigkeit derselben für alle sphärische Dreiecke, die Seiten mögen über 90° oder über 180° u. s. w. gehen, erwiesen werde. Dieses geschieht nun auch, indem man für die verschiedenen Fälle besondere Figuren entwirft, und für jede einzelne den Beweis führt. Da es aber wünschenswerth erscheint, sich nur einer Figur bedienen zu dürfen, so stellte ich mir vor etwa 20 Jahren die Aufgabe: „die Grundformel der sphärischen Trigonometrie so abzuleiten, dass eine Figur dabei ausreiche, und ein ferneres Zurückgehen zu geometrischen Betrachtungen nicht nöthig sei." Die Ableitung, welche ich fand, habe ich damals einigen Freunden mitgetheilt, auch mich derselben beim Unterrichte in der hiesigen Navigationsschule vor Zeiten mit Vortheil bedient, denn dort kam es besonders darauf an, Kürze mit mathematischer Allgemeinheit zu verbinden. Da sie mir, bis jetzt wenigstens, noch in keinem Lehrbuche vorgekommen ist, so erlaube ich mir, diese Kleinigkeit der öffentlichen Beurtheilung zu übergeben.

Bezeichnet man die Seiten eines sphärischen Dreiecks durch a, b, c, die Winkel und die Eckpunkte desselben durch A, B, C; denkt man sich von einem beliebigen Eckpunkte, etwa von A, einen Radius der Kugel gezogen, legt durch den Mittelpunkt derselben eine Ebene auf diesen Radius perpendiculär, und fällt von den Punkten B und C auf diese Ebene Lothe, so entsteht, wenn man die Fusspunkte derselben durch B' und C' bezeichnet, in jener Ebene, welche zu-[illegible]ich die des Papiers sein mag, durch Verbindung des Mittelpunk-[illegible] M mit B' und C' ein ebenes Dreieck $MB'C'$ (Taf. I. Fig. 3.), [illegible]ch dessen Betrachtung sich Alles ergiebt. Es ist nämlich offen-[illegible] der Winkel $B'MC'$ gleich dem sphärischen Winkel A, die

Seite $MC' = \sin b$, die Seite $MB' = \sin c$, und man hat $(B'C')^2 = (2\sin\frac{1}{2}a)^2 - (\cos b - \cos c)^2$, also nach der Erweiterung des pythagorischen Satzes die Gleichung:

$$(2\sin\tfrac{1}{2}a)^2 - (\cos b - \cos c)^2 = \sin^2 b + \sin^2 c - 2\sin b \,.\, \sin c \,.\, \cos A,$$

deren Entwickelung sogleich

$$\cos a = \cos b \,.\, \cos c + \sin b \sin c \,.\, \cos A$$

ergiebt.

Die Kraft dieses Beweises liegt in dem Umstande, dass die Geraden MB' und MC' immer ihre Bedeutung behalten, die Seiten des sphärischen Dreiecks mögen so gross sein, als man wolle, denn die Punkte B' und C' sind durch Projection der Eckpunkte B und C entstanden. Dasselbe gilt in Bezug auf den Ausdruck für $(B'C')^2$.

III. Zur Theorie des Kater-Bohnenbergerschen Reversionspendels.

Die elegante Eigenschaft des Pendels mit reciproken Axen kann auf folgende Weise sehr einfach bewiesen werden.

Eine gerade unbiegsame um einen festen Punkt bewegliche Stange, deren Schwere vorläufig $= 0$ gesetzt werden kann, sei an ihren Enden mit zwei Gewichten m und m' beschwert, deren Entfernungen vom Aufhängungspunkt resp. $-r$ und r' sein mögen, dann ist die Länge des einfachen Pendels, welches mit dem gegebenen gleichzeitig schwingt,

$$l = \frac{m'r'^2 + mr^2}{m'r' - mr}.$$

Nimmt man unterhalb jenes Aufhängungspunktes einen andern Punkt als solchen an, und lässt das Pendel, nachdem es umgekehrt worden, um diesen schwingen, so ist, wenn nun die Entfernungen desselben von den Gewichten resp. durch $-\varrho'$ und ϱ bezeichnet werden, die Länge des mit dem gegebenen gleichzeitig schwingenden einfachen Pendels

$$L = \frac{m'\varrho'^2 + m\varrho^2}{-m'\varrho' + m\varrho}.$$

Soll das Pendel um beide Aufhängungspunkte in gleichen Zeiten schwingen, so muss

$$l = L$$

sein. Man hat aber offenbar

$$r + r' = \varrho + \varrho' = a,$$

wo a die Länge der ganzen Stange bedeutet; und wenn man die Entfernung der beiden Aufhängungspunkte von einander durch b bezeichnet,

$$a = b + r + \varrho',$$

also

$$\varrho = b + r,\ \varrho' = r' - b.$$

Die Gleichung

$$l = L$$

giebt nun

$$\frac{m'r'^2 + mr^2}{m'r' - mr} = \frac{m'(r' - b)^2 + m(r + b)^2}{-m'(r' - b) + m(r + b)}$$

$$= \frac{m'r'^2 + mr^2 - 2(m'r' - mr)b + (m + m')b^2}{-m'r' + mr + (m + m')b},$$

aus welcher für b die quadratische Gleichung:

$$0 = \frac{2(m'r'^2 + mr^2)}{m + m'} - \left\{\frac{2(m'r' - mr)}{m + m'} + \frac{m'r'^2 + mr^2}{m'r' - mr}\right\} b + b^2$$

hervorgeht. Die Wurzeln finden sich sogleich durch blosse Ansicht der Coefficienten, man erhält nämlich für b die beiden Werthe

$$\frac{m'r'^2 + mr^2}{m'r' - mr} \text{ und } \frac{2(m'r' - mr)}{m + m'},$$

von denen hier nur der erste in Betracht kommt. Man ersieht hieraus, dass $b = l = L$ wird, d. h. wenn das Pendel in beiden Lagen gleichzeitig schwingt, so ist die Entfernung der beiden Aufhängungspunkte von einander gleich der Länge eines einfachen Pendels, welches mit dem gegebenen gleichzeitig schwingt. Die Bedeutung der andern Wurzel liegt am Tage.

IV.

Neuer Beweis der Formeln für die figurirten Zahlen, nebst kritischen Bemerkungen über die bisherigen Beweise.

Von

Herrn Dr. F. Stegmann,

Lehrer an der Realschule und Privatdocenten an der Universität zu Marburg.

Unter figurirten Zahlen werden hier diejenigen arithmetischen Progressionen verstanden, welche durch successives Summiren aus der Grundreihe 1, 1, 1, 1, ... entstehen und nicht diejenigen, welche aus der allgemeineren Grundreihe 1, d, d, d.... abgeleitet werden können. Demgemäss ist die figurirte Zahlenreihe erster Ordnung einerlei mit der Zahlenreihe

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots .$$

die figurirte Zahlenreihe zweiter Ordnung ist

$$1, 3, 6, 10, 15, \ldots .$$

die figurirte Zahlenreihe dritter Ordnung ist

$$1, 4, 10, 20, 35, \ldots .$$

u. s. f.

Bei der Beschäftigung mit diesen Reihen bieten sich zunächst die zwei bekannten Aufgaben dar, mit welchen für den öffentlichen Unterricht in der Regel wohl der ganze Inhalt dieser Lehre zugleich abgeschlossen sein mag, nämlich erstens die Aufgabe, von jeder figurirten Zahlenreihe einer beliebigen ($k$ten) Ordnung das allgemeine ($n$te) Glied, und zweitens die Summenformel für die n ersten Glieder anzugeben. Da aber wegen der Entstehungsart der auf einander folgenden Zahlenreihen die Summe der n ersten Glieder der $k$ten Reihe identisch ist mit dem $n$ten Gliede der $(k+1)$ten Reihe, so erhält das zweite Problem natürlich seine Erledigung zugleich mit dem ersten. Nun findet man zwar in allen Lehrbüchern der allgemeinen Arithmetik, welche über die ersten Anfangsgründe hinausgehen, den Satz ausgesprochen, dass allgemein das $n$te Glied der $k$ten Reihe gleich

$$\frac{n(n+1)(n+2)\ldots.(n+k-1)}{1.2.3\ldots.k}$$

oder, nach einer vielgebrauchten Bezeichnung der Binomialcoefficienten, gleich $\binom{n+k-1}{k}$ sei. Für den Beweis dieses Satzes hat man aber bisher, wie es scheint, nur zwei Wege angegeben, von denen unserem Bedünken nach weder der eine noch der andere den Anforderungen des öffentlichen Unterrichts so vollkommen, wie es gewünscht werden muss, zu entsprechen vermag.

Die eine dieser beiden Beweisführungen stützt sich nämlich auf eine bekannte Formel, welche für das allgemeine Glied einer jeden arithmetischen Progression $k$ter Ordnung Gültigkeit hat:

$$(1)\ u_n = u_1 + \binom{n-1}{1}\Delta u_1 + \binom{n-1}{2}\Delta^2 u_1 + \binom{n-1}{3}\Delta^3 u_1 + \ldots + \binom{n-1}{k}\Delta^k u_1,$$

wobei u_1 das Anfangsglied und Δu_1, $\Delta^2 u_1$, $\Delta^3 u_1$, ... die ersten Glieder der auf einander folgenden ersten, zweiten u. s. f. Differenzreihen bedeuten. Indem man nun diese Formel auf die figurirten Zahlen zweiter Ordnung anwendet, erhält man

$$u_1 = 1,\ \Delta u_1 = 2,\ \Delta^2 u_1 = 1,$$

also

$$u_n = 1 + \binom{n-1}{1}.2 + \binom{n-1}{2}$$

und nach einigen Reductionen wird man die dreitheilige Summe rechter Hand allerdings auf den Ausdruck $\frac{n(n+1)}{1.2} = \binom{n+1}{2}$ bringen, wie es sein soll.

Indem man alsdann die Formel (1) auf die figurirten Zahlen dritter Ordnung anwendet, erhält man

$$u_1 = 1,\ \Delta u_1 = 3,\ \Delta^2 u_1 = 3,\ \Delta^3 u_1 = 1,$$

also

$$u_n = 1 + \binom{n-1}{1}.3 + \binom{n-1}{2}.3 + \binom{n-1}{3}$$

und nach einigen Reductionen wird man auch hier die viertheilige Summe rechter Hand auf die Form $\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3} = \binom{n+2}{3}$ gebracht haben, wie es sein soll.

Und auf gleiche Weise kann man allerdings auch für das allgemeine Glied der figurirten Zahlenreihe vierter, fünfter, u.s.w. Ordnung die betreffenden Ausdrücke aus der allgemeinen Gleichung (1) herleiten. Allein abgesehen davon, dass diejenigen Reductionen, welche erforderlich sind, um den für u_n erhaltenen Ausdruck aus seiner ursprünglichen Form auf die gewünschte Form überzuführen, bei jedem neuen Fortschritt zu einer höheren Ordnung immer verwickelter ausfallen; so kann doch offenbar, wenn man auch bei dem Unterrichte die Mühe nicht scheuen wollte, diese weitläuftigen und regellosen Reductionen sogar bis zur vierten oder fünften Ord-

nung fortzuführen, hierdurch allein die Hauptsache, worauf es ankommt, nämlich dass die gedachte Transformation für jede beliebige Ordnung möglich sei, keineswegs zur Evidenz gebracht werden. Gleichwohl scheint durch eine solche Induction öfters die Sache erledigt worden zu sein, man vergleiche z. B. das in vieler Hinsicht sehr schätzbare Compendium der höheren Mathematik von Burg. §. 237.

Die andere Beweisart stellt geradezu für das $n$te Glied der $k$ten Ordnung die Formel

$$(2)\quad u_n = \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+k-1)}{1.2.3\ldots k}$$

als ein Theorem auf, entweder ohne alle Bevorwortung, wie z. B. in Ohm's System d. Math. 2r Theil. S. 26., oder wie z. B. in dem mit Recht gerühmten Lehrbuch der Allgem. Arithm. von J. H. T. Müller (Halle 1838) S. 426. geschieht, als ein Resultat, welches „man erwarten könnte", nachdem man für die beiden ersten Ordnungen die Ausdrücke n und $\frac{1}{2}n(n+1)$ unmittelbar und ohne alle Mühe gefunden hat, und zeigt alsdann, dass diese allgemeine Formel (2), wenn sie für die $k$te Ordnung gilt, auch für die $(k+1)$te ihre Richtigkeit behalte. So wenig nun aber gegen eine solche Beweisführung von Seiten einer strengen Theorie Einwendungen gemacht werden können, so wenig möchte sie doch in didaktischer Hinsicht den gerechtesten Anforderungen Genüge leisten. Denn die belebende Kraft des Unterrichts in der Analysis besteht gerade darin, dass er nicht gezwungen ist, die auf einander folgenden Lehrsätze als isolirt stehende Wahrheiten zu demonstriren, welche durch den glücklichen Einfall dieses oder jenes Mathematikers entdeckt worden, sondern dass er vermag, jedes Resultat vor den Augen der Lernenden gleichsam von Neuem zu entdecken, dass er diese in den Stand setzt, den Ursprung jedes spätern Satzes als Ausfluss bereits erkannter Wahrheiten klar anzuschauen und ihre Neigung, wie ihre Fähigkeit, im eintretenden Fall selbstständig eine gesuchte Formel direkt zu entwickeln, stufenweise steigert. Was den Gymnasialunterricht insbesondere anbelangt, so kann es zwar durchaus nicht meine Absicht hier sein, mich über die Frage zu verbreiten, ob es überhaupt nöthig oder überflüssig, nützlich oder unrathsam sei, die Formeln über die arithmetischen Reihen höherer Ordnung und die figurirten Zahlen noch in den Cursus der obersten Klasse aufzunehmen, oder ob diese Lehre definitiv dem höheren Unterrichte vorbehalten werden müsse. Auch muss ich mich gegen den Schein verwahren, wenn ich gegen die bisher gelieferten Beweise dieser Formeln, wie sie in verschiedenen, zum Theil auch für den Gymnasialunterricht bestimmten Lehrbüchern aufgenommen sind, hier einige Ausstellungen mache, dass ich dadurch der Didaktik der Herren Verfasser zu nahe träte, weil ja natürlich durch den mündlichen Unterricht leicht ausgeglichen werden wird, wo das Lehrbuch vielleicht absichtlich eine Lücke gelassen haben sollte. Allein wenn alle Sachverständigen heutiges Tages darüber einverstanden sind, dass an Gymnasien die Mathematik vorzüglich wegen ihres formalen Nutzens gelehrt werden müsse, damit sich eine gewisse Seite der Geistesanlagen der heranzubildenden Jugend gehörig entfalten könne, so wird man auch

gern von dem arithmetischen Unterricht alles fern zu halten suchen, was dem Geist einer ungezwungenen und dem jugendlichen Sinn zugänglichen heuristischen Analysis, was einer Methode nicht zusagt, welche sich zum Grundsatz macht, von bekannten Thatsachen in jedem einzelnen Falle auszugehen und auf natürlichem und leicht findbarem Wege, ohne gewaltsame Sprünge, das weitere Ziel zu erreichen. Und dass es einer solchen Methode schnurstracks zuwider läuft, wenn man, wie z. B. in dem Anhang des Ohm'schen Lehrbuchs für den Elementarunterricht (2te Aufl. §. 4. fgg.) mehrmals geschieht, irgend eine Formel, welche erst das Resultat einer Entwickelung sein sollte, geradezu aufstellt, ihre Richtigkeit für $n = 1$ oder $n = 2$ „probirt und dann darthut, dass sie immer für jede um Eins grössere Zahl $n = h + 1$ gelte, wenn sie für $n = h$ zutrifft", dies scheint nicht wohl in Abrede gestellt werden zu können.

Anders würde sich die Sache freilich verhalten, wenn man den Schüler zu der Formel (2) zuvörderst durch eine einfache Induction hinzuführen im Stande wäre, so dass die Worte „es lässt sich erwarten, dass das inducirte Gesetz allgemein gelte" für jeden sich als wahr erwiesen, und wenn man alsdann erst die so fruchtbare Schlussfolge von n auf $(n+1)$ und von k auf $(k+1)$ anwendete. Wollte man aber zum Zwecke einer solchen Induction die vorher bezeichnete erste Beweisführung mit der zweiten combiniren, so würde der ganze Beweis eine Weitläuftigkeit annehmen und bei dem Unterricht eine Zeit erfordern, wie sie gar nicht mit der Wichtigkeit des Gegenstandes im Verhältniss stehen möchte. Es wird daher wohl nicht unnütz sein, auf einen andern und directen Beweis der gedachten Formel (2) aufmerksam zu machen, welcher sich, wie ich glaube, durch Einfachheit und Kürze besonders empfiehlt, von welchem ich aber, obwohl er sich fast von selbst darzubieten scheint, nirgends eine Spur aufzufinden vermochte.

Ich gründe diesen Beweis unmittelbar auf die Eigenschaften der Binomialcoefficienten. Zwar weiss ich wohl, dass man neuerdings in den Lehrbüchern öfters den binomischen Lehrsatz erst ganz spät nach der Lehre von den Progressionen und den arithmetischen Reihen höherer Ordnung seine Stelle angewiesen hat; da aber dieser Satz so überaus wichtig ist und überdies eine gleich Anfangs in der Potenzlehre offen gelassene Lücke ausfüllt, so hege ich nach wie vor die Ueberzeugung, dass es am zweckmässigsten sei, gleich nach der Lehre von den Potenzen und Logarithmen die Combinationen, dann den binomischen Lehrsatz für ganze Exponenten, und hierauf erst die Reihen folgen zu lassen. Es möge mir daher erlaubt sein, unter der Voraussetzung, dass der Exponent der Potenz $(a+b)^p$ eine positive ganze Zahl sei, bei dem folgenden Beweise von zwei bekannten Eigenschaften der Binomialcoefficienten auszugehen, erstens dass

$$\binom{p}{0} + \binom{p}{1} = 1 + p = \binom{p+1}{1}$$

$$\binom{p}{1} + \binom{p}{2} = \binom{p+1}{2}$$

$$\binom{p}{2} + \binom{p}{3} = \binom{p+1}{3} \text{ u. s. f.}$$

allgemein

$$(3) \ldots \binom{p}{n-1} + \binom{p}{n} = \binom{p+1}{n}$$

und zweitens dass

$$\binom{p}{0} = \binom{p}{p}$$
$$\binom{p}{1} = \binom{p}{p-1}$$
$$\binom{p}{2} = \binom{p}{p-2}$$

u. s. f.

allgemein

$$(4) \ldots \binom{p}{r} = \binom{p}{p-r}$$

ist.

---

§. 1.

Die auf einander folgenden Reihen figurirter Zahlen sind

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	. . .
$\overset{0}{u}$	1	1	1	1	1	1	1	. . .
$\overset{1}{u}$	1	2	3	4	5	6	7	. . .
$\overset{2}{u}$	1	3	6	10	15	21	28	. . .
$\overset{3}{u}$	1	4	10	20	35	56	84	. . .
$\overset{4}{u}$	1	5	15	35	70	126	210	. . .
.	.	.	.	.	.	.	.	. . .

Um ein beliebiges $n$tes Glied aus einer dieser Reihen zu bezeichnen, wollen wir uns der Symbole $\overset{0}{u}_n$, $\overset{1}{u}_n$, $\overset{2}{u}_n$ u. s. f. bedienen, so dass z. B. die in der vierten Horizontalreihe befindliche Zahl 84 durch $\overset{3}{u}_7$ vorgestellt sein soll.

Ferner wollen wir die Summe der n ersten Glieder einer dieser Reihen, nämlich

$$\overset{k}{u}_1 + \overset{k}{u}_2 + \overset{k}{u}_3 + \overset{k}{u}_4 + \ldots + \overset{k}{u}_{n-1} + \overset{k}{u}_n$$

durch $\overset{k}{S}_n$ andeuten.

Die Bildungsweise der figurirten Zahlen wird alsdann erstens durch folgende Gleichung

$$(A) \ldots \overset{k+1}{u}_n = \overset{k}{S}_n \text{ oder } \overset{k}{u}_n = \overset{k-1}{S}_n$$

unzweideutig charakterisirt.

Bequemer ist jedoch für die successive Berechnung jedes folgenden Gliedes $\overset{k+1}{u}_n$ aus dem vorhergehenden $\overset{k+1}{u}_{n-1}$ die Formel

$$(B) \ldots \overset{k+1}{u}_n = \overset{k+1}{u}_{n-1} + \overset{k}{u}_n$$

welche unmittelbar aus (A) folgt, weil $\overset{k}{S}_n = \overset{k}{S}_{n-1} + \overset{k}{u}_n = \overset{k+1}{u}_{n-1} + \overset{k}{u}_n$ ist. So ist z. B. $\overset{4}{u}_6 = 126$ entstanden durch Addition von $\overset{4}{u}_5 = 70$ und $\overset{3}{u}_6 = 56$.

§. 2.

Man bemerke nun, wenn man in der quadratförmigen Zusammenstellung dieser figurirten Zahlen, so wie es in der folgenden Figur geschehen ist, von links nach rechts aufsteigende Diagonallinien zieht,

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
0	1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	4	5	6
2	1	3	6	10	15	21
3	1	4	10	20	35	56
4	1	5	15	35	70	126
5	1					

dass alsdann

durch die erste Diagonale verbunden werden 1 und 1
" " zweite " " " 1, 2, 1
" " dritte " " " 1, 3, 3, 1
u. s. f.,

also der Reihe nach die Binomialcoefficienten zur ersten, zweiten, dritten u. s. f. Potenz. Dass dieses Gesetz, wenn es für eine beliebige dieser aufsteigenden Reihen z. B. die $p$te stattfindet, auch für die folgende $(p+1)$te Richtigkeit behalten müsse, ist leicht einzusehen. Denn erstens fängt diese folgende Reihe offenbar ebenfalls mit 1 an, zählt ein Glied mehr als die vorhergehende und endigt wieder mit 1. Und ausserdem ist vermöge der Entstehung der figurirten Zahlen (Gleichung B) das zweite Glied dieser folgenden Diagonalreihe gleich der Summe des ersten und zweiten Gliedes der vorhergehenden, ihr drittes Glied gleich der Summe des zweiten und dritten Gliedes der vorhergehenden u. s. f., es sind also die Glieder dieser $(p+1)$ten Diagonalreihe ganz ebenso aus denen der $p$ten Reihe abzuleiten, wie den Formeln (3) zu Folge die Binomialcoefficienten zur $(p+1)$ten Potenz aus denen zur $p$ten Potenz entstehen.

Wenn wir daher, um ein beliebiges Glied einer dieser schräg aufsteigenden Diagonalreihen zu bezeichnen, den Träger z anstatt u wählen, im Uebrigen aber die Bezeichnung der früher gewählten gleich lassen, so dass z. B. die Reihe

$$\overset{4}{z}_1 \quad \overset{4}{z}_2 \quad \overset{4}{z}_3 \quad \overset{4}{z}_4 \quad \overset{4}{z}_5$$

einerlei sein soll mit der von links nach rechts aufsteigenden Diagonalreihe

1 4 6 4 1

nämlich

$$\binom{4}{0}\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{4}$$

so sind wir im Stande, das vorher nachgewiesene Gesetz durch die Gleichung auszusprechen

$$(\mathrm{C}.\alpha) \ldots \overset{p}{z}_n = \binom{p}{n-1},$$

wobei p und $n \leqq (p+1)$ zwei positive ganze Zahlen andeuten sollen, oder auch vermöge der Gleichung (4) durch

$$(\mathrm{C}.\beta) \ldots \overset{p}{z}_n = \binom{p}{p-n+1}.$$

Nun ersieht man aber aus dem vorher aufgestellten Schema der figurirten Zahlen sogleich, dass

$\overset{p}{z}_1 =$ dem ersten Gliede der $p$ten Horizontalreihe $= \overset{p}{u}_1$

$\overset{p}{z}_2 =$ - zweiten - - $(p-1)$ten - $= \overset{p-1}{u}_2$

$\overset{p}{z}_3 =$ - dritten - - $(p-2)$ten - $= \overset{p-2}{u}_3$

u. s. f.

nämlich allgemein

$$\overset{p}{z}_n = \overset{p-n+1}{u}_n.$$

Setzt man daher $p - n + 1 = k$, also $p = k + n - 1$, so wird

$$\overset{k}{u}_n = \overset{k+n-1}{z}_n$$

oder, indem man jetzt eine der Gleichungen (C) zu Hülfe ruft, entweder

$$(\mathrm{D}.\alpha) \ldots \overset{k}{u}_n = \binom{k+n-1}{n-1}$$

oder

$$(\mathrm{D}.\beta) \ldots \overset{k}{u}_n = \binom{k+n-1}{k}.$$

Diese letztere ist die verlangte Formel. Setzt man darin der Reihe nach $k = 0, 1, 2, 3 \ldots$, so ergiebt sich

für die Reihe	das allgemeine Glied
1, 1, 1, 1, 1,....	$\binom{n-1}{0}=1$
1, 2, 3, 4, 5,....	$\binom{n}{1}=n$
1, 3, 6, 10, 15,....	$\binom{n+1}{2}=\frac{n(n+1)}{1.2}$
1, 4, 10, 20, 35,....	$\binom{n+2}{3}=\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}$

u. s. f.

§. 3.

Um aber eine beliebige $k$te Reihe in ihrer völligen Allgemeinheit, nämlich die ersten Glieder derselben als Functionen von k, so dass ein gewisses Bildungsgesetz möglichst klar erkannt werde, und ihr allgemeines Glied als eine nach eben diesem Gesetz gebildete Function von k und n herzustellen, möchte es am einfachsten sein, anstatt der Formel (D . β) sich der anderen (D . α)

$$\overset{k}{u}_n=\binom{k+n-1}{n-1}$$

zu bedienen. Denn alsdann erhält man sofort, indem man successiv $n=1, 2, 3, \ldots.$ setzt,

$$\overset{k}{u}_1=\binom{k}{0}=1,\quad \overset{k}{u}_2=\binom{k+1}{1},\quad \overset{k}{u}_3=\binom{k+2}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{1.2},$$

u. s. f.

$$\overset{k}{u}_n=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)\ldots.(k+n-1)}{1.2.3\ldots.(n-1)}.$$

Die allgemeine Reihe figurirter Zahlen $k$ter Ordnung ist also

$$1+\frac{k+1}{1}+\frac{(k+1)(k+2)}{1.2}+\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{1.2.3}+\ldots.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{(k+1)(k+2)\ldots.(k+n-1)}{1.2\ldots.(n-1)}$$

und ihre Summe ist zu Folge (A) und (D)

$$\overset{k}{S}_n=\overset{k+1}{u}_n=\binom{k+n}{k+1}=\frac{n(n+1)(n+2)\ldots.(n+k)}{1.2.3\ldots.(k+1)}$$

oder auch

$$=\binom{k+n}{n-1}=\frac{(k+2)(k+3)\ldots.(k+n)}{1.2\ldots.(n-1)}.$$

V.
Analytische Aphorismen.

Von

Herrn Doctor O. Schlömilch

zu Weimar.

I. Summirung der Reihe

$$f(x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \ldots \quad (1)$$

Soll $f(x)$ eine endliche Grösse sein, so muss $x < 1$ bleiben, ausserdem hat die Reihe keine Summe. Denkt man sich die Gleichung (1) auch für eine andere Veränderliche y hingeschrieben, so ist durch Subtraction

$$\left.\begin{array}{l} f(x) - f(y) \\ = (x-y) - \tfrac{1}{2}(x^2 - y^2) + \tfrac{1}{3}(x^3 - y^3) - \tfrac{1}{4}(x^4 - y^4) + \ldots \end{array}\right\} \quad (2)$$

Ferner hat man analog (1) auch

$$f\left(\frac{x-y}{1+y}\right) = \frac{x-y}{1+y} - \tfrac{1}{2}\left(\frac{x-y}{1+y}\right)^2 + \tfrac{1}{3}\left(\frac{x-y}{1+y}\right)^3 - \ldots$$

Nehmen wir an, dass y ein ächter Bruch sei, so lassen sich die Ausdrücke

$$\frac{1}{1+y},\ \frac{1}{(1+y)^2},\ \frac{1}{(1+y)^3},\ \ldots$$

nach dem Binomialtheorem in Reihen verwandeln und dadurch wird

$$\begin{array}{l} f\left(\frac{x-y}{1+y}\right) \\ = (x-y)\ [(-1)_0 + (-1)_1 y + (-1)_2 y^2 + (-1)_3 y^3 + \ldots] \\ - \tfrac{1}{2}(x-y)^2\ [(-2)_0 + (-2)_1 y + (-2)_2 y^2 + (-2)_3 y^3 + \ldots] \\ + \tfrac{1}{3}(x-y)^3\ [(-3)_0 + (-3)_1 y + (-3)_2 y^2 + (-3)_3 y^3 + \ldots] \\ - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Nehmen wir die einzelnen Glieder diagonal zusammen, so ergiebt sich:

$$f\left(\frac{x-y}{1+y}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= (x-y)(-1)_0 \\
&\quad + (x-y)\,[(-1)_1 y - \tfrac{1}{2}(-2)_0(x-y)] \\
&\quad + (x-y)\,[(-1)_2 y^2 - \tfrac{1}{2}(-2)_1 y(x-y) + \tfrac{1}{3}(-3)_0(x-y)^2] \\
&\quad + (x-y)\,[(-1)_3 y^3 - \tfrac{1}{2}(-2)_2 y^2(x-y) + \tfrac{1}{3}(-3)_1 y(x-y)^2 \\
&\qquad\qquad - \tfrac{1}{4}(-4)_0(x-y)^3] \\
&\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Ein allgemeines Glied dieser Reihe würde folgendes sein:

$$(x-y)[(-1)_n y^n - \tfrac{1}{2}(-2)_{n-1}y^{n-1}(x-y) + \tfrac{1}{3}(-3)_{n-2}y^{n-2}(x-y)^2 - \ldots \quad (3)$$

Betrachten wir die eingeklammerte Grösse, in der wir $x-y$ mit z bezeichnen wollen, für sich.

Es ist ein bekannter Satz von den Binomialkoefficienten, dass

$$(-m)_p = (-1)^p(m+p-1)_p$$

ist; darnach wird

$$\begin{aligned}
&(-1)_n y^n - \tfrac{1}{2}(-2)_{n-1}y^{n-1}z + \tfrac{1}{3}(-3)_{n-2}y^{n-2}z^2 - \ldots \\
&= (-1)^n\,[n_n y^n + \tfrac{1}{2}n_{n-1}y^{n-1}z + \tfrac{1}{3}n_{n-2}y^{n-2}z^2 + \ldots] \\
&= (-1)^n\,[n_0 y^n + \tfrac{1}{2}n_1 y^{n-1}z + \tfrac{1}{3}n_2 y^{n-2}z^2 + \ldots] \qquad (4)
\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck lässt sich aber bedeutend abkürzen. Es ist nämlich für jedes u

$$(1+u)^{n+1} - 1 = \frac{n+1}{1}u + \frac{(n+1)n}{1.2}u^2 + \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}u^3 + \ldots$$

folglich

$$\frac{(1+u)^{n+1}-1}{(n+1)u} = 1 + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{n}{1}u + \tfrac{1}{3}\cdot\frac{n(n-1)}{1.2}u^2 + \ldots$$

oder

$$\frac{(1+u)^{n+1}-1}{(n+1)u} = n_0 + \tfrac{1}{2}n_1 u + \tfrac{1}{3}n_2 u^2 + \ldots$$

Daraus folgt für $u = \frac{z}{y}$ und durch Multiplication mit y^n:

$$\frac{(z+y)^{n+1} - y^{n+1}}{(n+1)z} = n_0 y^n + \tfrac{1}{2}n_1 y^{n-1}z + \tfrac{1}{3}n_2 y^{n-2}z^2 + \ldots$$

und auf der rechten Seite steht jetzt die in (4) eingeklammerte Reihe. Der Ausdruck in (4) ist daher

$$= \frac{(-1)^n}{n+1}\cdot\frac{(z+y)^{n+1} - y^{n+1}}{z},$$

aber x war $= x - y$ und daher ist die vorliegende Grösse

$$= \frac{(-1)^n}{n+1} \cdot \frac{x^{n+1} - y^{n+1}}{x - y};$$

folglich ist der Ausdruck (3), welcher das allgemeine Glied der Reihe für $f\left(\frac{x-y}{1+y}\right)$ darstellte,

$$= \frac{(-1)^n}{n+1} (x^{n+1} - y^{n+1}).$$

Wir haben daher

$$f\left(\frac{x-y}{1+y}\right) = (x-y) - \tfrac{1}{2}(x^2 - y^2) + \tfrac{1}{3}(x^3 - y^3) - \ldots .$$

Vergleichen wir damit den Ausdruck (2), so ergiebt sich die Gleichung

$$f(x) - f(y) = f\left(\frac{x-y}{1+y}\right).$$

Die Summe der Reihe

$$x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \ldots, \; +1 > x > -1$$

ist also diejenige Function von x, welche die Eigenschaft hat:

$$f(x) - f(y) = f\left(\frac{x-y}{1+y}\right).$$

Um hieraus die Function f bestimmen zu können, setzen wir $f(x) = \varphi(1+x)$, wo φ eine neue Function bedeutet. Es wird jetzt

$$\varphi(1+x) - \varphi(1+y) = \varphi\left(1 + \frac{x-y}{1+y}\right) = \varphi\left(\frac{1+x}{1+y}\right).$$

Nehmen wir noch $1 + x = \alpha\beta$, $1 + y = \beta$, so kommt

$$\varphi(\alpha\beta) - \varphi(\beta) = \varphi(\alpha)$$

oder

$$\varphi(\alpha) + \varphi(\beta) = \varphi(\alpha\beta).$$

Man weiss aber, dass diese Function keine andere ist, als

$$\varphi(\alpha) = a \log \alpha \text{ (mit beliebiger Basis)},$$

wo a eine willkührliche Constante bedeutet (Cauchy, cours d'analyse, page 111); also haben wir auch $\varphi(1+x) = a \log(1+x)$, und weil $\varphi(1+x) = f(x)$ war, $f(x) = a \log(1+x)$; folglich

$$a \log(1+x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \ldots, \; +1 > x > -1. \quad (5)$$

Man hat ebenso

$$a \log(1-x) = -x - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{3}x^3 - \ldots, \quad +1 > x \geqq -1 \quad (6)$$

durch Subtraction

$$\tfrac{1}{2}a \log\frac{1+x}{1-x} = x + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 + \ldots, \quad +1 > x > -1 \quad (7)$$

und für $\frac{1+x}{1-x} = z$:

$$\tfrac{1}{2}a \log z = \frac{z-1}{z+1} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5 + \ldots, \quad \infty > z > 0. \quad (8)$$

Daraus bestimmt man a, indem man $z = b$, der Basis des logarithmischen Systems nimmt; es ist dann $\log b = 1$, folglich

$$\tfrac{1}{2}a = \frac{b-1}{b+1} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{b-1}{b+1}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{b-1}{b+1}\right)^5 + \ldots \quad (9)$$

Hat man auf diese Weise a gefunden, so erhält man aus (8)

$$\log z = \frac{1}{\frac{1}{2}a}\left[\frac{z-1}{z+1} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5 + \ldots\right]$$

und der Factor $\frac{1}{\frac{1}{2}a}$ ist die Grösse, welche man den **Modulus** des logarithmischen Systems nennt.

Der vorstehende Beweis, welcher sich an die von **Cauchy** auf pag. 165 und 168 für die Binomial- und Exponentialreihe gegebenen Beweise anschliesst, dürfte sich hauptsächlich dadurch empfehlen, dass er ebenso wenig von der Kenntniss der Exponentialreihe, noch von der Methode der unbestimmten Coefficienten Gebrauch macht.

II. Beweis, dass für jedes μ $\frac{d(x^\mu)}{dx} = \mu x^{\mu-1}$ ist.

Um den ausgesprochenen Satz zu beweisen, geht man gewöhnlich vom Binomialtheorem für ganze positive Exponenten aus, oder zeigt wenigstens mittelst des Schlusses von n auf $n+1$, dass für

$$(1+x)^n = 1 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n$$

$A_1 = n$ ist, woraus sich die Gleichung

$$\frac{d(x^n)}{dx} = n x^{n-1}$$

ableiten lässt; diese wird dann auch auf gebrochene und negative n ausgedehnt. Man kann aber auf viel kürzerem Wege sogleich zum allgemeinsten Resultate gelangen.

Man weiss nämlich, dass, wenn p, q, r, u. s. w. Functionen von x bedeuten, die Gleichung statt findet:

$$\frac{d(pqr\ldots)}{pqr\ldots} = \frac{dp}{p} + \frac{dq}{q} + \frac{dr}{r} + \ldots$$

oder, wenn wir überall mit dx dividiren und den Differentialquotienten einer Function überhaupt mit D bezeichnen $\left(\frac{df(x)}{dx}=Df(x)\right)$, auch

$$\frac{D(pqr\ldots.)}{pqr\ldots.}=\frac{Dp}{p}+\frac{Dq}{q}+\frac{Dr}{r}+\ldots.$$

Sei nun $p=x^\alpha$, $q=x^\beta$, $r=x^\gamma$, u. s. w., so ist

$$pqr\ldots.=x^{\alpha+\beta+\gamma+\ldots.},$$

also

$$\frac{D(x^{\alpha+\beta+\gamma+\ldots.})}{x^{\alpha+\beta+\gamma+\ldots.}}=\frac{D(x^\alpha)}{x^\alpha}+\frac{D(x^\beta)}{x^\beta}+\frac{D(x^\gamma)}{x^\gamma}+\ldots.$$

Bezeichnen wir überhaupt

$$\frac{D(x^\mu)}{x^\mu}\text{ mit }\varphi(\mu),$$

so sagt jene Gleichung, dass diese Function die Eigenschaft hat

$$\varphi(\alpha+\beta+\gamma+\ldots.)=\varphi(\alpha)+\varphi(\beta)+\varphi(\gamma)+\ldots.$$

woraus folgt, dass für jedes beliebige μ die Function φ von der Form ist

$$\varphi(\mu)=\mu\varphi(1)$$

(Cauchy, cours d'analyse, page 106). Aber es ist

$$\varphi(1)=\frac{D(x^1)}{x^1}=\frac{\frac{d(x^1)}{dx}}{x}=\frac{1}{x},$$

folglich

$$\varphi(\mu)=\mu\,.\,\frac{1}{x},$$

und weil $\varphi(\mu)=\frac{D(x^\mu)}{x^\mu}$ war, so ergiebt sich

$$D(x^\mu)=\mu x^{\mu-1}\text{ oder }\frac{d(x^\mu)}{dx}=\mu x^{\mu-1}$$

für jedes beliebige μ.

III. Summirung der Reihe

$$\frac{n_0}{1}-\frac{2}{3}\,.\,\frac{n_1}{2}+\frac{2\,.\,4}{3\,.\,5}\,.\,\frac{n_2}{3}-\ldots.\pm\frac{2\,.\,4\,.\,6\ldots.\overline{2n}}{3\,.\,5\,.\,7\ldots.\overline{2n+1}}\,.\,\frac{n_n}{n+1}.\quad(1)$$

Es ist folgendes Integral bekannt:

$$\tfrac{1}{2}\int_0^1(1-x)^{-\frac{1}{2}}x^m dx=\frac{2\,.\,4\,.\,6\ldots.\overline{2m}}{3\,.\,5\,.\,7\ldots.\overline{2m+1}}.\quad(2)$$

Man erhält dasselbe am leichtesten durch mehrmalige Anwendung der Reductionsformel

$$X = a + bx^n,$$

$$\int X^p x^{m-1} dx = \frac{X^{p+1} x^{m-n}}{(m+np)b} - \frac{(m-n)a}{(m+np)b} \int x^{m-n-1} X^p dx$$

für $a = 1$, $b = -1$, $n = 1$, $p = -\frac{1}{2}$, indem man nachher $m+1$ für m setzt.

Substituiren wir die Werthe des Integrals (2) für $m = 0, 1, 2, \ldots n$ in die Reihe (1), so ergiebt sich, dass dieselbe dem folgenden Ausdrucke gleich ist:

$$\tfrac{1}{2}\int_0^1 \left[\frac{n_0}{1} - \frac{n_1}{2}x + \frac{n_2}{3}x^2 - \ldots\right](1-x)^{-\frac{1}{2}} dx \quad (3)$$

wovon man sich auch umgekehrt durch Integration der einzelnen Glieder leicht überzeugt.

Nun ist aber

$$1 - (1-x)^{n+1} = \frac{n+1}{1}x - \frac{(n+1)n}{1.2}x^2 + \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}x^3 - \ldots$$

folglich

$$\frac{1-(1-x)^{n+1}}{(n+1)x} = 1 - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{n}{1}x + \tfrac{1}{3}\cdot\frac{n(n-1)}{1.2}x^2 - \ldots$$

$$= n_0 - \tfrac{1}{2}n_1 x + \tfrac{1}{3}n_2 x^2 - \ldots$$

Durch Substitution dieses Werthes geht das Integral (3) in das folgende über

$$\tfrac{1}{2}\int_0^1 \frac{1-(1-x)^{n+1}}{(n+1)x}(1-x)^{-\frac{1}{2}} dx.$$

Für $x = 1 - y$ erhält man daraus

$$-\tfrac{1}{2}\int_1^0 \frac{1-y^{n+1}}{(n+1)(1-y)} y^{-\frac{1}{2}} dy = \frac{1}{2n+2}\int_0^1 \frac{1-y^{n+1}}{1-y} y^{-\frac{1}{2}} dy$$

$$= \frac{1}{2n+2}\int_0^1 [1 + y + y^2 + y^3 + \ldots + y^n] y^{-\frac{1}{2}} dy$$

$$= \frac{1}{2n+2}\left\{\frac{1}{1-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2-\frac{1}{2}} + \frac{1}{3-\frac{1}{2}} + \ldots + \frac{1}{n+1-\frac{1}{2}}\right\}$$

$$= \frac{1}{n+1}\left\{\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n+1}\right\}.$$

Es ist daher

$$\left.\begin{aligned} &\frac{n_0}{1} - \frac{2}{3}\cdot\frac{n_1}{2} + \frac{2.4}{3.5}\cdot\frac{n_2}{3} - \frac{2.4.6}{3.5.7}\cdot\frac{n_3}{4} + \ldots \\ &= \frac{1}{n+1}\left\{\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n+1}\right\} \end{aligned}\right\} (4)$$

wodurch die Summe der Reihe in ihrer möglichst einfachen Form dargestellt wird.

IV. Ableitung einer Reihe für $\mathrm{Arc}^2 \tan x$.

Es ist folgende Reihe bekannt:

$$\mathrm{Arc}^2 \sin z = \frac{z^2}{1} + \frac{2}{3} \cdot \frac{z^4}{2} + \frac{2.4}{3.5} \cdot \frac{z^6}{3} + \ldots \quad (1)$$

Sie wurde von Stainville zuerst gegeben und ist dann auf verschiedene Weise bewiesen worden. (Einen elementaren Beweis giebt Cauchy a. a. O. page 549—550).

Man hat aber

$$\mathrm{Arctan}\, x = \mathrm{Arcsin} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

folglich, wenn man beiderseits quadrirt und rechts die Gleichung (1) anwendet,

$$\mathrm{Arc}^2 \tan x = \frac{x^2}{1+x^2} + \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{1}{2}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^2 + \frac{2.4}{3.5} \cdot \tfrac{1}{3}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^3 + \ldots$$

Unter der Voraussetzung, dass $x < 1$ sei, lassen sich die Grössen

$$\frac{1}{1+x^2}, \quad \frac{1}{(1+x^2)^2}, \quad \frac{1}{(1+x^2)^3} \ldots$$

mittelst des Binomialtheorems für negative Exponenten in Reihen verwandeln und geben jetzt folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} \mathrm{Arc}^2 \tan x = {} & x^2[(-1)_0 + (-1)_1 x^2 + (-1)_2 x^4 + (-1)_3 x^6 + \ldots] \\ & + \frac{2}{3} \cdot \frac{x^4}{2}[(-2)_0 + (-2)_1 x^2 + (-2)_2 x^4 + (-2)_3 x^6 + \ldots] \\ & + \frac{2.4}{3.5} \cdot \frac{x^6}{3}[(-3)_0 + (-3)_1 x^2 + (-3)_2 x^4 + (-3)_3 x^6 + \ldots] \\ & + \ldots \end{aligned}$$

Ordnet man denselben nach Potenzen von x, so ergiebt sich:

$$\begin{aligned} \mathrm{Arc}^2 \tan x = {} & x^2 . (-1)_0 \\ & + x^4\left[\frac{(-1)_1}{1} + \frac{2}{3} \cdot \frac{(-2)_0}{2}\right] \\ & + x^6\left[\frac{(-1)_2}{1} + \frac{2}{3} \cdot \frac{(-2)_1}{2} + \frac{2.4}{3.5} \cdot \frac{(-3)_0}{3}\right] \\ & + \ldots \end{aligned}$$

Ein allgemeines Glied dieser Reihe würde sein:

$$x^{2n+2}\left[\frac{(-1)_n}{1} + \frac{2}{3} \cdot \frac{(-2)_{n-1}}{2} + \frac{2.4}{3.5} \cdot \frac{(-3)_{n-2}}{3} + \ldots\right]$$

oder, wenn man bemerkt, dass immer

$$(-m)_p = (-1)^p (m+p-1)_p$$

ist,

$$(-1)^n x^{2n+2}\left[\frac{n_n}{1} - \frac{2}{3}\cdot\frac{n_{n-1}}{2} + \frac{2.4}{3.5}\cdot\frac{n_{n-2}}{3} - \ldots\right]$$

$$= (-1)^n x^{2n+2}\left[\frac{n_0}{1} - \frac{2}{3}\cdot\frac{n_1}{2} + \frac{2.4}{3.5}\cdot\frac{n_2}{3} - \ldots\right].$$

Die eingeklammerte Reihe ist aber die nämliche, welche wir in No. III. summirt haben; setzen wir ihre Summe, so ist unser allgemeines Glied

$$= (-1)^n x^{2n+2}\cdot\frac{1}{n+1}\left[\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n+1}\right]$$

und daher erhalten wir das bemerkenswerthe Resultat:

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{Arc}^2 \tan x \\ &= \frac{x^2}{1} - \frac{x^4}{2}(1+\tfrac{1}{3}) + \frac{x^6}{3}(1+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}) - \ldots \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

oder etwas symmetrischer:

$$\left.\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}\operatorname{Arc}^2 \tan x \\ &= \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}(1+\tfrac{1}{3}) + \frac{x^6}{6}(1+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}) - \ldots \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

welches nach der früheren Bemerkung nur so lange richtig bleibt, als x ein ächter Bruch ist.

Man könnte fragen, ob die Reihe noch für $x=1$ convergire, was man aus ihrer Ableitung nicht unmittelbar erkennen kann. Da die Reihe (3) für $x=1$ nämlich

$$\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}(1+\tfrac{1}{3}) + \tfrac{1}{6}(1+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}) - \ldots \quad (4)$$

mit wechselnden Zeichen fortgeht, so ist zu ihrer Convergenz nichts weiter nöthig, als dass jedes Glied grösser als das nächste ist, also eine beständige Abnahme der Glieder hinsichtlich ihrer absoluten Werthe statt findet, und dass zugleich diese Abnahme ins Unendliche fortgehe, mithin die Gränze, welcher sich die Glieder nähern, keine andere als die Null sei. Beide Umstände treffen bei unserer Reihe zusammen, wie sich aus dem Folgenden ergiebt.

Ein allgemeines Glied der Reihe (4) ist, abgesehen vom Zeichen,

$$u_n = \frac{1}{2n}\left[1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n-1}\right],$$

wofür sich wie früher das Integral setzen lässt:

$$u_n = \frac{1}{2n}\int_0^1 \frac{1-z^{2n}}{1-z^2}dz = \frac{1}{2n}\int_0^1 \frac{dz}{1-z^2} - \frac{1}{2n}\int_0^1 \frac{dz}{1-z^2}z^{2n}.$$

Verwandelt man $\frac{1}{1-z^2}$ in die bekannte unendliche Reihe, was sich hier auf ganz ähnliche Weise wie in einem früheren Aufsatze von mir *) rechtfertigen lässt, so ergiebt sich durch Integration der einzelnen Glieder

$$u_n = \frac{1}{2n}\left[1+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}+\ldots \text{ in inf.}\right]$$
$$-\frac{1}{2n}\left[\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+3}+\frac{1}{2n+5}+\ldots \text{ in inf.}\right]$$

und durch Vereinigung der unter einander stehenden Glieder

$$u_n = \frac{1}{1(2n+1)}+\frac{1}{3(2n+3)}+\frac{1}{5(2n+5)}+\ldots \text{ in inf.},$$

ein schon an und für sich bemerkenswerther Satz.

Man hätte ebenso

$$u_{n+1} = \frac{1}{1(2n+3)}+\frac{1}{3(2n+5)}+\frac{1}{3(2n+7)}+\ldots,$$

folglich $u_n > u_{n+1}$. Geht man ferner in dem Ausdrucke für u_n zur Gränze für wachsende n über, so ist offenbar

$$\text{Lim } u_n = 0.$$

Mittelst dieser beiden Eigenschaften der allgemeinen Glieder u ist die Convergenz der Reihe (4) bewiesen. Wir haben daher aus (3) für $x=1$

$$\frac{\pi^2}{32} = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}(1+\tfrac{1}{3}) + \tfrac{1}{6}(1+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}) - \ldots \quad (5)$$

V. Ueber den Werth des Integrales $\int_0^\infty e^{-t^2}\, dt$.

Der Werth des vorstehenden bestimmten Integrales, welches in der Wärmetheorie und Wahrscheinlichkeitsrechnung vorkommt, ist schon auf verschiedene Weise abgeleitet worden, von Legendre und Laplace durch doppelte Integration, von Poisson durch eine geometrische Betrachtung u.s.w. Eine von anderen Theorien unabhängige Entwickelung desselben ist folgende.

Zuerst erhellt, dass das fragliche Integral einen endlichen Werth haben müsse. Denn da die Function e^{-t^2} rascher abnimmt als die Function e^{-t}, so muss

$$\int_0^\infty e^{-t^2}\, dt < \int_0^\infty e^{-t}\, dt, \text{ d. h. } < 1$$

*) Thl. III. No. XXXII.

sein. Bezeichnen wir den unbekannten Werth des Integrales mit k, so ergiebt sich aus der Gleichung

$$\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = k \;\ldots\; (1)$$

dadurch, dass man $\sqrt{u}\,t$ für t setzt, wo u eine beliebige positive Constante bedeutet und $\sqrt{u}$ positiv genommen wird,

$$\int_0^\infty e^{-ut^2}\,dt = \frac{k}{\sqrt{u}} \;\ldots\; (2)$$

und wenn man diese Gleichung $n$mal nach u partiell differenziirt

$$\int_0^\infty \frac{d^n(e^{-ut^2})}{du^n}\,dt = k\frac{d^n(u^{-\frac{1}{2}})}{du^n},$$

d. h.

$$\int_0^\infty t^{2n} e^{-ut^2}\,dt = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n u^n}\cdot\frac{k}{\sqrt{u}}$$

oder α^2 für u gesetzt

$$\int_0^\infty t^{2n} e^{-\alpha^2 t^2}\,dt = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n \alpha^{2n}}\cdot\frac{k}{\alpha} \;\ldots\; (3)$$

Mittelst dieser Gleichung lässt sich der Werth des Integrales

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} e^{-\alpha^2 t^2}\,dt$$

in eine unendliche Reihe verwandeln. Setzt man nämlich für $\sin t$ die Reihe

$$\frac{t}{1} - \frac{t^3}{1.2.3} + \frac{t^5}{1.2.3.4.5} - \ldots$$

und integrirt die einzelnen Glieder nach Formel (3), so ergiebt sich

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} e^{-\alpha^2 t^2}\,dt$$

$$= \left[\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{1}{2.\alpha^3} + \frac{1.3}{1.2.3.4.5}\cdot\frac{1}{2^2.\alpha^5} - \ldots\right]k$$

$$= \left[\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{1}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2\alpha}\right)^3 + \frac{1}{1.2}\cdot\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2\alpha}\right)^5 - \ldots\right]2k \;\ldots\; (4)$$

und diess ist für alle möglichen α richtig, weil diese Reihe jederzeit convergirt.

Man kann aber auf anderem Wege zu ganz der nämlichen Reihe gelangen. Man setze nämlich in dem Integrale

$$\int_0^{\frac{1}{2\alpha}} e^{-t^2}\,dt$$

für $\overset{-t^2}{e}$ die Reihe

$$1-\frac{t^2}{1}+\frac{t^4}{1.2}-\frac{t^6}{1.2.3}+\ldots.$$

und integrire die einzelnen Glieder, so wird

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^{\frac{1}{2\alpha}} \overset{-t^2}{e}\,dt\\ &=\frac{1}{2\alpha}-\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2\alpha}\right)^3+\frac{1}{1.2}\cdot\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2\alpha}\right)^5-\ldots.\end{aligned}\right\}\ldots.(6)$$

und die vorstehende Reihe ist die nämliche wie die in Formel (4) in Parenthesen stehende. Multipliciren wir daher das vorliegende Resultat mit $2k$, so ist durch Vergleichung von (4) und (6)

$$2k\int_0^{\frac{1}{2\alpha}} \overset{-t^2}{e}\,dt=\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\overset{-\alpha^2t^2}{e}\,dt\ldots.(7)$$

und diess gilt für jedes beliebige α. Lassen wir dasselbe immer kleiner werden und gehen zur Gränze für $\alpha=0$ über, so wird

$$2k\int_0^\infty \overset{-t^2}{e}\,dt=\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt.$$

Vermöge der Gleichung (1) ist aber die linke Seite $=2k^2$; der Werth des Integrales rechts ist bekanntlich $=\frac{\pi}{2}$; mithin wird $2k^2=\frac{\pi}{2}$ oder $k=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, wodurch die bisher unbestimmte Grösse k ihre Bestimmung gefunden hat.

Wir haben jetzt aus Formel (2) für $u=\alpha^2$

$$\int_0^\infty \overset{-\alpha^2t^2}{e}\,dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha}\ldots.(8)$$

und aus Formel (3)

$$\int_0^\infty t^{2n}\overset{-\alpha^2t^2}{e}\,dt=\frac{1.3.5\ldots.(2n-1)}{2^n\alpha^{2n+1}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}\ldots.(9)$$

Setzt man in Formel (7) rechts βt für t, so ergiebt sich

$$\sqrt{\pi}\int_0^{\frac{1}{2\alpha}} \overset{-t^2}{e}\,dt=\int_0^\infty \frac{\sin\beta t}{t}\overset{-\alpha^2\beta^2t^2}{e}\,dt$$

oder, $\frac{\alpha}{\beta}$ für α gesetzt:

$$\sqrt{\pi}\int_0^{\frac{\beta}{2\alpha}} \overset{-t^2}{e}\,dt=\int_0^\infty \frac{\sin\beta t}{t}\overset{-\alpha^2t^2}{e}\,dt.$$

Differenziirt man diese Gleichung nach β, so wird

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha}e^{-\left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2}=\int_0^\infty \cos\beta t\,.\,e^{-\alpha^2t^2}dt\,\ldots.\;(10)$$

womit die wichtigsten drei Formeln dieser Art, nämlich (8), (9) und (10), bewiesen sind.

Aus der letzteren kann man noch ein allgemeineres Resultat ziehen. Es ist nämlich nach einem früheren Aufsatze von mir über höhere Differenzialquotienten (Thl. IV. No. XL.):

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^n(e^{-a^2u^2})}{du^n}\\&=(-a)^n\{(2au)^n-2n_2(2au)^{n-2}+3.4n_4(2au)^{n-4}-\ldots.\}e^{-a^2u^2}\end{aligned}\right\}(11)$$

und dieses lässt sich auf folgende Weise benutzen. Man differenziire die Gleichung (10) $n$mal nach β, so ist

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha}\,.\,\frac{d^n(e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}})}{d\beta^n}&=\int_0^\infty\frac{d^n(\cos\beta t)}{d\beta^n}e^{-\alpha^2t^2}dt\\&=\int_0^\infty\cos(\beta t+\tfrac{1}{2}n\pi)\,.\,t^n\,.\,e^{-\alpha^2t^2}dt\end{aligned}$$

und wenn man auf der linken Seite die Gleichung (11) für $u=\beta$, $a=\frac{1}{2\alpha}$ in Anwendung bringt, so erhält man das Integral:

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^\infty t^n\cos(\tfrac{1}{2}n\pi+\beta t)\,.\,e^{-\alpha^2t^2}dt\\&=\frac{(-1)^n\sqrt{\pi}}{(2\alpha)^{n+1}}\left[\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n-2n_2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-2}+3.4n_4\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-4}-\ldots.\right]e^{-\left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2}\end{aligned}\right\}(12)$$

welches noch nicht bekannt zu sein scheint.

VI.

Ueber die Auffindung mathematischer Wahrheiten bei den Griechen.

Von

Herrn Doctor Ludwig Felix Ofterdinger

zu Tübingen.

I. Artikel.

Die Art, wie die griechischen Mathematiker ihre Entdeckungen gemacht haben, ist ein Gegenstand, der seine volle Lösung immer noch nicht gefunden hat. Peter Nunnez, Franz und Peter Schooten, Wallis und mehrere spätere Mathematiker waren der Ansicht, dass die alten Mathematiker ein Mittel in der Hand gehabt haben, durch welches sie ihre Sätze erfunden hätten, dass uns aber dieses nicht überliefert worden sei. Robert Simson glaubt dieses Mittel sei die Analysis, wie sie uns Pappus im VII. Buch seiner mathematischen Sammlungen zeigt; dieser Ansicht stimmten mehrere Mathematiker bei. Eine genaue Betrachtung der mathematischen Werke der Griechen zeigt, dass die Analysis allerdings bei der Abfassung derselben eine grosse Rolle gespielt hat, dass aber auch die Analysis, wie sie uns Pappus giebt, mehr zur Lösung einer geometrischen Aufgabe, als zur Auffindung neuer Sätze dient, dass deswegen, wenn die Analysis zur Erfindung neuer Wahrheiten gebraucht werden soll, dieselbe allgemeiner aufgefasst werden muss, und dann doch noch ein anderes Etwas übrig bleibt, welches zur Entdeckung mathematischer Wahrheiten führt. Diess alles auszuführen und zu beweisen ist der Zweck nachfolgender Zeilen.

Eine Vergleichung mit neuern Methoden ist bei einer derartigen Arbeit nicht wohl zu umgehen, und wenn der Verfasser diess auch so wenig als möglich gethan hat, so wird er dadurch wohl keinem Tadel ausgesetzt sein.

---

§. 1.

eber die Auffindung mathematischer Wahrheiten durch die Analysis, oder über die theoretische Analysis.

Wenn man einen Satz D hat, dessen Allgemeinheit und Gül- gkeit noch nicht erkannt wäre, so nehme man an, er gelte in ler Allgemeinheit. Nach einer genauen Untersuchung dieses Satzes ird man finden, dass er in aller Allgemeinheit bewiesen werden önnte, wenn der Satz C in aller Allgemeinheit gelten würde und ewiesen werden könnte; dieser aber, wenn der Satz B, und die- er, wenn der Satz A gilt und bewiesen werden kann. Hier sind rei Fälle möglich:

1) Ist A ein Satz, der allgemein gültig ist, und entweder schon bewiesen ist, oder gar keines Beweises bedarf, so ist D in aller Allgemeinheit wahr und kann bewiesen werden.
2) Ist hingegen A ein Satz, von dem man weiss, dass er unwahr ist, da B nur als wahr erwiesen werden kann, wenn A wahr ist, so ist in diesem Falle C und auch D unwahr.
3) Ist aber A nicht in aller Allgemeinheit wahr, sondern hat die- ser Satz Ausnahmen, so haben entweder diese Ausnahmen kei- nen Einfluss auf B und es ist dann die weitere Untersuchung wie im ersten Falle; oder sie machen, dass B zwar gilt, aber mit Ausnahmen, wo dann untersucht werden muss, ob C den- noch wahr oder unwahr ist oder mit Ausnahmen gilt, und im letztern Falle, ob D allgemein wahr ist oder unwahr oder mit Ausnahmen gilt.

Diese Untersuchungsart nennt man die theoretische Ana- lysis *): sie dient also 1) zur Aufsuchung des Beweises eines Satzes und 2) zur Auffindung neuer Sätze, welche hier die Mittel- sätze (B und C) sind, und die zwischen dem Satze, den man be- weisen will, und dem, welchen man schon bewiesen hat, liegen.

Alle Beweise aller mathematischen Sätze, alle mathematischen Schriften entstanden durch diese Methode, und sie kann in allen Theilen der Mathematik noch jetzt mit Nutzen gebraucht werden. Es ist daher sehr zu bedauern, dass es fast scheint, sie sei ganz verlohren; denn der Gebrauch, welcher von der griechi- schen Analysis bei einzelnen geometrischen Aufgaben und hie und da bei einem einzeln stehenden Lehrsatze gemacht wird, kann kei- nen Anspruch auf eine wissenschaftliche Methode machen **).

---

*) „Duplex est analyseos genus, vel enim est veri indagatrix, diciturque „theoretica; vel propositi investigatrix, ac problematica vocatur. In „theoretico autem genere, quod quaeritur, revera ita se habere sup- „ponentes, ac deinde per ea quae consequuntur, quasi vera sint (ut sunt „ex hypothesi) argumentantes; ad evidentem aliquam conclusionem pro- „cedimus. Jam si conclusio illa vera sit, vera quoque est propositio „de qua quaeritur; ac demonstratio reciproce respondet analysi. Si „vero in falsam conclusionem incidamus, falsum quoque erit de quo „quaeritur." Pappi Alexandrini praefatio ad septimum librum collectio- nis mathematicae.

**) Klügel (math. Wörterbuch I. pag. 89.) sagt: „Die theoretische Analysis „wird kaum anders brauchbar sein, als bei der Prüfung eines Satzes,

Unter den vielen Beispielen, welche hier gegeben werden könnten, mag eines angeführt werden, das wegen seines allgemein bekannten Gegenstandes die Sache am leichtesten klar machen wird und das gleichsam die Angel ist, um welche sich alle Sätze der sechs ersten Bücher der Elemente des Euclides drehen.

Multiplicirt man eine Zahl *a* mit sich selbst, so erhält man die Zahl *aa*; nun lehrt die Erfahrung, dass wenn man eine beliebige Anzahl (*a*) gleich grosser Quadrate hat, und davon *aa* nimmt, man daraus ein einziges Quadrat zusammensetzen kann, an dessen jeder Seite *a* Quadrate liegen; so kann man z. B. aus 3 . 3, 4 . 4, 5 . 5 u. s. w. Quadraten einzelne grosse Quadrate bilden, an deren jeder Seite 3, 4, 5 u. s. w. von jenen kleinen Quadraten liegen. Bildet man nun 3 Quadrate, von denen das eine 9, das andere 16, und das dritte 25 gleiche Quadrate enthält, so dass also die beiden ersten Quadrate eben so gross als das dritte sind, so lehrt die Erfahrung, dass wenn man die drei Seiten dieser drei Quadrate zusammenfügt, man ein rechtwinkliges Dreieck erhält, von dem man sagen kann:

das Quadrat der dem rechten Winkel gegenüberliegenden Seite ist gleich den Quadraten der ihn einschliessenden Seiten.

Da man dasselbe bei den Quadraten findet, welche aus 36, 64 und 100, ferner bei denen, welche aus 81, 144 und 225 kleinen Quadraten zusammengesetzt sind, so entsteht die Frage, ob der aufgestellte Satz nicht ganz allgemein gilt *).

Zu einem vollständigen Beweise eines Satzes gehört aber, dass man alle gebrauchten Kunstausdrücke gehörig erklärt. Deswegen ist es in vorliegendem Satze nöthig, die Ausdrücke Quadrat und rechtwinkliges Dreieck zu erklären; Quadrate und rechtwinklige Dreiecke sind geradlinigte Figuren; um daher eine vollständige Erklärung davon geben zu können, muss man eine Erklärung von geradlinigten Figuren geben, wozu aber die Erklärungen von Figur und Grenze, Ebene und Fläche, von Linie überhaupt, und besonders von geraden Linien, und dem Aeussersten einer Linie, also die Erklärungen 1 — 7, 13, 14 und 20 I. Elem. Eucl. gehören.

Rechtwinklige Dreiecke sind Dreiecke; daher gehört zu einer vollständigen Erklärung dieser Figuren die Erklärung vom Dreiecke überhaupt und die der besondern Arten von Dreiecken. Ebenso gehört zur Erklärung des Quadrats die aller vierseitigen Figuren. Um aber die Erklärungen der verschiedenen Arten von Dreiecken und Vierecken zu geben, muss man die Erklärungen vom Winkel und dessen besondern Arten vorausschicken: dadurch erhält man die Erklärungen 8 — 12, 21 — 34 I. Elem. Eucl.

„den ein Schriftsteller aufstellt oder anwendet, ohne ihn zu beweisen!" Lehmann (mathematische Abhandlungen. Zerbst 1829. pag. 21.) sagt: „Die Alten hatten zwar auch eine Art von Analysis, die aber doch von „der neuern ganz verschieden war, nur in einem blinden Versuchen „bestand, und, in Beziehung auf das System, als eine Nebensache, bloss „als ein Uebungsmittel der Erfindungskraft, betrachtet worden zu sein „scheint."

*) M. Vitruvii de Architectura libri decem. lib. I. 2. — Procli commentariorum in primum Euclidis librum libri quatuor. lib. IV. ad prop. 47. Eucl.

Nach diesen Vorbereitungen ist es möglich, den Beweis des betreffenden Satzes zu suchen. Um aber den Beweis eines mathematischen Satzes zu finden, ist es nöthig, dass man das, was bewiesen werden soll, sich vor Augen lege, und also bei einem geometrischen Satze das zu Erweisende durch eine Zeichnung sich vergegenwärtige. Es ist also die Aufgabe nöthig: auf einer gegebenen geraden Linie ein Quadrat zu beschreiben. Bei Lösung dieser Aufgabe ist man genöthigt, neue Sätze, durch die man wieder auf andere Sätze kommt, zu beweisen, neue Erklärungen zu geben, und Forderungen, so wie Grundsätze aufzustellen.

Geht man auf diese Weise fort, sucht von jedem gefundenen Satze den Beweis und bildet von jedem die Converse, so wird man alle Erklärungen, Forderungen, Grundsätze und Sätze des ersten Buches der Elemente des Euclides erhalten.

Aus diesem Beispiele ist zu ersehen, wie man durch die Analysis Sätze findet; so dass sie also die Methode ist, durch die man nicht allein die Beweise einzelner Sätze, sondern auch eine Menge neuer Sätze finden kann.

Archimedes hat in den Vorreden seiner geometrischen Schriften jedesmal diejenigen Sätze hervorgehoben, die er beweisen will: wendet man auf sie die analytische Methode an, so wird man alle die übrigen Sätze finden, welche in den betreffenden Büchern sonst noch enthalten sind.

§. 2.

Von der Zusammenfügung der durch die Analysis gefundenen Sätze, oder von der Synthesis.

Wenn man das durch die Analysis Gefundene so zusammenfügt, dass man von dem Bekannten, Einfachen und Erwiesenen auf das Zusammengesetzte und auf das, was nur durch das Einfache zu erweisen ist, übergeht, so befolgt man die synthetische Methode.

Es wird das durch die Analysis Aufgestellte und Gefundene eingetheilt in Erklärungen, Forderungen, Grundsätze*) und Sätze**).

---

*) In der Regel wird der Begriff des mathematischen Grundsatzes zu bebeschränkt aufgefasst. Die Griechen nannten nämlich Axiom (Grundsatz) den letzten Satz, welchen die Analysis gefunden hat (also den Satz A. in §. 1.) und den man als wahr anzunehmen berechtigt ist; (daher Axioma, Annahme, von ἀξιοῦν annehmen.) Sind die Axiomata Sätze, deren Richtigkeit von selbst, ohne eines Beweises zu bedürfen, einleuchtet, so heissen sie κοιναὶ ἔννοιαι, communes notiones, Gemeinsätze: sind es aber Sätze, die eines Beweises bedürfen, der aber nicht gegeben wird, sei es, dass der Beweis sich anderswo findet, oder dass er in der vorgeschriebenen Form gar nicht gegeben werden kann, man aber von der Richtigkeit des Satzes überzeugt ist, so heissen sie λαμβανόμενα sumpta oder kurzweg Annahmen. Die Grundsätze 1—10 und 12 Elem. Eucl. sind Gemeinsätze, dagegen der 11 Elem. Eucl., so wie die Grundsätze des Archimedes in seinen verschiedenen Schriften blosse Annahmen sind.

**) Procli l. c. II. 8.

Der erste Satz wird also der sein, welcher allein durch die Erklärungen, Forderungen und Grundsätze construirt und erwiesen werden kann und durch den der zweite Satz erwiesen wird. Unter den Sätzen, welche die Analysis gefunden hat, füllt den zweiten Platz der aus, welcher nur durch die Erklärungen, Forderungen, Grundsätze und den ersten Satz construirt und erwiesen werden kann und der nöthig ist zum Beweise und zur Construction des nachfolgenden Satzes u. s. w.

Ob die Sätze, welche unmittelbar auf einander folgen, etwas aussagen, das eine Verwandtschaft unter einander beurkundet oder nicht, hat auf die Folge, nach der sie aufgeführt werden, nicht den geringsten Einfluss; diese richtet sich ganz allein nach der Construction und dem Beweise. Daher kommt es, dass Sätze auf einander folgen können, welche den verschiedensten Inhalt haben; so handelt z. B. 1. I. Elem. Eucl. von der Construction eines gleichseitigen Dreiecks; 2. I. von der Verzeichnung einer geraden Linie von einer gegebenen Länge an einen gegebenen Punkt; 3. I. von der Gleichmachung zweier gegebenen Linien; 4. I. von der Congruenz zweier Dreiecke u. s. w. Archimedes handelt in seiner Schrift von den Schneckenlinien zuerst (Satz 1. und 2.) mechanische, dann (Satz 3 — 9) geometrische, dann (10 — 11) arithmetische und von da erst wieder geometrische Sätze ab. Dasselbe findet man in allen übrigen Schriften der Griechen.

Bei der Synthesis ist also die Ordnung, in der sich die Sätze folgen, streng vorgeschrieben, jede Abweichung lässt sich durch nichts rechtfertigen (es giebt — wie Euclides sagte — nur einen einzigen Weg, der zur Geometrie führt*), und da die Synthesis die durch die Analysis gefundenen Sätze zusammenfügt, so werden durch sie keine neue Wahrheiten gefunden, welche in das System gehören, wohl aber lassen sich Conversen, Verallgemeinerungen der Sätze, analoge Sätze bilden, und ebenso ergeben sich Folgerungen und Zusätze, welche durch eine analytische Behandlung zu neuen Systemen von Sätzen öfters führen.

§. 3.

Vom Zusammenfügen der Sätze und dem Auffinden neuer Wahrheiten durch die philosophische Methode.

Dem griechischen Geiste konnte es nicht entgehen, die Bemerkung zu machen, dass bei der Synthesis eine Masse Sätze neben einander zu stehen kommen, welche wohl in Bezug auf den Beweis, nicht aber in Bezug auf das, was sie aussagen, einen Zusammenhang haben, dass von einem Gegenstande zwar einzelne Relationen aufgestellt werden, übrigens nur so viele, als gerade zur Führung des Beweises irgend eines Satzes gehört, und deswegen der Gegenstand immer noch unerschöpft bleibt. Es war daher schon bei den Griechen der Wunsch rege, es möge diesen Uebeln abgeholfen werden; alle Bemühungen schlugen aber fehl, und erst die

---

*) Procli l. c. II. 4.

neueste Zeit konnte diesem lange gehegten Wunsche abhelfen, nachdem man bei der Anordnung der Sätze und bei ihrer Beweisführung einen ganz neuen Weg eingeschlagen hat, und die Sätze nicht mehr des Beweises, sondern des Satzes wegen neben einander stellte. Diese Methode heisst die philosophische oder auch die genetische.

Die Aufgabe der philosophischen Methode ist, durch ein Princip die verschiedenen Gegenstände der Mathematik unter sich zu verknüpfen, jeden Gegenstand aber in allen seinen Beziehungen zu untersuchen und daher die Sätze, welche in Bezug auf das, was sie uns sagen, eine Verwandtschaft haben, in Gruppen zu fassen, und die Sätze sowohl als die Gruppen von einem allgemeinen Gesichtspunkte aus zu betrachten und zu beweisen.

Die Grössen im Allgemeinen, als Grössen betrachtet, dann die Zahlen, sind von einer solchen Einfachheit, ihre Verbindungen, die sie eingehen, beruhen auf den so einfachen Begriffen von vermehren und vermindern, dass die einzelnen Sätze wie von selbst in einzelne Gruppen zerfallen, bewiesen und von dem allgemeinen Gesichtspunkte des Vermehrens und Verminderns betrachtet werden können*). Die geometrischen Grössen dagegen sind von viel complicirterer Natur, weswegen in der Geometrie die philosophische Methode viel später Eingang gefunden hat, und hier etwas mehr im Einzelnen zu betrachten ist.

Wenn in der Arithmetik der erste Begriff der der Einheit**) ist, so ist in der Geometrie der erste der des Punktes***); ein Punkt, der sich bewegt, beschreibt eine Linie, und wenn diese Bewegung nach ein und derselben Richtung erfolgt, so entsteht eine gerade Linie. Denkt man sich zwei gerade Linien auf einander gelegt, wovon die eine fest liegt, die andere aber um einen Endpunkt der festliegenden Linie sich zu bewegen im Stande ist, so entsteht durch diese Drehung ein Winkel, der alle Werthe von 0° bis zu 360° annehmen kann. Drehen sich nun um die beiden Endpunkte der festliegenden Linie zwei gerade Linien, so entsteht in gewissen Fällen ein Dreieck. Auf ähnliche Weise kann man so nach und nach alle andere Figuren entstehen lassen.

Linien, Winkel und Figuren unterscheiden sich von einander so sehr durch ihre Entstehung, dass diese das Kennzeichen zu der Bildung der einzelnen Gruppen giebt. Jenachdem sich die bewegliche Linie bei den Winkeln bewegt hat, sind die einzelnen Arten der Winkel, so wie ihre Eigenschaften entstanden, woraus sich die Sätze und ihre Beweise ergeben. Ebenso ist es bei den Dreiecken: drehen sich eine oder mehrere Linien um einen oder mehrere Punkte, so erhält man nicht allein die verschiedenen Arten der Dreiecke und ihre allgemeinen Eigenschaften, sondern auch die Lehre von der Congruenz derselben; bewegen sich aber eine oder mehrere Linien mit unwandelbaren Winkeln, so erhält man die Lehre von der

---

*) B. F. Thibaut, Grundriss der Mathematik. 5. Auflage. Göttingen. 1831. p. 3. seq.

**) Theonis Smyrnai Platonici expositio eorum, quae in arithmeticis ad Platonis lectionem utilia sunt. cap. IV.

***) Procli l. c. II. def. 1.

Aehnlichkeit der Dreiecke. Auf dieselbe Art werden die andern Figuren behandelt [*]).

Bei der philosophischen Methode entspringen die Eigenschaften der Grössen — also die Sätze — aus einem bestimmten Begriff (in der Arithmetik aus dem Vermehren (Zusammensetzen mehrerer Zahlen) und Vermindern (Theilen der Zahlen); in der Geometrie aus dem der Möglichkeit der Erzeugung von Constructionen) und darin liegt die Beweiskraft der Sätze, ihre Folgen und ihre Gruppen. Bei der synthetischen Methode dagegen werden die Eigenschaften ausgesagt und nachher bewiesen, die Folge liegt hier im Beweise; ohne die analytische Methode weiss man daher nicht, woraus die Eigenschaften gefolgert werden können. Bei der philosophischen Methode sucht man alle Eigenschaften einer Grösse zu erforschen, indem man die Elemente aller Grössen auf jede mögliche Weise sich ändern lässt, und darin liegt das Mittel zur Erforschung neuer Sätze. Bei der analytischen Methode sucht man eine Eigenschaft einer Grösse um eine andere zu beweisen, man sucht also nicht alle Eigenschaften einer Grösse zu finden, sondern nur die Eigenschaften verschiedener Grössen, die zum Beweise nöthig sind.

§. 4.

Ueber die Auffindung der ersten Sätze der Analysis.

Bei der philosophischen Methode findet man Sätze, indem man eine Grösse betrachtet, sie in ihre einzelnen Elemente auflöst und diese alle nur mögliche Aenderungen eingehen lässt. Bei der analytischen Methode findet man dagegen neue Sätze (Mittelsätze), indem man einen Satz, der etwas aussagt, das bis jetzt noch unbekannt war, zu erweisen sucht. Dieser Satz, welcher gleichsam den Schlussstein eines Systems von Sätzen bildet, wird also aufgestellt, bevor man von der Richtigkeit desselben durch den Beweis überzeugt ist [**]); da aber derlei Sätze nicht aus der Luft gegriffen werden können [***]), so muss man bestimmte Anhaltspunkte haben, durch die sie gefunden werden. Diese sind aber

1) die Anwendung der Arithmetik auf die Geometrie;
2) die Anwendung der Geometrie auf die Arithmetik;
3) die mechanischen Hülfsmittel;
4) die angewandte Mathematik;
5) die Analogie;
6) die Induction.

Zu 1. und 2.

Die Auffindung des pythagoräischen Lehrsatzes, die Sätze des II. Buches der Elemente des Euclides, die vielfachen Entdeckungen, welche seit Cartesius durch die Anwendung der Arithmetik auf die Geometrie gemacht wurden, machen es überflüssig, die Behauptung

---

[*]) Thibaut l. c. pag. 187. seq.

[**]) Archimedes über Schneckenlinien, Vorrede.

[***]) Archimedes vorhandene Werke übersetzt von Nizze. Stralsund. 1824. pag. 281.

1. durch weitere Beispiele aus der ältern oder neuern Zeit zu bekräftigen.

In den arithmetischen Schriften der Griechen finden sich überall Spuren der Anwendung der Geometrie auf arithmetische Untersuchungen. Euclides hat in VI. 16. Elem. den Satz aufgestellt, dass wenn vier gerade Linien proportional sind, das unter den äussern enthaltene Rechteck dem unter den mittlern enthaltenen gleich sei, einen Satz, den Euclides durch die Analysis gefunden und in VII. 19. Elem. auf die Arithmetik angewendet hat, und der einer der Schlusssteine des siebenten Buches der Elemente ist. Aehnliche Beispiele finden sich viele bei den Griechen, um so mehr, als bei ihnen die Zahlenverbindungen viel schwieriger als bei uns auszuführen waren.

Zu 3.

Lineal, Zirkel, Maassstab, Waage wurden und werden immer noch häufig zur Erfindung einzelner Sätze gebraucht, ebenso wie Instrumente, welche eigens zur Satzerfindung geschaffen werden mussten. Geometrische Eigenschaften fallen durch Anschauung sehr leicht in die Augen, daher das Zeichnen, das Verschneiden von Flächen und Körpern öfters Veranlassungen wurden, geometrische Eigenschaften aufzufinden. Von all dem finden sich in den Schriften der Griechen viele Beispiele: bei Sätzen, bei denen es sich um unmittelbares Vergleichen von Grössen handelt, ist das D e c k e n und M e s s e n das Mittel, bei Sätze zu erfinden. Die Sätze 18, 24, 27, 28 der archimedischen Schrift über Schneckenlinien sind die Grundpfeiler des ganzen Buches und können allein durch Zeichnung und Maassstab gefunden sein. Die Sätze 35, 48, 49, 37 (zweiter Theil) I. über Kugel und Cylinder sind durch Auflegen dünner Flächen (Blätter) und nachheriges Ausmessen derselben gefunden worden. Der erste Theil des 37. Satzes I. und die Sätze 2, 4, 5, 6, 7, 8. II. über Kugel und Cylinder, die Sätze 23, 26, 27, 28 des Buches über Konoiden und Sphäroiden, ebenfalls die Grundpfeiler des ganzen Werkes, sind durch wirkliches Messen des Körperinhaltes, das hier aber nur durch die Waage geschehen kann, gefunden worden. Die Sätze 3, 4, 5, 7. XII. Elem. sind durch Zerschneiden der Körper und nachheriges Messen der einzelnen Theile gefunden worden.

Zu der Erfindung neuer Sätze gebraucht man öfters eigene Instrumente, die erst noch zu diesem Zwecke ausgedacht werden müssen; so um die Eigenschaften der Curven zu finden, dienen öfters Instrumente, mit denen dieselben gezeichnet werden können.

Zu 4.

Zu allen Zeiten hat die angewandte Mathematik eine Menge neuer Sätze geliefert; so hat z. B. Archimedes durch die Statik gefunden, dass ein parabolischer Abschnitt $= \frac{4}{3}$ eines Dreiecks sei, das einerlei Basis und gleiche Höhe mit dem Abschnitt habe*) und erst später hat Archimedes diesen Satz durch geometrische Schlüsse bewiesen**).

---

*) Archimedes sagt in der Vorrede zur Quadratur der Parabel ausdrücklich, er habe diesen Satz durch A n w e n d u n g der Mechanik gefunden.

**) Archimedes Quadratur der Parabel. Satz 24.

Auf ähnliche Art hat Pappus*) mehrere Sätze gefunden
mehrere neuere Mathematiker, von denen ich nur Luca
rius**), Lalovera***), Gregorius a St. Vincentio*
Guldinus*****) nenne. Die Entdeckung der Fluxionsre
die Theorie mancher krummen Linie zeigen in ihrem Urspru
fach auf die angewandte Mathematik.

Zu 5 und 6.

Durch Analogie und Induction wurden von jeher ein
neuer Sätze aufgefunden, wie aus den ältesten und neueste
matischen Werken nachgewiesen werden kann.

Nachdem einmal der pythagoräische Satz erfunden w
standen gleichsam von selbst die Fragen: ob dieser Satz
rechtwinkligen Dreiecken gelte, oder ob bei schiefwinklig
analoge Sätze gefunden werden können, d. h. ob das Qua
Hypotenuse bei diesen Dreiecken gleich, grösser oder kle
als die Summe der Quadrate der Katheten; ob nicht auch
Figuren als Quadrate auf die Seiten gezeichnet werden kö

Wendet man zur ersten Untersuchung ein ähnliches V
an, wie beim pythagoräischen Satze, d. h. giebt man den S
stimmte Zahlenwerthe, so wird man bald die Sätze 12 und
II. Buches der Elemente des Euclides finden. Um aber die
geometrisch beweisen zu können, ist die analytische Meth
thig, durch die man die übrigen Sätze des zweiten Buche
wird******). Versucht man bei einem rechtwinkligen Drei
den Seiten statt der Quadrate andere Figuren zu beschreib
gleichseitig und gleichwinklig sind, wozu man die Sätze
und III. Buches der Elemente nöthig hat, so wird man finde
man den Inhalt dieser Figuren durch irgend ein Mittel b
dass auch hier der Inhalt der Figur auf der Hypotenuse g
dem Inhalt der zwei Figuren auf den Katheten zusamme
men. Sucht man diesen Satz noch mehr zu verallgemeiner
man beliebige Figuren auf die drei Seiten zeichnet, so w
finden, dass der Satz nur in dem Falle gilt, wenn die Figu
lich sind. Daraus entspringt der Begriff von Aehnlichkeit,
sich wieder der der geometrischen Verhältnisse ergiebt. Ma
also durch Analogie den 31. VI Elem. Eucl., und wird, w
die analytische Methode gebraucht, die Conversen und Folg
bildet, die übrigen Sätze des VI. und V. Buches finden.

Durch Induction und Analogie sind die Sätze des XII.
die meisten des Theodosius in seinem Werke über Kugelsch

---

*) Pappi l. c. lib. VIII.

**) Lucae Valerii de centro gravitatis solidorum libri III. Rom

***) Quadratura circuli et hyperbolae segmentorum. Auct. A.
Polosae. 1651.

****) P. Gregorii a St. Vincentio opus geometricum quadratur
et sectionum coni, decem libris comprehensum. Antwerpi

*****) P. Guldin de centro gravitatis. Vien. 1635.

******) cf. Procli l. c. cap. IV. ad prop. 47.

den meisten andern Werken der Griechen gefunden worden. Bei Pappus findet sich ein besonders merkwürdiges Beispiel, da er nicht allein einen Satz auf diese Art gefunden, sondern auch durch sie ihn zu beweisen gesucht hat; Pappus sagt nämlich: unter allen Körpern, die gleiche Oberflächen haben, habe die Kugel den grössten Inhalt *). In einer Reihe von Sätzen beweist nun Pappus, dass unter allen regulären Körpern von gleicher Oberfläche der den grössten Inhalt habe, welcher von am meisten ebenen Flächen eingeschlossen ist **), und folgert nach der Analogie obigen Satz, wodurch übrigens ein vollständiger Beweis nicht hergestellt ist ***).

In neuerer Zeit ist die Methode, Sätze durch Analogie und Induction zu finden, viel allgemeiner als im Alterthum angewandt worden, ja manche Mathematiker wollen diese Methode zu einer Beweisart erheben ****). Die vielen neuen Entdeckungen in der Geometrie, der binomische Lehrsatz, die Sätze von den Potenzen (wo untersucht wird, was a^n bedeutet, wenn n constant oder veränderlich ist, und im ersten Falle, wenn n eine positive ganze oder gebrochene, oder eine negative ganze oder gebrochene Zahl ist, oder wenn $n = 0$ gesetzt wird) sind genug Beispiele.

Sind durch diese sechs angeführten Arten gleichsam die Grenzsteine eines Systems von Sätzen aufgestellt, so wird sich an diese eine Menge neuer Sätze anreihen lassen, die theils durch die Analysis — als Mittelsätze — gefunden werden, theils aber Conversen, Folgerungen oder Zusätze des vorher Aufgefundenen sind.

VII.

Miscellen.

Auszug aus einem Briefe an den Herausgeber von Herrn G. D. E. Weyer, Assistenten an der Sternwarte zu Hamburg.

„Euer u. s. w. erlaube ich mir ergebenst die Anfrage zu machen, ob die Aufgabe

---

*) Pappi l. c. V. mech. Theorien 17.

**) Pappi l. c. V. 18—57.

***) L. F. Ofterdinger methodorum expositio, quarum ope principia calculi superioris inventa sunt. Pars I. Berol. 1831. pag. 8.

****) J. J. v. Littrow kurze Anleitung zur gesammten Mathematik. Wien. 1838. pag. IX.

„ein Viereck von gegebenen Seiten so zu construiren,
„dass die Diagonalen einander gleich werden,"
vielleicht schon specielle Auflösungen erhalten hat? Ein Lehrer der Mathematik erwähnte dieser Aufgabe vor einiger Zeit gegen mich. Ich fand bald, dass sich dieselbe einer schon allgemeiner gelösten Aufgabe unterordnen liess, nämlich der in Carnots Géométrie de Position, in der deutschen Bearbeitung von Schumacher Th. 2. S. 148.:

„wenn von den 4 Seiten und 2 Diagonalen eines Vier-
„ecks 5 gegeben sind, die 6te zu finden."

Die quadratische Gleichung, welche Carnot, und wie ich ebendaselbst angemerkt finde, auch schon Euler und Lexell für die Auflösung dieser allgemeinen Aufgabe gefunden haben, geht für den obigen speciellen Fall in die folgende cubische über — welches immer bemerkenswerth genug sein mag:

$$\begin{array}{llll} 2x^3 & -a\,.\,x^2 & +ab\,.\,x & +add = 0 \\ & -b & +ac & +daa \\ & -c & +bd & +bcc \\ & -d & +cd & +cbb \\ & & -2ad & -abc \\ & & -2bc & -abd \\ & & & -acd \\ & & & -bcd \end{array}$$

wo x das Quadrat der Diagonale, und a, b, c, d die Quadrate der Seiten des Vierecks bezeichnen. Die immer mögliche eine reelle Wurzel kann negativ, und damit die Diagonale ($=\sqrt{-x}$) imaginär werden, wo die Auflösung unmöglich ist, z. B. wenn zwei neben einander liegende Seiten des Vierecks gegen die beiden übrigen für den verlangten Zweck zu klein sind."

Mir ist die obige Bemerkung neu gewesen. G.

VIII.

Geometrische Untersuchungen über Potenzlinie, Potenzcentrum und Potenzkreis, Polarität, Aehnlichkeitspunkte und Aehnlichkeitsaxen.

Von

Herrn C. F. Arndt,

Lehrer am Gymnasium zu Stralsund. *)

I. Potenzlinie, Potenzcentrum und Potenzkreis.

1.

Aufgabe. Den geometrischen Ort des Punktes zu bestimmen, für welchen die Quadratdifferenz seiner Entfernungen von zwei festen Punkten eine constante Grösse ist.

Auflösung. Sind A, B die festen Punkte, M der Mittelpunkt von AB, und ist Q der Durchschnitt des von dem beliebigen Punkte P auf AB gefällten Perpendikels mit AB, so ist (Euclid. Elem. Lib. II. prop. 12. 13.)

$$PA^2 = PM^2 + AM^2 \pm 2AM \times QM$$
$$PB^2 = PM^2 + AM^2 \mp 2AM \times QM,$$

*) Ich glaube, dass diese ganz einfache, bloss die elementarsten Sätze in Anspruch nehmende Darstellung der Hauptresultate der neueren geometrischen Untersuchungen wohl zu der so sehr zu wünschenden weitern Verbreitung dieser Gegenstände geeignet sein und vielleicht eine neue Veranlassung zu deren Einführung in den geometrischen Elementarunterricht geben wird. G.

mit Beziehung der Zeichen auf einander; folglich durch Subtraction

$$PA^2 - PB^2 = \pm 4AM \times QM,$$

indem man das obere oder untere Zeichen zu nehmen hat, jenachdem PA grösser oder kleiner als PB ist.

Nun bewege der Punkt P sich so, dass $PA^2 - PB^2$ dem constanten Quadrat q^2 gleich sei, so dass $q^2 = 4AM \times QM$, so muss QM constant bleiben, d. h. die von allen den Punkten, für welche die Quadratdifferenz der Entfernungen derselben von A und B constant ist, auf AB gefällten Perpendikel müssen AB in demselben Punkte schneiden, und folglich müssen gedachte Punkte selbst in einer auf AB perpendikulären Geraden liegen.

Wegen des doppelten Vorzeichens werden also zwei Gerade den gesuchten Ort repräsentiren. Zur Construction der Oerter bedient man sich am besten der Relation $PA^2 - PB^2 = q^2 = OA^2 - OB^2$, und man hat also folgende Aufgabe zu lösen.

2.

Auf einer Geraden AB einen Punkt Q so zu bestimmen, dass der Quadratunterschied seiner Entfernungen von den Endpunkten der Geraden A und B einem gegebenen Quadrate q^2 gleich ist.

Auflösung. (Taf. II. Fig. 1.) Ist 1) $q < AB$, so beschreibe man über AB als Diameter einen Halbkreis, trage q von A aus als Sehne AC ein, fälle von C auf AB das Perpendikel CD und halbire DB in Q, so ist Q der gesuchte Punkt. Denn es ist $q^2 = AB \times AD = (AQ + BQ)(AQ - BQ) = AQ^2 - BQ^2$.

Wenn aber 2) $q > AB$, so errichte man BC senkrecht auf AB, trage zwischen die Schenkel des rechten Winkels q von A aus als Hypotenuse AC ein, ziehe CD senkrecht auf AC, dass es AB in D schneidet, und halbire DB in Q, so ist Q der verlangte Punkt. Denn es ist $q^2 = AD \times AB = (AQ + BQ)(AQ - BQ) = AQ^2 - BQ^2$.

Ist endlich 3) $q = AB$, so ist B der verlangte Punkt.

3.

Aufgabe. Welches ist der geometrische Ort des Punktes, für welchen die Quadratsumme seiner Entfernungen von zwei festen Punkten einem constanten Quadrate q^2 gleich ist?

Auflösung. Nach 1. hat man die Relation

$$PA^2 + PB^2 = 2PM^2 + 2AM^2,$$

folglich muss PM constant sein, da $2PM^2 = q^2 - 2AM^2 = q^2 - \frac{1}{2}AB^2$, oder $PM = \sqrt{\frac{1}{2}q^2 - \frac{1}{4}AB^2}$ ist.

Falls daher q^2 nicht kleiner als $\frac{1}{2}AB^2$ ist, wird der gesuchte Ort eine aus dem Mittelpunkte von AB mit dem obigen Radius beschriebene Kreislinie sein.

Zur Construction des Orts, wenn solcher vorhanden, bedient

an sich mit Vortheil eines der Durchschnitte Q der Kreislinie mit er Geraden AB. Zu dem Ende ist die folgende Aufgabe zu lösen.

4.

Aufgabe. Auf einer Geraden AB (Taf. II. Fig. 2.) inen Punkt Q so zu bestimmen, dass die Quadratsumme einer Entfernungen von den Endpunkten der Geraden A und B einem gegebenen Quadrate q^2 gleich ist.

Auflösung. Man trage an B und AB die Gerade BL so n, dass der Winkel ABL die Hälfte eines Rechten beträgt, und enke sich von A auf BL und AB die senkrechten AK und AL ezogen, so dass $KA = KB$, $AL = AB$ und $BK = LK$ wird.

Da nun $AK^2 = \frac{1}{2}AB^2$, $AL^2 = AB^2$ ist, so wird ein aus A it q beschriebener Kreis die Gerade BL gar nicht, oder in einem unkte Q, oder in zwei Punkten treffen, jenachdem $q^2 < \frac{1}{2}AB^2$ der $= \frac{1}{2}AB^2$ oder $> \frac{1}{2}AB^2$ ist, auch wird der Kreis die Verlängerung von BL über die Endpunkte treffen, wenn $q > AB$ ist.

Findet kein Durchschnittspunkt statt, so ist nach dem Obigen ie Aufgabe unmöglich, findet aber einer oder zwei statt, so fälle an von einem beliebigen C auf AB das Perpendikel CQ, so ist Q der gesuchte Punkt, weil AC^2 oder $q^2 = AQ^2 + CQ^2 = AQ^2 + BQ^2$ ist.

5.

Zusatz. Die Quadratsumme der Theile einer geraden Linie st ein Minimum, wenn die beiden Theile einander gleich sind; sonst fällt ihr Werth zwischen $\frac{1}{2}a^2$ und a^2, wenn a die Gerade st, und liegt ein Punkt auf der Verlängerung der Geraden, so ist die Quadratsumme der Entfernungen desselben von den Endpunkten der Geraden grösser als das Quadrat der letztern.

6.

Lehrsatz. Führt man in der Ebene eines Kreises durch einen festen Punkt nach beliebiger Richtung eine Gerade, so jedoch, dass sie den Kreis in zwei Punkten schneidet, so ist das Rechteck aus den Entfernungen des erst gedachten Punktes von den Durchschnittspunkten der durch ihn geführten Geraden mit der Kreislinie von unveränderlicher Grösse.

Nämlich wenn der gegebene Punkt sich ausserhalb der Kreislinie befindet, so gleicht das constante Rechteck dem Quadrate der vom in Rede stehenden Punkte an die Kreislinie gezogenen Tangente; liegt jener aber innerhalb der Kreislinie, so hat jenes Rechteck zum einfachen Maass das Quadrat der halben Sehne, welche auf der den gegebenen Punkt mit dem Mittelpunkte des Kreises verbindenden Geraden in dem gegebenen Punkte senkrecht steht und auch wohl Mittelsehne genannt wird.

Beweis *). Die von dem gegebenen Punkte P aus gezogene

*) Euclid Lib. III. prop. 35. 36. erweist unser Theorem bloss mit Hülfe der Gleichheit.

Gerade schneide den Kreis in D, D', und wenn P ausserhalb der Kreislinie liegt, so sei B der Berührungspunkt der von P aus an den Kreis gezogenen Tangente. Dann ist, wenn man sich BD, BD' gezogen denkt, $\triangle PBD \sim \triangle PBD'$ und folglich $PB^2 = PD \times PD'$, so dass $PD \times PD'$ für alle Lagen der Geraden PDD' constant ist.

Wenn aber der Punkt P innerhalb der Kreislinie liegt, so schneide die durch denselben gehende Mittelsehne den Kreis in E und E', so wird $\triangle EPD \sim \triangle E'PD'$, folglich $PD \times PD' = PE \times PE' = PE^2$ sein, so dass $PD \times PD'$ wiederum für alle Lagen der Geraden constant ist.

7.

Zusatz. Bezeichnet man durch e die Entfernung des gegebenen Punktes vom Mittelpunkte der Kreislinie, so überzeugt man sich kraft des pythagoräischen Lehrsatzes, dass das constante Rechteck $PD \times PD'$ der Grösse $e^2 - r^2$ oder $r^2 - e^2$ gleich ist, jenachdem P sich ausserhalb oder innerhalb der Kreislinie befindet.

8.

Jenes gedachte Rechteck, dessen besondere Betrachtung eine der fruchtbarsten in der Theorie des Kreises ist, hat man mit einem eigenen Namen belegt, und es die Potenz des Punktes P in Bezug auf die gegebene Kreislinie genannt. Auch ist zu bemerken, dass unter gleichartigen Potenzen fortan diejenigen verstanden werden sollen, welche zu Punkten gehören, die zugleich ausserhalb oder zugleich innerhalb der Kreislinie liegen, die übrigen hingegen ungleichartige Potenzen genannt werden.

Diese Unterscheidung wird durch den besonderen Charakter solcher Potenzen motivirt; das Folgende giebt weiteren Aufschluss darüber.

9.

Lehrsatz. Der geometrische Ort aller Punkte, welchen gleiche und gleichartige Potenzen in Bezug auf zwei feste Kreislinien zugehören, ist eine auf der Centrale der Kreise senkrechte gerade Linie.

Beweis. Die gegebenen Kreise werden im Folgenden immer durch ihre Mittelpunkte C und C', die Centrale CC' durch a und die Halbmesser durch r und r' bezeichnet.

Jedes Punktes P Potenzen in Bezug auf die gegebenen Kreislinien werden durch die Grössen $\pm(e^2 - r^2)$, $\pm(e'^2 - r'^2)$ repräsentirt (7.), wenn e und e' die Entfernungen des Punktes P von den Mittelpunkten C und C' sind. Soll nun P gleiche und gleichartige Potenzen in Bezug auf C und C' darbieten, so muss mit Beziehung der Zeichen auf einander $\pm(e^2 - r^2) = \pm(e'^2 - r'^2)$ sein, also immer $e^2 - e'^2 = r^2 - r'^2$, oder der geometrische Ort aller Punkte, welchen gleiche und gleichartige Potenzen zukommen, stimmt mit dem Orte aller Punkte überein, für welche die Quadratdifferenz ihrer Entfernungen von den festen Punkten C und C' der constanten Grösse $r^2 - r'^2$ gleich ist, weshalb (1. 2.) der Ort,

wenn er überhaupt existirt, eine auf der Centrale senkrechte gerade Linie ist. Um aber den Ort für alle Fälle nachzuweisen, betrachten wir die verschiedenen Lagen der Kreislinien C und C' gegen einander.

10.

Den in 9. betrachteten Ort nennt man die Potenzlinie (*axe radical*) der gegebenen Kreise.

Nun behaupte ich zuerst, dass die Potenzlinie zweier sich tangirender Kreise deren gemeinschaftliche Tangente ist.

Denn für jeden Punkt dieser Tangente ist $e^2 - e'^2 = r^2 - r'^2$, folglich dieselbe die Potenzlinie (9.); auch erhellt dies rein geometrisch schon daraus, dass jeder Punkt der Berührenden gleiche und gleichartige Potenzen für beide Kreislinien darbietet, indem jede Potenz durch das Quadrat der gemeinschaftlichen vom Punkte P und dem Berührungspunkte begrenzten Tangente gemessen wird.

2) Die Potenzlinie zweier sich schneidender Kreise ist deren gemeinschaftliche Sehne.

Denn für jeden der Durchschnittspunkte der Kreislinien ist der Quadratunterschied der Entfernungen von den Mittelpunkten C und C' dem Quadratunterschiede der Radien gleich.

3) Liegen die Kreislinien ausser einander, so befindet sich der Durchschnitt Q der Potenzlinie mit der Centrale CC' zwischen den Mittelpunkten C und C' ausserhalb der Peripherien beider Kreise.

Denn bestimmt man auf CC' den Punkt Q so, dass $QC^2 - QC'^2 = r^2 - r'^2$ ist, so muss das in Q auf CC' errichtete Perpendikel die Eigenschaft haben, dass der Quadratunterschied der Entfernungen jedes Punktes im Perpendikel von C und C' der Grösse $r^2 - r'^2$ gleich ist (§. 1. 2.), und das Perpendikel wird die Potenzlinie sein, wenn jeder seiner Punkte gleichartige Potenzen darbietet. Dies ist aber wirklich der Fall; denn da $r^2 - r'^2 = (r + r')(r - r')$ und $r + r' < CC'$, so ist $r^2 - r'^2 < CC'$ und Q liegt folglich (2.) zunächst zwischen C und C'. Ferner findet man leicht $QC = \frac{a^2 + r^2 - r'^2}{2a}$, wo a die Centrale, und $QC' = \frac{a^2 - (r^2 - r'^2)}{2a}$. Nun ist aber $QC > r$, da wegen $r + r' < a$ der Unterschied $\frac{a^2 + r^2 - r'^2}{2a} - r = \frac{(a-r)^2 - r'^2}{2a}$ positiv ist, und eben so ist $QC' > r'$, da der Unterschied $\frac{a^2 - (r^2 - r'^2)}{2a} - r' = \frac{(a - r')^2 - r^2}{2a}$ ebenfalls positiv ist, weshalb Q ausserhalb beider Peripherien liegt.

4) Liegen endlich die Kreislinien in einander, so befindet sich Q ausserhalb beider Peripherien auf der Verlängerung von CC' über C' hinaus, wenn der Kreis $C' < C$ ist, welches ebenso wie in 3) bewiesen werden kann.

11.

Zusatz. Bestimmt man zu je zweien von 3 Kreislinien die Potenzlinien, so treffen diese drei Potenzlinien in einem und demselben Punkte, dem Potenzcentrum (*centre radical*), zusammen.

Denn der Durchschnitt O der Potenzlinien der Systeme C und C', C und C'' bietet sowohl für C und C', als für C und C'' gleiche Potenzen dar, also muss er auch gleiche Potenzen für C' und C'' darbieten, und folglich auf der Potenzlinie der Kreislinien C' und C'' liegen.

Hieraus fliesst, dass sowohl die gemeinschaftlichen Tangenten dreier Kreislinien, als auch die gemeinschaftlichen Sehnen in einem und demselben Punkte zusammentreffen (§. 10).

12.

Lehrsatz. Der geometrische Ort aller Punkte, welche gleiche und ungleichartige Potenzen in Bezug auf zwei Kreislinien C und C' darbieten, ist, wenn er überhaupt existirt, eine aus dem Mittelpunkte der Centrale CC' beschriebene dritte Kreislinie, und das Quadrat des Halbmessers derselben ist der Grösse $\frac{r^2+r'^2}{2}-\frac{a^2}{4}$ gleich.

Beweis. Jedes Punktes P Potenzen in Bezug auf die gegebenen Kreislinien werden durch die Grössen $\pm(e^2-r^2)$, $\pm(e'^2-r'^2)$ repräsentirt (7). Soll nun P gleiche und ungleichartige Potenzen darbieten, so muss mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander $\pm(e^2-r^2)=\mp(e'^2-r'^2)$, oder für beide Fälle $e^2+e'^2=r^2+r'^2$ sein. Folglich stimmt der betrachtete Ort mit dem Orte aller Punkte überein, für welche die Quadratsumme ihrer Entfernungen von den festen Punkten C und C' der constanten Grösse $r^2+r'^2$ gleich ist, weshalb der Ort (3. 4. 5.), wenn er überhaupt existirt, eine aus dem Mittelpunkte von CC' mit dem obigen Halbmesser beschriebene Kreislinie ist. In 4. und 5. ist aber gezeigt, dass der Ort nur dann möglich ist, wenn $r^2+r'^2$ nicht kleiner als $\frac{1}{2}a^2$ ist. Die Lage des Orts für die verschiedenen Lagen der Kreislinien wird durch den nächsten Paragraphen näher bestimmt.

13.

1) Wenn die gegebenen Kreislinien sich berühren, so ist der Ort, den wir im Folgenden Potenzkreis nennen wollen, die beide Kreise in ihrem gemeinsamen Berührungspunkte tangirende Kreislinie, und liegt ganz innerhalb des grössern Kreises. Nur wenn die Kreislinien gleich sind, und Berührung von Aussen statt findet, geht der Potenzkreis in den gemeinschaftlichen Contactpunkt über.

Denn die Quadratsumme der Entfernungen des Berührungspunktes von den Mittelpunkten C und C' ist der Quadratsumme der Radien gleich, weshalb (12) der Potenzkreis beide berührt, und da der Mittelpunkt desselben innerhalb der grössern Kreislinie liegt, so wird der Kreis auch ganz innerhalb der grössern liegen.

In der That ist hier $r^2+r'^2-\frac{1}{2}a^2=r^2+r'^2-\frac{1}{2}(r\pm r')^2$ $=\frac{1}{2}(r\mp r')^2$, und folglich der gesuchte Halbmesser $\frac{1}{2}(r\mp r')$ $=\frac{1}{2}(r\pm r')\mp r'$, und dies ist die Entfernung des Mittelpunkts der Centrale vom gemeinschaftlichen Contactpunkte.

2) **Schneiden sich die Kreislinien, so geht der Potenzkreis durch ihre Durchschnittspunkte**, weil jedem der letztern die Eigenschaft zukommt, dass die Quadratsumme seiner Entfernungen von den Mittelpunkten C und C' der Quadratsumme der Radien gleichkommt.

3) Liegt eine Kreislinie C' in der andern C, so findet immer ein Potenzkreis statt, da in diesem Falle $a < r - r'$, mithin $r^2 + r'^2 - \frac{1}{2}a^2 > \frac{1}{2}(r-r')^2$, also positiv ist.

4) Nur wenn die eine Kreislinie ausserhalb der andern liegt, findet nicht immer ein Potenzkreis statt, da hier $r^2 + r'^2$ kleiner als $\frac{1}{2}a^2$ sein kann.

14.

Berühren sich drei Kreislinien von Aussen, und ist C unter ihnen die grösste, so werden die etwanigen Durchschnitte der Potenzkreise für die Systeme C und C', C und C'' auf der gemeinschaftlichen Tangente der Kreislinien C' und C'' sein.

Denn jedem der gedachten Durchschnitte entsprechen gleiche Potenzen sowohl für C und C', als für C und C'', und da er ausserhalb der beiden Kreislinien C' und C'' liegt, so muss er sich auf der Potenzlinie der letztern befinden.

15.

Für zwei Kugeln C, C' giebt es immer eine Ebene, deren sämmtlichen Punkten gleiche und gleichartige Potenzen in Bezug auf die Kugeln entsprechen, und diese Ebene nennt man die Potenzebene der beiden Kugeln.

Man schneide nämlich die Kugeln durch beliebig viele durch ihre Mittelpunkte gehende Ebenen, so giebt es für jedes der dadurch entstehenden Kreispaare eine Potenzlinie, welche auf der Centrale CC' senkrecht steht, und zwar in einem Punkte der Centrale, dessen Lage nur von der Grösse der Halbmesser und der Centrale abhängt. Deshalb werden alle Potenzlinien in demselben Punkte der Centrale auf der letztern senkrecht stehen, und sie liegen daher in einer und derselben auf der Centrale senkrechten Ebene (Euclid Lib. XI. prop. 5.).

16.

Zusatz. Die Potenzebene zweier sich berührender oder schneidender Kugeln ist resp. deren gemeinschaftliche Berührungs- oder Durchschnittsebene (§. 10. 1. 2.).

17.

Zusatz. Die Potenzebenen dreier Kugeln, zu zweien verbunden, haben eine gemeinschaftliche Durchschnittslinie, welche auf der durch die Mittelpunkte der 3 Kugeln bestimmten Ebene senkrecht steht, und Potenzlinie der Kugelflächen genannt wird.

Denn die 3 Kreise, in welchen die durch C, C', C'' gehende Ebene die Kugeln schneidet, haben (11.) ein gemeinschaftliches

Potenzcentrum und dieses muss zunächst (15.) allen Potenzebenen gemeinsam sein. Sodann müssen die 3 Potenzebenen, da sie alle auf der Centrale senkrecht stehen, noch einen gemeinsamen Durchschnittspunkt haben, und die beide Durchschnitte verbindende Grade ist folglich den drei Potenzebenen gemeinsam.

18.

Lehrsatz. Die 6 Potenzebenen oder die 4 Potenzlinien von 4 Kugeln, von deren Mittelpunkten 3 nimmer in gerader Linie liegen, haben einen gemeinsamen Durchschnittspunkt, das Potenzcentrum für die vier Kugeln genannt.

Beweis. Der Durchschnittspunkt der Potenzlinien für die beiden Systeme C, C', C''; C, C', C''' hat die Eigenschaft, dass ihm gleiche Potenzen für beide Systeme zugehören; also bietet jener Punkt gleiche Potenzen sowohl in Bezug auf die Kreislinien C, C'', C''', als in Bezug auf die Kreislinien C', C'', C''' dar, und er muss daher einerseits in der Potenzlinie des Systems C, C'', C''', andrerseits in der Potenzlinie des Systems C', C'', C''' liegen, so dass die 4 Potenzlinien, also auch die 6 Potenzebenen, in einem Punkte zusammentreffen.

19.

Mit Rücksicht auf zwei Kugeln giebt es immer eine dritte Kugel, deren sämmtliche Punkte gleiche und ungleichartige Potenzen für die ersten Kugeln darbieten, wenn nur die Quadratsumme der Halbmesser der letztern nicht kleiner als die Hälfte des Quadrats der Centrale ist.

Wie nämlich 15. aus 9. erhellet, so fliesst unser Satz aus 12.

20.

Aus 13. 1) 2) folgt ferner, dass der in 19. betrachtete Ort, den man Potenzkugel nennen könnte, für zwei sich tangirende oder schneidende Kugeln beide zugleich in dem gemeinschaftlichen Contactpunkte berührt, oder durch den gemeinschaftlichen Durchschnittskreis beider Kugeln geht.

II. Anwendung des Princips der Potenzialität von Kreisen auf geometrische Lehrsätze.

21.

Lehrsatz. Die drei in den Mittelpunkten der Seiten eines Triangels auf dieselben senkrecht errichteten Geraden treffen in einem und demselben Punkte zusammen.

Beweis. Aus den Spitzen des Triangels C, C', C'' denke man sich drei willkührliche, aber gleiche Kreislinien beschrieben, so erhellt aus 9., dass die in den Mittelpunkten von CC', CC'', $C'C''$ auf diese Geraden senkrecht errichteten geraden Linien die Potenzlinien der Systeme C, C'; C, C''; C', C'' sind, und sich folglich (11.)

in einem Punkte schneiden. Dieser letztere ist zugleich von den Spitzen des Triangels gleich weit entfernt, oder der Mittelpunkt des um das Dreieck beschriebenen Kreises.

22.

Lehrsatz. Die 3 von den Spitzen eines Triangels auf die Gegenseiten gefällten Perpendikel treffen in einem und demselben Punkt zusammen*).

Beweis. A, B, C seien die Spitzen des Triangels, D, E, F die Durchschnittspunkte der von C, B, A auf die Gegenseiten gefällten Perpendikel mit diesen Seiten.

Man denke sich aus A, B, C als Mittelpunkten mit den drei Halbmessern R, r, ϱ Kreislinien beschrieben, und bestimme diese Halbmesser so, dass die Relationen stattfinden:

$$R^2 - r^2 = CA^2 - CB^2,$$

$$R^2 - \varrho^2 = BA^2 - BC^2,$$

so dass also R willkührlich ist, die beiden andern Radien aber durch R bestimmt werden. Aus diesen Gleichungen fliesst aber

$$r^2 - \varrho^2 = AB^2 - AC^2.$$

Da nun (§. 9.) CD, BE, AF die Potenzlinien der drei beschriebenen Kreise sind, so treffen (§. 11.) dieselben in einem einzigen Punkte zusammen.

23.

Zusatz. (Taf. II. Fig. 3.) Es sei BF die Höhe des bei B rechtwinkligen Triangels ABC, ferner $AD = AB$ senkrecht auf AB, $CE = CB$ senkrecht auf CB, und CD, AE gezogen, so wird behauptet, dass CD, AE, BF in demselben Punkte zusammentreffen. (Hülfslinien des pythagoräischen Satzes.)

Es kommt darauf an, ein Dreieck nachzuweisen, in welchem die so eben charakterisirten Linien Höhen sind. Zu dem Ende fälle man von A und C auf CD und AE die Perpendikel AG und CH, deren erstere BF in P schneiden mag. Dann finden folgende Umstände statt:

Weil erstens $\angle D = PAB$ (jeder $= 90^\circ - DAG$), ferner $\angle BAC = \angle KBP$ (denn jeder $= 90^\circ - ABF$), also auch $90^\circ + BAC = 90^\circ + KBP$, d. i. $\angle DAC = ABP$, und endlich $AD = AB$ ist, so erhellt die Congruenz der Triangel DAC und ABP, woraus fliesst $PB = AC$.

---

*) Grunert Analyt. Geom. Theil I. S. 58, Theil II. S. 54 — 55. Der letztere Beweis stützt sich auf die Theorie der Transversalen, und der erstere ist analytisch.

M. vgl. auch den sinnreichen Beweis von Gauss in Carnots Geom. der Stellung (Ueb. v. Schumacher) Theil II. S. 363. Gauss weist ein Dreieck nach, für welches die in den Mittelpunkten der Seiten auf letztere errichteten Perpendikel die Höhen des gegebenen Dreiecks sind, so dass dann dieselben (21.) sich in einem Punkt schneiden müssen.

Ganz ebenso wird erwiesen, dass CH die Linie BF in einem Punkte schneidet, dessen Entfernung von B der Geraden AC gleich ist, so dass also die Gerade BF mit den Perpendikeln AG, CH in einem und demselben Punkte P zusammentrifft, wodurch das Dreieck ACP entstanden ist, das BF, CD, AE zu Höhen hat. Die letztern müssen sich daher in demselben Punkte schneiden (22.).

24.

Lehrsatz. Die 3 Geraden, welche die Winkel eines Dreiecks halbiren, und auch die 3 Geraden, von denen eine einen Winkel des Dreiecks, die andern die Nebenwinkel der übrigen halbiren, treffen in einem und denselben Punkte zusammen.

Beweis. 1ster Fall. Das Dreieck sei ABC. Zunächst behaupte ich, dass man auf den Seiten AB, AC, BC die Punkte D. E, F so bestimmen könne, dass je zwei der dadurch bewirkten 6 Abschnitte, welche eine Winkelspitze des Dreiecks zum gemeinschaftlichen Endpunkt haben, einander gleich sind.

Denn setzt man $AD = x$, und nimmt $AE = AD$, $CF = CE$, so wird sein $CE = b - x$, $BF = a - b + x$, und damit nun $BF = BD$ werde, hat man x nur so zu wählen, dass die Relation statt habe $x = c - a + b - x$, oder $x = \frac{1}{2}(b + c - a)$, und das ist immer möglich.

Nachdem die Punkte D, E, F so bestimmt sind, denke man sich aus A, C, B resp. mit $AD = AE$, $CE = CF$, $BF = BD$ drei Kreise beschrieben, welche sich in D, E, F von Aussen berühren werden, so werden die in D, E, F auf AB, AC, BC errichteten Senkrechten die gemeinschaftlichen Tangenten sein, und sich (11.) in einem Punkte O schneiden. Die von O nach den Winkelspitzen gezogenen Geraden müssen aber die Winkel des Dreiecks halbiren, da, indem O das Potenzcentrum, z. B. $OD = OE$, also die Triangel AOD, AOE congruent sind, und mithin der Winkel A durch OA halbirt wird. Folglich treffen AO, BO, CO in demselben Punkte zusammen, der der Mittelpunkt des in das Dreieck beschriebenen Kreises ist.

2ter Fall. Ganz wie vorher wird gezeigt, dass man auf der Seite AB selbst den Punkt D, und auf den Verlängerungen der Seiten CA, CB über A, B hinaus die Punkte E, F so bestimmen könne, dass $AD = AE$, $BD = BF$, $CE = CF$ sei, und dass man also aus A, B, C drei Kreise beschreiben könne, welche sich berühren. Die drei in D, E, F auf die Seiten errichteten Perpendikel treffen dann in einem Punkte O zusammen, der die Eigenschaft hat, dass OA, OB, OC die Winkel des Dreiecks halbiren. Uebrigens berühren sich die Kreise A und B von Aussen, A und C, so wie B und C von Innen.

Auch erhellet, dass stets 4 Kreise existiren, welche drei sich schneidende gerade Linien berühren.

25.

Dass die drei von den Spitzen eines Triangels nach den Mittelpunkten der Gegenseiten gezogenen Geraden sich in einem Punkte schneiden, kann auf die einfachste Art so erwiesen werden.

In Taf. II. Fig. 4. seien D, E die Mittelpunkte von AB und BC, und CD, AE schneiden sich in O, so kann zunächst behauptet werden, dass CO doppelt so gross als DO, und AO doppelt so gross als OE ist.

Denn zieht man DH parallel AE, so wird EB in H halbirt, der EH ist die Hälfte von EC, also muss auch DO die Hälfte von OC sein. Auf ähnliche Art wird gezeigt, dass OE die Hälfte von OA ist.

Da sich also je zwei Transversalen so schneiden, dass der nach der Winkelspitze gerichtete Abschnitt doppelt so gross als der andere ist, so muss die Transversale von B nach der Mitte von AC durch O gehen; denn wenn sie CD in O' schnitte, so müsste $CO' = 2DO'$ sein, welches ungereimt ist.

Diesen Durchschnittspunkt nennt man den **Schwerpunkt** des Triangels.

26.

Lehrsatz. **Der Schwerpunkt eines Triangels, der Durchschnittspunkt der 3 Höhen, und der Mittelpunkt des um den Triangel beschriebenen Kreises liegen stets in gerader Linie, so dass sich der Schwerpunkt zwischen den beiden andern befindet und vom Höhendurchschnitt doppelt so weit entfernt ist, als vom Mittelpunkte des um das Dreieck beschriebenen Kreises.**

Beweis. ABC (Taf. II. Fig. 5.) sei der Triangel, CD und AE senkrecht auf AB und BC, ihr Durchschnitt H, CF nach der Mitte von AB gerichtet, und CS doppelt so gross als SF, so dass S der Schwerpunkt (25.), und endlich M der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises, so dass MF senkrecht auf AB ist. Man ziehe HM, SM, so soll HSM eine gerade Linie und HS doppelt so gross als SM sein.

Da jeder der Winkel ABE, $CHE = 90° - BCD$, so ist $\Delta ABE \sim \Delta CHE$, und folglich $CH : AB = CE : AE$. Da ferner $\angle FMB = \angle ACB$, so ist $\Delta FMB \sim \Delta ACE$, und folglich $FM : FB = CE : AE$, also nach dem Obigen $CH : AB = FM : FB$. Nun ist aber AB doppelt so gross als FB, also muss CH doppelt so gross als FM sein; und da $SC = 2SF$, und endlich $\angle HCS = \angle SFM$, so sind die $\Delta\Delta$ CHS, SFM ähnlich, mithin $\angle CSH = \angle FSM$, folglich HSM eine gerade Linie, und $SH = 2SM$.

Ueber Aehnlichkeitspunkte und Aehnlichkeitsaxen.

27.

Lehrsatz. **Zieht man zwei parallele Radien zweier Kreislinien, und verbindet die Endpunkte derselben durch eine Gerade, so geht diese für alle Paare auf derselben oder auf verschiedenen Seiten der Centrale befindlicher Radien immer durch denselben Punkt der Centrale.**

Beweis. Der Kreislinien Mittelpunkte seien C, C' und r, r' die Radien, die wir ungleich setzen, wenn die Radien auf derselben

Seite der Centrale liegen. Findet nun das Letztere statt, so sei A der Durchschnittspunkt der Centrale mit der die Endpunkte der parallelen Radien verbindenden Geraden; dann wird sein $CA : C'A = r : r'$, folglich $CA - C'A : CA$ (oder $C'A$) $= r - r' : r$ (oder r'), folglich $CA = \frac{ar}{r-r'}$, $C'A = \frac{ar'}{r-r'}$, wenn a die Centrale bedeutet. Demnach behält CA oder $C'A$ einen unveränderlichen Werth, *w. z. b. w.*

Liegen nun ferner die parallelen Radien auf verschiedenen Seiten der Centrale, so sei I der Durchschnittspunkt der die Endpunkte der Radien verbindenden Geraden mit der Centrale, und man findet $CI = \frac{ar}{r+r'}$, $C'I = \frac{ar'}{r+r'}$, so dass I ein unveränderlicher Punkt ist.

28.

Die Punkte A, I, welche wir so eben betrachtet haben, werden resp. der **äussere** (directe) und **innere** (inverse) **Aehnlichkeitspunkt** der gegebenen Kreislinien genannt.

29.

Zusätze. 1) Zweier sich von Aussen tangirender Kreislinien inverser Aehnlichkeitspunkt ist deren gemeinsamer Berührungspunkt.

2) Berühren sich zwei Kreislinien von Innen, so ist ihr directer Aehnlichkeitspunkt ihr gemeinsamer Berührungspunkt.

3) Liegt eine Kreislinie innerhalb der andern, so befindet sich der directe Aehnlichkeitspunkt beider innerhalb der kleinern Kreislinie, in allen andern Fällen aber ausserhalb derselben.

4) Liegt eine Kreislinie ganz ausserhalb der andern, so befindet sich der inverse Aehnlichkeitspunkt beider ausserhalb beider Peripherien, in allen andern Fällen ist er innerhalb der kleinern Peripherie.

5) Zieht man von einem der Aehnlichkeitspunkte an die eine Kreislinie die Tangenten, so werden diese auch Tangenten der andern Kreislinie sein, so dass man an zwei Kreislinien die 4 gemeinschaftlichen Tangenten sehr leicht mit Hülfe der Aehnlichkeitspunkte construiren kann.

30.

Beschreibt man mit zwei gegebenen Kreisen zwei neue Kreise concentrisch, deren Halbmesser dasselbe Verhältniss zu einander haben, als die Halbmesser der ursprünglichen Kreise, so kommt den neu beschriebenen Kreisen derselbe directe und inverse Aehnlichkeitspunkt zu als den gegebenen.

Denn sind r, r' die ursprünglichen, ϱ, ϱ' die neuen Halbmesser, so dass $r : r' = \varrho : \varrho'$, so ist, wenn A der directe Aehnlichkeitspunkt der gegebenen Kreislinien ist, $AC = \frac{ar}{r-r'}$ (27.). Weil aber

$r' = \varrho : \varrho - \varrho'$, also $\frac{r}{r-r'} = \frac{\varrho}{\varrho - \varrho'}$, so hat man $AC = \frac{a\varrho}{\varrho - \varrho'}$,
t auch A der directe Aehnlichkeitspunkt der mit ϱ, ϱ' be-
enen Kreislinien.
hnlicherweise erhellt das Theorem für den innern Aehnlich-
nkt.

31.

e Aufgabe, alle Systeme je zweier mit zwei gegebenen
nien concentrischer Kreise zu finden, welche mit den erstern
en Aehnlichkeitspunkte haben, wird am einfachsten so gelöst:
n die Entfernungen eines Aehnlichkeitspunktes von den Mit-
kten der gegebenen Kreise als Diameter beschreibe man zwei
, und ziehe durch den Aehnlichkeitspunkt eine beliebige Ge-
welche die neu beschriebenen Kreislinien in zwei Punkten
et, so müssen die gesuchten concentrischen Kreise durch
Punkte gehen, weil die gezogene Gerade solche Kreise in
nannten Punkten zugleich tangirt.

32.

nstruirt man also für drei aus C, C', C'' mit den
essern r, r', r'' beschriebene Kreislinien die äussern
ichkeitspunkte A, A', A'' und die inneren I, I', I'', so
es unendlich viele Systeme je dreier mit den ge-
en concentrischer Kreislinien, welchen dieselben
ichkeitspunkte zukommen.
an bestimme nämlich für ein willkührliches ϱ den Radius ϱ'
ss $r : r' = \varrho : \varrho'$, so werden die mit ϱ, ϱ' beschriebenen Kreis-
dieselben Aehnlichkeitspunkte haben, als die mit r, r' jenen
ntrisch beschriebenen (30). Sodann werde ϱ'' so angenommen,
$r : r'' = \varrho : \varrho''$, so kommt auch den Kreislinien ϱ, ϱ'' derselbe
lichkeitspunkt zu als den mit ihnen concentrischen r, r''. Aus
n Proportionen fliesst aber die dritte $r' : r'' = \varrho' : \varrho''$, und folg-
wird zu gleicher Zeit der Aehnlichkeitspunkt der Kreislinien
mit dem der jenen concentrischen Kreislinien r', r'' überein-
nen.
Da ϱ willkührlich ist, so geht die Zahl der Systeme ins Un-
che.

33.

Lehrsatz. Zieht man durch den einen Aehnlichkeits-
kt zweier Kreislinien C und C' z. B. A eine beliebige
nsversale, und bezeichnet die Durchschnittspunkte
elben mit den Kreislinien C und C' resp. mit M, N;
N', so dass M und M' die dem Aehnlichkeitspunkt
ichst liegenden Punkte sind, so sind die Rechtecke

$$AM \times AN', \; AN \times AM'$$

gleich, und von unveränderlicher Grösse, wie man
die Transversale ziehen mag.

Beweis. Wegen der Parallelität der Radien CM, $C'M'$; CN, $C'N'$ ist $AM : AM' = r : r'$, $AN : AN' = r : r'$, folglich $AM : AM' = AN : AN'$, oder die Rechtecke $AM \times AN'$, $AN \times AM'$ sind einander gleich. Ferner ist $\frac{AM}{AM'} \times AM' . AN' = AM \times AN' = \frac{r}{r'} \times AM' \times AN'$, und da $AM' \times AN'$ die Potenz des Punktes A für die Kreislinie C', also unveränderlich ist, so muss auch $AM \times AN'$, oder $AN \times AM'$ von unveränderlicher Grösse sein.

Sind B, B' die Berührungspunkte der von A aus gezogenen gemeinschaftlichen Tangente mit den Kreislinien, so übersieht man leicht, dass das in Rede stehende constante Rechteck dem Rechteck $AB \times AB'$ gleich ist.

34.

Lehrsatz. Werden zwei Kreislinien von einer dritten gleichartig (d. h. zugleich von Aussen, oder zugleich von Innen) berührt, so liegen die Berührungspunkte mit dem directen Aehnlichkeitspunkte in gerader Linie. Findet aber ungleichartige Berührung statt, so liegt der inverse Aehnlichkeitspunkt mit den Berührungspunkten in gerader Linie.

Beweis. Zuerst berühre (Taf. II. Fig. 6. a.) die Kreislinie O die gegebenen C und C' in den Punkten M, N' von Aussen, so dass O, M, C; $O, N' C'$ in gerader Linie liegen, und $OM = ON'$ ist. Zieht man die Gerade MN', welche die Kreislinie C' in M' schneidet, so ist $\angle OMN' = ON'M = C'N'M' = C'M'N'$, folglich $C'M'$ mit CM parallel, weshalb MN' durch den äusseren Aehnlichkeitspunkt A der Kreislinien C, C' geht.

Berührt zweitens die Kreislinie o (Taf. II. Fig. 6. a.) die gegebenen in m und n' von Innen, so dass ocm, $oc'n'$ gerade Linien sind, und $om = on'$ ist, so ist, wenn die Gerade mn' die Kreislinie C' in m' schneidet, $\angle omm' = on'm = C'm'n'$, also $C'm'$ mit Cm parallel, weshalb mn' durch den directen Aehnlichkeitspunkt geht.

Wenn endlich drittens (Taf. II. Fig. 6. b.) die Kreislinie O die Kreislinie C in M von Aussen, die Kreislinie C' aber in N' von Innen berührt, so dass OMC, $ON'C'$ gerade Linien sind, und $OM = ON'$ ist, so ist, wenn MN' den Kreis C' in M' schneidet, $\angle OMM' = ON'M' = C'M'N'$, folglich $C'M'$ parallel mit CM, weshalb, da die Halbmesser auf verschiedenen Seiten der Centrale liegen, die Gerade MN' durch den innern Aehnlichkeitspunkt I geht.

35.

Denkt man sich in Taf. II. Fig. 6. a. von A die gemeinschaftlichen äussern Tangenten gezogen, welche die Kreislinie C in B, b, die andere in B', b' berühren, so erhellt, dass die Berührungspunkte jeder beide Kreislinien von Aussen tangirenden Kreislinie auf den Bogen BMb, $B'M'b'$ liegen werden, und auf den andern Bogen die Berührungspunkte aller beide von Innen tangirenden Kreise.

Das Umgekehrte findet statt, wenn die Kreislinien ungleichartig berührt werden.

Auch erhellt, dass keine Kreislinie die gegebenen in den Berührungspunkten der Tangenten zugleich berühren kann.

36.

Es seien nun die Kreislinien C, C', C'' so beschaffen, dass sich zwei neue C''', C^{IV} beschreiben lassen, von denen die erste die drei gegebenen von Aussen in den Punkten M, M', M'', die andere dieselben von Innen in den Punkten N, N', N'' berührt. Der äussere Aehnlichkeitspunkt der Kreislinien C, C' liegt dann (34.) sowohl auf der Geraden MM', als auf NN', der äussere Aehnlichkeitspunkt von C, C'' sowohl auf MM'', als auf NN'', der äussere Aehnlichkeitspunkt von C', C'' sowohl auf $M'M''$, als auf $N'N''$. Da nun, wenn A, A', A'' die directen Aehnlichkeitspunkte der Systeme C, C'; C, C''; C', C'', die Geraden AMM', ANN'; $A'MM''$, $A'NN''$; $A''M'M''$, $A''N'N''$ Transversalen der Systeme C, C'; C, C''; C', C'' sind, so finden (33.) die Relationen statt:

$$\left\{\begin{aligned} AM \,.\, AM' &= AN \,.\, AN' \\ A'M \,.\, A'M'' &= A'N \,.\, A'N'' \\ A''M' \,.\, A''M'' &= A''N' \,.\, A''N'' \end{aligned}\right\},$$

und die Punkte A, A', A'' bieten somit gleiche und gleichartige Potenzen für die Kreislinien C''', C^{IV} dar, oder $AA'A''$ ist eine gerade Linie, nämlich die **Potenzlinie** der Kreise C''', C^{IV}.

Sind die Kreise C, C', C'' ferner so beschaffen, dass sich zwei neue C''', C^{IV} beschreiben lassen, deren erster die Kreise C, C' von Aussen, C'' von Innen, der andere C, C' von Innen, C'' aber von Aussen berührt, so erhellet ganz wie vorher, dass die Aehnlichkeitspunkte A, I', I'' in gerader Linie, nämlich in der Potenzlinie der Kreise C''', C^{IV} liegen.

Wir haben daher folgendes

37.

Theorem. **Wenn drei Kreise C, C', C'' so beschaffen sind, dass sich zwei neue C''', C^{IV} beschreiben lassen, von welchen der erste alle drei von Aussen, der andere alle drei von Innen berührt, so liegen die drei directen Aehnlichkeitspunkte der gegebenen Kreise in der Potenzlinie der neu beschriebenen.**

Kann man zweitens zwei Kreise beschreiben, von welchen der eine C, C' von Aussen, C'' von Innen, der andere C, C' von Innen, C'' von Aussen berührt, so liegen der directe Aehnlichkeitspunkt von C, C', und die inversen Aehnlichkeitspunkte von C, C''; C', C'' in der Potenzlinie der neu beschriebenen Kreise.

38.

Die so eben charakterisirten Aehnlichkeitspunkte liegen **stets** in gerader Linie, ohne dass die Kreislinien von der in 37. angegebenen Beschaffenheit sind, nur kann dann von einer Potenzlinie nicht die Rede sein.

Denn nach 32. kann man die Halbmesser der 3 Kreise so lange abnehmen lassen, dass die Kreise ganz ausserhalb einander liegen, und doch dieselben Aehnlichkeitspunkte haben, und für 3 ganz ausserhalb einander liegende Kreise sind die Bedingungen in 37. erfüllt. Wir haben also folgendes Theorem:

Bezeichnet man die äussern Aehnlichkeitspunkte dreier Kreislinien durch A, A', A'', die innern durch I, I', I'', so liegen die Ternionen

$$A,\ A',\ A''$$
$$A,\ I',\ I''$$
$$A',\ I,\ I''$$
$$A'',\ I,\ I'$$

stets in gerader Linie, und diese vier Geraden heissen Aehnlichkeitsaxen, $AA'A''$ die directe, die übrigen inverse.*)

Ist es möglich, an die drei Kreislinien die 6 äussern gemeinschaftlichen Tangenten zu ziehen, so ergiebt sich aus dem Obigen der von Monge gefundene Satz:

Dass die drei Punkte, in denen je zwei zusammengehörende der sechs an drei Kreise gezogenen äussern Tangenten sich schneiden, stets in einer geraden Linie liegen.

IV. Die hauptsächlichsten Folgerungen der Aehnlichkeitstheorie bei Kreisen.

39.

Zuerst denken wir uns in und um einen Kreis einen Triangel beschrieben, ABC, KLM (Taf. II. Fig. 7.), so dass die Seiten des letztern durch die Winkelspitzen des erstern gehen, und ferner denken wir uns die Seiten des $\triangle ABC$ verlängert, bis sie den Tangenten in den Gegenecken in D, E, F begegnen. Dann treten folgende Umstände ein:

Die aus K mit $KA = KB$ beschriebene Kreislinie wollen wir der Kürze halber bloss die Kreislinie K nennen, und eine ähnliche Benennung für die aus L mit $LB = LC$, und aus M mit $MA = MC$ beschriebenen Kreislinien anwenden.

Dies vorausgesetzt werden die Kreislinien K und M von der Kreislinie L in B und C von Aussen (d. h. gleichartig) berührt, weshalb ihr directer Aehnlichkeitspunkt auf der Geraden BC liegt

*) M. vgl. den analytischen Beweis von Grunert in d. Analyt. Geometrie. Theil I. S. 111 ff. Der Beweis in demselben Werke Theil II. S. 267 ff. gründet sich auf die Theorie der Transversalen. Einen speciellen Fall des Theorems beweist Meier Hirsch (Sammlung geometrischer Aufgaben Theil II. S. 368—70) durch Rechnung. Magnus Sammlung von Aufg. und Lehrsätzen aus der analyt. Geometrie. Erste Abtheilung S. 80.

(34.), und da derselbe sich auch auf der Centrale KM befindet, so ist der Durchschnitt von BC und MK, nämlich D, der directe Aehnlichkeitspunkt der Kreislinien K und M.

Ganz ebenso erhellt, dass E der directe Aehnlichkeitspunkt der Kreislinien K und L, F der directe Aehnlichkeitspunkt der Kreislinien L und M ist.

Daher (38.) liegen die Punkte D, E, F in einer geraden Linie, nämlich in der **äussern Aehnlichkeitsaxe** der Kreislinien K, L, M.

Ferner werden die Kreislinien D und E (d. h. die aus D, E mit DA, EB beschriebenen Kreislinien) von der Kreislinie K in A und B ungleichartig berührt, weshalb ihr inverser Aehnlichkeitspunkt auf AB und DE zu gleicher Zeit liegt, also F ist.

Eben so wird eingesehen, dass E der directe Aehnlichkeitspunkt von den Kreislinien D und F, D der directe Aehnlichkeitspunkt von den Kreislinien E und F ist.

Demnach haben wir folgendes Theorem:

Bei jedem einem Kreise eingeschriebenen Dreieck liegen die Durchschnittspunkte der Seiten mit den Tangenten in den Gegenecken stets in gerader Linie*).

40.

Dass dieser Satz für alle Kegelschnitte gilt, wird so erwiesen.

Die Spitze des Kegels, aus welchem der Kegelschnitt geschnitten ist, heisse S und ABC sei ein in den Kegelschnitt beschriebenes Dreieck; legt man durch SA eine Berührungsebene des Kegels, welche die Ebene SBC in der Geraden SD schneidet, so dass D der Durchschnittspunkt von BC mit der Durchschnittslinie der Berührungsebene und der Ebene des Kegelschnitts ist, so wird DA eine Tangente des Kegelschnitts in A sein. Auf dieselbe Art construire man die übrigen Tangenten, und deren Durchschnittspunkte mit den übrigen Seiten des Triangels.

Man schneide nun den Kegel durch eine Ebene so, dass der Schnitt ein Kreis und von den Kanten SA, SB, SC resp. in A', B', C' getroffen wird. Sodann sei $A'D'$ die Durchschnittslinie der Berührungsebene durch SA mit der Kreisebene, dass also $A'D'$ eine Tangente des Kreises ist, welche die Verlängerung von $B'C'$ in D' schneidet, und ebenso bestimme man die Punkte E', F'.

Nach 39. liegen nun die Punkte D', E', F' in gerader Linie, und da D, E, F auf den Geraden SD', SE', SF' liegen, so werden die letztern Punkte in einer Ebene, und zugleich in der Ebene des Kegelschnitts liegen, und müssen sich also in der Durchschnittslinie beider Ebenen, oder in gerader Linie befinden.

41.

Betrachten wir jetzt zwei Vierecke $ABCD$, $KLMN$, von denen das erste in einen Kreis, das andere um denselben so beschrieben ist, dass seine Seiten durch die Ecken des erstern gehen; E sei der Durchschnitt der Seiten AB und CD, F der Durchschnitt der Gegenseiten AD und BC, G der Durchschnitt der Tangenten in

*) Steiner, Systematische Entwickelung der Abhängigkeit der geometr. Gestalten von einander etc. S. 155. — Grunert Analyt. Geometr. Theil II. S. 269. (Theorie der Transversalen).

den Gegenecken LK und MN, endlich H der Durchschnitt d
Tangenten KN und LM (Taf. II. Fig. 8.).

Da nun die Kreislinien N und L sowohl von der Kreislinie
als von der Kreislinie M resp. in A, B; D, C gleichartig berü
werden, so liegt ihr directer Aehnlichkeitspunkt auf den drei G
raden AB, CD, NL, so dass also die letztern in einem und de
selben Punkte E zusammentreffen.

Ganz ebenso wird erwiesen, dass die drei Geraden BC, A
MK in demselben Punkte F zusammenstossen.

Ferner werden die Kreislinien N und L von der Kreislinie
in D und B, von der Kreislinie H in A und C ungleichartig b
rührt, weswegen ihr inverser Aehnlichkeitspunkt auf den Gerad
BD, AC, NL zugleich liegt, und die letztern also in einem u
demselben Punkt O sich schneiden müssen.

Ganz ebenso wird erwiesen, dass BD, AC, KM sich in ein
Punkte schneiden, und folglich treffen die vier Geraden AC, B
KM, LN in demselben Punkte O zusammen.

Nun werden auch die Kreislinien G und H von den Kreislini
K und M resp. in A, B; D, C ungleichartig berührt, daher i
innerer Aehnlichkeitspunkt E ist, und somit H, G, E in gerad
Linie liegen. Sodann werden die Kreislinien G und H von d
Kreislinien L und N resp. in B, C; A, D gleichartig berührt,
dass ihr directer Aehnlichkeitspunkt F ist, und somit auch F n
G, H in gerader Linie liegt. Also befinden sich die vier Punk
E, F, G, H in einer geraden Linie.

42.

Diese Resultate finden für alle Kegelschnitte statt.

Denn es sei wieder S des Kegels Spitze, zu welchem der Schn
gehört, $ABCD$, $KLMN$ ein in und um den Kegelschnitt beschri
benes Viereck, dass die Seiten des letztern durch die Spitzen d
erstern gehen, E, F die Durchschnitte der Gegenseiten des eing
schriebenen, G, H die Durchschnitte der Gegenseiten des umschr
benen Vierecks, so dass also SE der Durchschnitt der Ebenen SA
SDC, E der Durchschnittspunkt der Geraden SE mit dem Keg
schnitt etc., SG der Durchschnitt der durch SB, SD gelegten
rührungsebene des Kegels, G der Durchschnitt der Geraden
mit dem Kegelschnitt ist etc.

Man schneide die Kegelfläche durch eine Ebene, dass der Sch
ein Kreis wird, bezeichne durch A', B', C', D'; K', L', M',
E', F', G', H' die Durchschnittspunkte der Geraden SA, SB,
SD; SK, SL, SM, SN; SE, SF, SG, SH mit der Kreisebene
wird erhellen, dass $A'B'C'D'$, $K'L'M'N'$ ein in und um den K
beschriebenes Viereck ist, dessen Seiten und Spitzen sich berüh
und E', F' die Durchschnitte der Gegenseiten des in den Kr
und G', H' die Durchschnitte der Gegenseiten des um den K
beschriebenen Vierecks sind.

Nach 41. liegen die Punkte E', L', N' in gerader Linie,
dass SE', SL', SN' eine Ebene bilden, in welcher auch die Pu
E, L, N liegen, und da die letztern in der Ebene des Kegelsch
sind, so befinden sie sich im Durchschnitt beider Ebenen ode
gerader Linie.

Ferner schneiden sich nach 41. die vier Geraden $A'C'$, B'

KM', LN' in demselben Punkte O', weswegen die vier Ebenen SAC', SBD', $SK'M'$, $SL'N'$ sich in der Geraden SO' treffen, und mithin der Punkt O, als auf SO' liegend, allen vier Ebenen gemeinsam ist. Nun liegt aber O im Kegelschnitt, also auf den vier Geraden AC, BD, KM, LN, in welchen jene Ebenen den Kegelschnitt treffen.

Endlich befinden sich (41.) die vier Punkte E', F', G', H' in gerader Linie, weshalb SE', SF', SG', SH' eine Ebene bilden, in welcher auch E, F, G, H liegen, und da die letztern auch im Kegelschnitt sind, so liegen sie in beider Ebenen Durchschnitt oder in gerader Linie.

Demnach entspringen folgende Theoreme:

1) Sind in und um einen Kegelschnitt zwei Vierecke so beschrieben, dass die Seiten des letztern durch die Ecken des erstern gehen, so liegt der Durchschnitt der Gegenseiten des eingeschriebenen Vierecks mit einem Paar der Gegenecken des umschriebenen in gerader Linie.

2) Die vier Diagonalen beider Vierecke treffen in demselben Punkt zusammen, so dass also auch der Durchschnitt der Gegenseiten des eingeschriebenen Vierecks mit einem Paar Gegenecken des umschriebenen, und dem Durchschnitt der vier Diagonalen in gerader Linie liegt.

3) Die vier Durchschnittspunkte der Gegenseiten beider Vierecke befinden sich in einer geraden Linie*).

43.

Betrachten wir nun das in einen Kreis beschriebene Sechseck $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$ (Taf. III. Fig. 9.), und verlängern je zwei Seiten, zwischen denen zwei andere liegen, bis sie sich in G_1, G_2, G_3 schneiden, so treten folgende Umstände ein.

Zieht man in A_2, A_5; ferner in A_3, A_6; endlich in A_4, A_1 Tangenten, bis sie sich in K_3, K_2, K_1 schneiden, so ist (42.) G_1 der äussere Aehnlichkeitspunkt der Kreislinien K_1, K_2, ferner G_2 der inverse Aehnlichkeitspunkt der Kreislinien K_2, K_3; endlich G_3 der inverse Aehnlichkeitspunkt der Kreislinien K_1, K_3; folglich müssen (38.) die Punkte G_1, G_2, G_3 in gerader Linie liegen, und zugleich werden die 6 Punkte G_1, G_2, G_3, K_1, K_2, K_3 in einer geraden Linie sein.

Da sich nun ganz wie 41. und 42. diese Sätze für alle Kegelschnitte beweisen lassen, so entspringen die Theoreme:

1) Bei jedem einem Kegelschnitt eingeschriebenen Sechseck liegen die Durchschnittspunkte der drei Seitenpaare, zwischen denen zwei andere Seiten liegen, stets in einer geraden Linie und

2) auch die Durchschnitte der Tangentenpaare in den Ecken, zwischen denen zwei andere liegen, befin-

---

*) Grunert Analyt. Geomet. Theil I. S. 114—15. (Speciell. Fall für den Kreis). — J. Steiner Geometr. Gestalten. S. 153. — Magnus Sammlung analyt. Aufgaben. S. 191.

den sich in einer geraden Linie, welche mit der in 1) genannten Geraden zusammenfällt*).

44.

Aus dem ersten Theorem lässt sich ein anderes ableiten, welches sich auf ein in einen Kegelschnitt beschriebenes Fünfeck bezieht, und als ein Grenzfall jenes betrachtet werden kann, wenn man sich vorstellt, dass eine Seite des in einen Kegelschnitt beschriebenen Sechsecks allmählig verschwinde. Der Satz ist folgender:

Bei jedem einem Kegelschnitt eingeschriebenen Fünfeck liegen die Durchschnittspunkte irgend zweier Seitenpaare, und der Durchschnittspunkt, welchen die jedesmalige fünfte Seite mit der Tangente in der gegenüberstehenden Ecke bildet, allemal in einer geraden Linie (Steiner Geom. Gestalt. S. 153.)

Beweis. In Taf. III. Fig. 10. sei $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$ das in den Kegelschnitt beschriebene Fünfeck, die Seiten $A_1 A_2$, $A_4 A_5$ schneiden sich in G_1, die Seiten $A_2 A_3$, $A_4 A_5$ schneiden sich in G_2, und die Seite $A_1 A_5$ begegne der in A_3 gezogenen Tangente in G_3, so soll erwiesen werden, dass $G_1 G_2 G_3$ eine gerade Linie ist.

Man nehme zwischen A_2 und A_3 noch einen sechsten Punkt A_6 an, verbinde ihn mit A_2 und A_3, so dass $A_1 A_2 A_6 A_3 A_4 A_5$ ein in den Kegelschnitt beschriebenes Sechseck ist, und verlängere $A_2 A_6$ bis es $A_4 A_5$ in Γ_2, $A_6 A_3$ bis es $A_1 A_5$ in Γ_3 begegnet, so muss (43.) $G_1 \Gamma_2 \Gamma_3$ eine gerade Linie sein.

Gesetzt nun G_1, G_2, G_3 lägen nicht in gerader Linie, sondern die Gerade $G_1 G_2$ begegnete der Geraden $A_1 A_5$ in g_3, so lasse man sich nun den Punkt A_6 dem Punkte A_3 immer näher und näher bewegen, ohne dass er mit ihm zusammenfällt; unter diesen Umständen wird die Gerade $A_2 A_6$ der Geraden $A_2 A_3$ immer näher kommen, und der Punkt Γ_2 somit dem Punkte G_2 sich näher bringen lassen, als jede vorgegebene Distanz beträgt. Ebenso wird der Punkt Γ_3 dem Punkte G_3 beliebig nahe kommen.

Wenn nun der Punkt g_3 nicht mit G_3 zusammenfällt, so wird, während Γ_2 sich nach G_2 bewegt, die Gerade $G_2 \Gamma_2$ zwar beliebig klein gemacht werden können, aber nicht die Gerade $\Gamma_3 G_3$, da sie im vorliegenden Falle stets grösser als $G_3 g_3$ ist, und da dies gegen das Obige, so muss g_3 mit G_3 zusammenfallen, oder die Punkte G_1, G_2, G_3 sind in einer Geraden, *w. z. b. w.*

---

*) Den Satz 1) hat Pascal (Essai sur les coniques 148 Note) gefunden, und in einer verloren gegangenen Abhandlung soll er die ganze Theorie der Kegelschnitte auf jenen Satz gegründet haben. — Vgl. Grunert Anal. Geom. Theil II. S. 270 ff., wo der Beweis von Gergonne (Annales de Mathem. XVII. p. 143.) mitgetheilt ist. — Poncelet Traité des propriétés projectives des figures. p. 81. — J. Steiner Geom. Gestalten S. 150. und Annales de Math. Vol. XVIII. — Carnot Géometrie de position. Vol. II. p. 215. der Uebersetzung.

45.

s den vorhergehenden Sätzen erhellt, wie man folgende Auf-
bloss mit Hülfe des Lineals lösen kann.

Wenn irgend drei Punkte eines Kegelschnitts,
ie Tangenten in zweien gegeben sind, die Tan-
im dritten Punkte zu finden (39.).

Wenn irgend vier Punkte eines Kegelschnitts,
e Tangente in einem derselben gegeben ist, die
nten in den drei übrigen Punkten zu finden (42.)
an in Taf. II. Fig. 8. sei die Tangente in A gegeben. Man
e die Punkte E, F, O, ziehe EO bis sie die gegebene Tan-
N schneidet, und verbinde N mit D, so hat man die Tan-
n D, ziehe ferner FO bis sie die Tangenten in D und A
nd K schneidet, und verbinde M mit C, K mit B, so hat
Tangenten in C, B.

Wenn irgend vier Tangenten eines Kegelschnitts
er Berührungspunkt der einen gegeben sind, die
rungspunkte der drei übrigen zu finden.

Von einem Punkte, der im Umfange des Kegel-
ts liegt, an denselben eine Tangente zu ziehen.
I. Fig. 10.)
n nehme ausser dem gegebenen Punkte A_3 noch vier andere
A_2, A_4, A_5. so dass A_1A_2, A_3A_4 sich in G_1, ferner A_2A_3,
sich in G_2 schneiden, ziehe G_1G_2, bis sie A_1A_5 in G_3
et, und verbinde G_3 mit A_3, so ist A_3G_3 die gesuchte Tan-
des Kegelschnitts.

46.

heorem. Die Potenzcentra aller Systeme dreier
e, welche man erhält, wenn man die Halbmesser
r gegebenen Kreise, ohne die Lage der Mittel-
te zu ändern, um gleiche Grössen zugleich wach-
oder zugleich abnehmen lässt, befinden sich stets
rader Linie, welche auf der äussern Aehnlichkeits-
der gegebenen Kreise senkrecht steht.

um Beweise dieses Theorems sind folgende Vorbereitungen
:

) Im Punkte S (Taf. III. Fig. 11.) treffen 3 Gerade zusammen,
eren mittleren die Gerade LM senkrecht ist; ferner seien von
beliebigen Punkte P der Geraden SK auf SL und SM die
ndikel PQ und PR gefällt, so behaupte ich, dass die Propor-
statt finde

$$SQ : SR = SM : SL.$$

Denn wegen Aehnlichkeit der $\Delta\Delta$ SQP, SKL; SRP, SKM
$Q : SK = SP : SL$, $SR : SK = SP : SM$, also $SQ \,.\, SL =$
SP, $SR \,.\, SM = SK \,.\, SP$, daher $SQ \,.\, SL = SR \,.\, SM$, oder
$SR = SM : SL$.

2) Umgekehrt wenn diese Proportion statt findet, und PQ, PR
L, SM senkrecht stehen, so muss LM auf SK senkrecht
Denn wenn dieses nicht wäre, so müsste das von L auf SK

gefällte Perpendikel die Gerade SM im Punkte M' so schneider, dass $SQ : SR = SM' : SL$ wäre, und dann müsste also $SM = SM'$ sein, welches ungereimt.

3) In Taf. III. Fig. 12. sind von beliebig vielen Punkten P, P', P'' etc. der Geraden $PP'P''$ auf zwei andere Gerade $RR'R''$, $QQ'Q''$ Perpendikel PQ, PR; $P'Q'$, $P'R'$; $P''Q''$, $P''R''$ etc. gefällt, so behaupte ich, dass die Gleichheit der Verhältnisse statt finde

$$QQ' : RR' = QQ'' : RR'' = \text{etc.}$$

Denn zieht man durch P mit den Geraden $QQ'Q''$, $RR'R''$ Parallelen, welche die Perpendikel in q', q'' etc., r', r'' etc. schneiden, so ist $Pq' : Pq'' = PP' : PP''$, $Pr' : Pr'' = PP' : PP''$, also auch $Pq' : Pq'' = Pr' : Pr''$, oder $Pq' : Pr' = Pq'' : Pr''$, oder $QQ' : RR' = QQ'' : RR''$.

4) Umgekehrt, wenn auf den Geraden QQ', RR' die Punkte Q, Q', Q'' etc., R, R', R'' etc. so gewählt sind, dass sich verhält $QQ' : QQ'' = RR' : RR''$ etc., so müssen die Durchschnittspunkte der in diesen Punkten errichteten Perpendikel sich in gerader Linie befinden.

Denn schnitte die Gerade PP' das Perpendikel $P''Q''$ nicht in P'', welchen Punkt das letztere mit $P''R''$ gemein hat, so müsste das vom gedachten Durchschnitt auf RR' gefällte Perpendikel die letztere Gerade im Punkte $\mathfrak{R}''$ so treffen, dass $QQ' : QQ'' = RR' : R\mathfrak{R}''$ wäre, und dann müsste nach der Voraussetzung $RR'' = R\mathfrak{R}''$ sein, welches ungereimt ist.

5) Nun seien C, C', C'' die Mittelpunkte, r, r', r'' die Halbmesser dreier Kreislinien, und λ Dasjenige, um welches alle drei Halbmesser wachsen oder abnehmen; ferner seien Q, R die Durchschnitte der vom Potenzcentrum P auf die Centralen CC', CC'' gefällten Perpendikel mit diesen Centralen, P' das Potenzcentrum der mit den Halbmessern $r+\lambda$, $r'+\lambda$, $r''+\lambda$ beschriebenen mit den erstern concentrischen Kreise, und Q', R' die Durchschnitte der von eben diesem Potenzcentrum auf die nämlichen Centralen wie vorher gefällten Perpendikel mit dem letztern, so ist nach dem Obigen

$$QC = \frac{CC'^2 + r^2 - r'^2}{2CC'}, \quad Q'C = \frac{CC'^2 + (r+\lambda)^2 - (r'+\lambda)^2}{2CC'},$$

also durch Subtraction $Q'C - QC = \frac{(r-r')\lambda}{CC'}$, oder $QQ' = \frac{(r-r')\lambda}{CC'}$. Ganz ebenso wird sein $RR' = \frac{(r-r'')\lambda}{CC''}$, also ist

$$\frac{QQ'}{RR'} = \frac{r-r'}{r-r''} \cdot \frac{CC''}{CC'}.$$

Hiernach ist das Verhältniss $QQ' : RR'$ constant, weshalb (4) die Potenzcentra sämmtlich in einer geraden Linie liegen.

Die Richtung dieser Geraden zu bestimmen, bezeichnen wir durch L und M die äusseren Aehnlichkeitspunkte der Systeme C, C' und C, C'', so ist nach dem Obigen $LC = \frac{r \cdot CC'}{r-r'}$, MC

$= \frac{r.CC'}{r-r''}$, also $\frac{MC}{LC} = \frac{r-r'}{r-r''} \cdot \frac{CC'}{CC'}$, und folglich nach dem Obigen

$$QQ' : RR' = MC : LC.$$

Ist aber S der Durchschnitt der Geraden PP' mit CM und wird die Gerade Sl' mit LC parallel gezogen, dass sie die Perpendikel PQ, $P'Q'$ in q, q', die Aehnlichkeitsaxe LM in l' schneidet, so ist $Sq : SR = QQ' : RR'$, also auch $Sq : SR = MC : LC$, und da $MC : LC = MS : Sl'$, so hat man $Sq : SR = MS : Sl'$, weshalb nach 2) die Gerade SPP' oder der Ort der Potenzcentra auf $l'M$ oder LM, d. h. auf der äussern Aehnlichkeitsaxe senkrecht steht.

Wenn man die Halbmesser theils wachsen, theils abnehmen liesse, so würde der Ort der Potenzcentra noch immer eine Gerade sein, welche auf einer der drei inversen Aehnlichkeitsaxen senkrecht stände, z. B. auf $AI'I''$, wenn man die Halbmesser r und r' wachsen, und r'' abnehmen lässt.

Dies weiter auszuführen ist unnöthig, da es mittelst obiger Principien unter einigen Modificationen leicht erhellt*).

47.

Nach dem vorhergehenden Paragraphen steht der Ort der Potenzcentra auf einer Aehnlichkeitsaxe der Kreislinien, deren Halbmesser r, r', r'' sind, senkrecht, und da er aus demselben Grunde auf einer Aehnlichkeitsaxe der mit den Halbmessern $r+\lambda$, $r'+\lambda$, $r''+\lambda$ beschriebenen Kreise senkrecht ist, so entspringt folgendes Theorem, welches, so viel ich weiss, noch nicht bestimmt ausgesprochen ist:

Die Aehnlichkeitsaxen aller Systeme dreier Kreise, welche man erhält, wenn man die Halbmesser dreier gegebenen Kreise, ohne die Lage der Mittelpunkte zu ändern, um gleiche Grössen wachsen oder abnehmen lässt, sind alle unter sich und mit der Aehnlichkeitsaxe der gegebenen Kreise parallel.

V. Polarität der Kegelschnitte.

48.

Die Spitzen beliebig vieler über einer Geraden im Raum beschriebenen rechtwinkligen Triangel liegen in der um die nämliche Gerade als Diameter beschriebenen Kugelfläche.

Die Grundlinie aller Triangel sei AB und C die Spitze eines beliebigen unter ihnen, so muss die durch AB als Durchmesser gelegte Kugel nothwendig durch C gehen, weil die Kugel von je-

*) Man vergl. Grunerts Analyt. Geometrie Theil I. S. 117. Supplemente zum Wörterbuche Art. Anwendung der Analysis S. 22.

der Ebene in einem Kreise geschnitten wird, und der Winkel im Halbkreise ein rechter ist.

49.

Schneiden sich mehrere Ebenen in einem Punkte, und begegnen sie einer Kugelfläche, so liegen die Mittelpunkte der Kreise, in welchen sie die Kugel treffen, in derjenigen Kugel, welche die Entfernung des Durchschnittspunktes der Ebenen vom Mittelpunkte der gegebenen Kugel zum Durchmesser hat.

Bezeichnet man nämlich den Mittelpunkt der gegebenen Kugel durch C, den Durchschnittspunkt der Ebenen durch P, und ist M der Mittelpunkt eines Kreises, in welchem eine beliebige durch P gehende Ebene die Kugel trifft, so steht bekanntlich CM auf dieser Ebene senkrecht, so dass also CMP ein rechter Winkel ist. Da dies von jeder Ebene gilt, so erhellt die Richtigkeit des Theorems aus 48.

50.

Zusatz. Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller sich in einem Punkt P schneidender Sehnen eines Kreises, dessen Mittelpunkt C, ist die um CP als Diameter beschriebene Kreislinie.

51.

Theorem. Durch einen und denselben Punkt C sind nach einer Geraden beliebig viele andere Gerade gezogen, welche der erstern in K, K', K'' etc. begegnen, und unter denen CK die Senkrechte auf die gegebene Gerade ist.

Wenn nun auf derselben Seite des Punktes C auf den Geraden CK, CK', CK'' etc. die Punkte M, M', M'' resp. so angenommen werden, dass die Rechtecke

$$CK.CM,\ CK'.CM',\ CK''.CM'' \text{ etc.}$$

sämmtlich gleich sind, so befinden sich M, M', M'' etc. in derjenigen Kreislinie, welche CM zum Durchmesser hat.

Beweis. Es sei $M^{(n)}$ ein beliebiger unter den Punkten M', M'' etc. und die Gerade $MM^{(n)}$ gezogen. Wegen der Gleichheit $CK.CM = CK^{(n)}.CM^{(n)}$ verhält sich $CK : CM^{(n)} = CK^{(n)} : CM$, weshalb die Triangel $CKK^{(n)}$, $CM^{(n)}M$ ähnlich, und also die Winkel $CKK^{(n)}$, $CM^{(n)}M$ gleich sind. Aber der erste ist ein rechter, also muss auch der zweite ein rechter sein, woraus die Richtigkeit des Theorems einleuchtet.

52.

Denkt man sich das ganze so eben charakterisirte System um CMK als Axe herumgedreht, so beschreibt die Gerade $KK'K''$ eine auf CMK senkrechte Ebene, und die Kreislinie $CMM'M''$ eine Kugel, deren Diameter CM ist, weshalb folgendes Theorem entspringt:

Zieht man von einem Punkte C nach einer Ebene eliebig viele Gerade, die ihr in K, K', K'' etc. begegen, ist ferner CK auf der Ebene senkrecht, und wern die Punkte M, M', M'' etc. auf gedachten Geraden bestimmt, dass die Rechtecke $CK \,.\, CM$, $CK' \,.\, CM'$, $K'' \,.\, CM''$ etc. sämmtlich gleich sind, so befinden sich, M', M'' etc. in der um CM als Diameter beschriebe-n Kugelfläche.

53.

Die Theoreme in 51. und 52. sind der Umkehrung fähig, so ss, wenn die Punkte M, M', M'' in der Kugelfläche oder Kreisie um CM als Durchmesser liegen, und gedachte Rechtecke gleich nd, die Punkte K, K', K'' in der auf CM senkrechten Ebene ler geraden Linie liegen.

54.

Jetzt sei C der Mittelpunkt einer Kugel, welche von mehreren reisebenen, die sich in demselben Punkte M schneiden, getroffen ird; um jede dieser Kreislinien denke man sich die die Kugelfläche erührende Kegelfläche beschrieben, und die Spitzen aller der Keelflächen werden K, K', K'' etc. genannt. Die Geraden CK, K', CK'' etc. werden durch die Mittelpunkte der resp. Kreise M', M'' etc. gehen, und für die beliebigen Punkte A, A', A'', tc. in den Kreislinien, welche durch denselben Punkt M gehen, erden die Winkel CAK, $CA'K'$, $CA''K''$ etc. rechte sein. Deshalb müssen, da AM, $A'M'$, $A''M''$ etc. auf CMK, $CM'K'$, $CM''K''$ tc. in M, M', M'' etc. senkrecht sind, die Rechtecke $CK \,.\, CM$, $CK' \,.\, CM'$, $CK'' \,.\, CM''$ etc. sämmtlich gleich, nämlich jedes gleich dem Quadrat des Radius der gegebenen Kugel sein. Da nun (49.) die Punkte M, M', M'' etc. in der um CM als Diameter beschriebenen Kugel liegen, so müssen (53.) die Punkte K, K', K'' etc. in der auf CM in K senkrechten Ebene sich befinden, und wir haben das folgende Theorem:

Gehen die Ebenen beliebig vieler Kreislinien, in denen eine Kugelfläche geschnitten wird, durch einen und denselben Punkt, so liegen die Spitzen der um jene Kreislinien beschriebenen und die Kugel berührenden Kegelflächen jederzeit in derjenigen Ebene, welche auf der den Durchschnittspunkt der erstern Ebene mit dem Mittelpunkt der Kugel verbindenden Geraden senkrecht steht, und umgekehrt, wenn die Spitzen mehrerer Kegelflächen, welche sämmtlich um eine und dieselbe Kugel beschrieben sind, alle in einer Ebene liegen, so gehen die Ebenen der Kreise, in denen die Kugelfläche von den Kegelflächen berührt wird, durch einen einzigen Punkt, und die den letztern mit dem Mittelpunkt der Kugel verbindende Gerade steht auf erst gedachter Ebene senkrecht.

Der in Rede stehende Durchschnittspunkt ist Pol der Ebene, welche die Spitzen der Kegelflächen enthält, in Bezug auf die gegebene Kugel, und die Ebene Polarebene genannt worden.

Man vergl. den Beweis unseres Satzes von **Grunert** in der analyt. Geometrie Theil I. S. 283—87.

55.

Zusatz. **Schneiden sich beliebig viele Sehnen eines Kreises, dessen Mittelpunkt C, in demselben Punkte M, und construirt man in den beiden Endpunkten jeder Sehne die Tangenten des Kreises, so liegen die Durchschnittspunkte aller Tangentenpaare in einer einzigen geraden Linie, welche auf CM senkrecht steht, und umgekehrt.**

Die Gerade heisst **Polare** jenes Punktes, und dieser **Pol** der Geraden in Bezug auf die zu Grunde gelegte Kreislinie.

56.

Der Satz 55. behält seine Richtigkeit für alle **Kegelschnitte**.

Denn es sei S die Spitze des Kegels, zu welchem der Schnitt gehört, und AB, $A'B'$, $A''B''$ beliebig viele in demselben Punkte M zusammenkommende Sehnen des Kegelschnitts, so dass SM die Durchschnittslinie der Ebenen SAB, $SA'B'$, $SA''B''$ ist. Wird nun der Kegel von einer Ebene geschnitten, dass der Schnitt ein Kreis wird, und begegnen die Seiten des Kegels SA, SB; SA', SB' etc. der Peripherie des Kreises in a, b; a', b' etc., so werden auch die Kreissehnen ab, $a'b'$ etc. in demselben Punkte m zusammentreffen, welcher der Durchschnitt der Geraden SM mit der Kreisebene ist, indem dieser Punkt z. B. in den Ebenen Sab und der Kreisebene zu gleicher Zeit, also in ihrer Durchschnittslinie ab ist.

Nun seien K, K', K'' .... die Durchschnitte der Tangentenpaare in A, B, in A', B', in A'', B'' etc., und k, k', k'' .... die Durchschnitte der Tangentenpaare in a, b, in a', b', in a'', b'' etc., so werden SKk, $SK'k'$, $SK''k''$ etc. gerade Linien sein, da z. B. SK sowohl als Sk die Durchschnittslinie der durch SAa, SBb gehenden Berührungsebene des Kegels ist. Nach 55. liegen aber die Punkte k, k', k'' etc. in gerader Linie, weshalb Sk, Sk', Sk'' in einer Ebene sind, in welcher die Punkte K, K', K'' .... liegen. Die letztern Punkte sind aber auch in der Ebene des Kegelschnitts, mithin im Durchschnitt beider Ebenen, d. h. in **gerader Linie**, welche die Polare mit Rücksicht auf den Durchschnitt der Sehnen als Pol für den zu Grunde gelegten Kegelschnitt genannt wird.

57.

Um die Polare eines ausserhalb des Kreises gegebenen Punktes M zu finden, muss man (nach 55.) durch M eine beliebige den Kreis in zwei Punkten A', B' schneidende Gerade ziehen, und den Durchschnittspunkt der durch letztere Punkte gehenden Tangenten des Kreises K' suchen; fällt man dann von K' auf CM das Perpendikel, so ist dieses die verlangte Polare. Dieselbe lässt sich aber einfacher mittelst des folgenden Theorems bestimmen:

Die Polare eines ausserhalb des Kreises befindlichen Punktes ist die Gerade, welche die Berührungs-

punkte der von dem in Rede stehenden Punkte an die Kreislinie gezogenen Tangenten mit einander verbindet.

Beweis. In Taf. III. Fig. 13. sei M der Punkt, dessen Polare gesucht wird, MA eine beliebige Gerade, AK' die Tangente in A, CD senkrecht auf MA, so dass K' der Durchschnitt der Tangenten in A und A' ist, und endlich $K'K$ senkrecht auf CM, so wird $K'K$ die Polare des Punktes M sein (55.). Diese Gerade schneide die Kreislinie in B, so behaupte ich, dass MB den Kreis tangirt.

Denn da die Punkte D, K, M, K' in einer Kreislinie liegen, welche nämlich um MK' als Diameter beschrieben ist, so ist bekanntlich $CD \,.\, CK' = CK \,.\, CM$, und da $CD \,.\, CK' = CA^2$, so wird $CK \,.\, CM = CB^2$ sein, folglich CBM ein rechter Winkel, also BM eine Tangente des Kreises.

58.

Dieses Resultat bleibt für alle Kegelschnitte wahr.

Denn es sei S die Spitze des Kegels, M ein Punkt in der Ebene des Kegelschnitts, und m der Durchschnitt der Geraden SM mit einer Ebene, welche so gelegt ist, dass der Schnitt mit dem Kegel ein Kreis wird. Von m seien an die Kreislinie die Tangenten mb, mb' gezogen, so ist (57.) bb' die Polare von m für den Kreis, und der Durchschnitt der Ebene Sbb' mit dem Kegelschnitt wird die Polare des Punktes M für den Kegelschnitt sein (56.). Dieser Durchschnitt treffe den Kegelschnitt in B und B', so müssen MB, MB' Tangenten des letztern sein, weil sie in den durch Sbm, $Sb'm$ gelegten Berührungsebenen des Kegels liegen.

59.

Construction von Pol und Polare in Bezug auf eine gegebene Kreislinie.

1) Befindet sich der Punkt M, dessen Polare gesucht wird, in der Kreislinie selber, so ist die Tangente des Kreises durch M die Polare dieses Punktes, und dasselbe gilt von jedem Kegelschnitt.

2) Befindet sich der Punkt M ausserhalb der Kreislinie, so ist seine Polare diejenige Gerade, welche die Berührungspunkte der von M an den Kreis gezogenen Tangenten verbindet, und dasselbe gilt von jedem Kegelschnitt.

3) Befindet sich aber der Punkt M innerhalb der Kreislinie, deren Mittelpunkt C, so errichte man auf CM in M eine Senkrechte, welche der Kreislinie in B begegnet, und ziehe in B die Tangente, so wird deren Durchschnitt mit CM einen Punkt bestimmen, durch welchen die gesuchte Polare mit MA parallel geht.

Diese Construction gilt nicht für jeden Kegelschnitt, vielmehr läuft die Polare eines Punktes in Bezug auf einen Kegelschnitt dem conjugirten Durchmesser desjenigen parallel, welcher durch jenen Punkt gezogen werden kann (Magnus Sammlung analytischer Aufgaben S. 163.), was ich bei einer andern Gelegenheit synthetisch erweisen werde.

Wie man sich zu verhalten hat, um einer Geraden Pol zu finden, ist aus dem Vorhergehenden ersichtlich.

60.

Construction von Pol und Polare für jeden Kegelschnitt bloss mit Hülfe des Lineals.

Statt des Kreises in Taf. II. Fig. 8. denke man sich einen ganz beliebigen Kegelschnitt gezeichnet, und betrachte E oder O als den Punkt, dessen Polare gesucht wird.

Was den ersten Punkt betrifft, so ist K der Pol von EA, M der Pol von ED (58.), also (56.) KM die Polare von E. Die Gerade KM geht aber, wie oben gezeigt, durch die Durchschnittspunkte der Geraden AD, BC; AC, BD, weshalb sich ihre Richtung mit alleiniger Hülfe des Lineals finden lässt.

Für den zweiten innerhalb des Kegelschnitts gelegenen Punkt O die Polare zu bestimmen, erinnere man sich, dass H der Pol von AC, G der Pol von BD (58.), also GH die Polare von O ist (56.). Nun liegen aber die Punkte G, H, F, E in einer Geraden (42.), folglich geht die Polare von O durch die Punkte E und F, welche sich bloss mit Hülfe des Lineals construiren lassen.

Daraus fliesst folgende für alle Fälle passende Auflösung unserer Aufgabe:

Die Polare eines Punktes in Bezug auf einen Kegelschnitt zu finden, ziehe man durch denselben irgend zwei den Kegeschnitt schneidende Gerade, und verbinde die jedesmaligen vier Durchschnittspunkte durch zwei Paar Geraden, so ist die durch die Durchschnittspunkte dieser Geradenpaare bestimmte Gerade die verlangte Polare.

Wird der Pol einer Geraden gesucht, so bestimme man zu zwei beliebigen Punkten der letztern die Polaren, so wird deren Durchschnitt den Pol geben.

Da übrigens (Taf. II. Fig. 8.), wenn der gegebene Punkt E ausserhalb des Kegelschnitts liegt, und P, P' die Durchschnitte seiner Polaren mit dem Kegelschnitt sind, die Geraden EP, EP' den letztern tangiren, so übersieht man, wie von einem ausserhalb des Kegelschnitts gegebenen Punkte die beiden Tangenten durch blosse Anwendung des Lineals gefunden werden können.

61.

Zufolge des Theorems in 58. kann man das Fundamentaltheorem der Polarität (56.) jetzt auf den einfachen Ausdruck bringen:

Die Polaren beliebig vieler in einer Geraden befindlicher Punkte treffen in einem einzigen Punkte, dem Pol jener Geraden zusammen, und die Pole beliebig vieler in einem Punkt zusammentreffender Geraden befinden sich in einer einzigen Geraden, der Polare jenes Punktes.

Oder bewegt sich ein Punkt auf einer Geraden, so dreht sich seine Polare um den Pol jener Geraden, und dreht sich eine Gerade um einen festen Punkt, so bewegt sich ihr Pol in der Polare jenes Punktes.

62.

Gehen wir nun zur Untersuchung des Orts der Pole aller einander paralleler Geraden über, und betrachten zuerst die Kreislinie.

Nach dem Vorhergehenden liegt der Pol jeder beliebigen Geraden in Bezug auf eine Kreislinie jederzeit auf derjenigen Geraden, welche vom Mittelpunkt des Kreises auf die gegebene Gerade senkrecht gezogen ist, und auf eben dieser Geraden werden also die Pole aller einander parallelen Geraden liegen.

Nun sei S die Spitze des Kegels, zu welchem ein Kegelschnitt gehört, und AB, $A'B'$, $A''B''$ etc. seien beliebig viele in der Ebene des letztern befindliche parallele Gerade, ab, $a'b'$, $a''b''$ etc. die Durchschnitte der Ebenen SAB, $SA'B'$, $SA''B''$ etc. mit einer Kreisebene, welche den Kegel trifft, so behaupte ich, dass ab, $a'b'$, $a''b''$ etc. entweder sämmtlich parallel sind, oder in einem einzigen Punkt zusammentreffen.

Denn die Ebene SAB wird von jeder der andern Ebenen $SA'B'$, $SA''B''$ etc. in einer durch S gehenden Geraden geschnitten, welche mit AB (auch mit der Ebene des Kegelschnitts) parallel läuft, und alle diese Ebenen treffen folglich in einer durch S gehenden Geraden zusammen, die mit dem Kegelschnitt parallel.

Trifft es jetzt zu, dass diese Gerade auch mit der Kreisebene parallel ist (was sich dann ereignet, wenn sie mit der Durchschnittslinie der Ebenen des Kreises und des Kegelschnitts parallel), so müssen auch die Geraden ab, $a'b'$, $a''b''$ etc. offenbar parallel sein.

Wenn aber die Durchschnittslinie der Ebenen SAB, $SA'B'$, $SA''B''$ etc. der Kreisebene in K begegnet, so muss dieser Punkt in jeder der Geraden ab, $a'b'$, $a''b''$ etc. liegen, so dass also die letztern in demselben Punkte zusammenstossen. Damit ist obige Behauptung gerechtfertigt.

Sind nun p, p', p'' etc. die Pole von ab, $a'b'$, $a''b''$ etc., in Bezug auf den Kreis, P, P', P'' etc. die Pole von AB, $A'B'$, $A''B''$ etc. in Bezug auf den Kegelschnitt, so liegen p, p', p'' etc. in einer einzigen Geraden, ihre Polaren mögen in einem Punkte zusammentreffen, oder parallel sein (55. 62.), und da P, P', P'' etc. auf den Geraden Sp, Sp', Sp'' etc. liegen, so befinden sie sich sowohl in der durch letztere Gerade bestimmten Ebene als in der Ebene des Kegelschnitts, und müssen alle selbst in einer Geraden liegen.

Also hat man folgendes Theorem:

Die Pole eines Systems paralleler Geraden in Bezug auf einen Kegelschnitt liegen jederzeit in gerader Linie, welche der parallelen Richtung conjugirter Durchmesser genannt wird.

63.

Zieht man durch die Spitze des Kegels S mit der Geraden AB eine parallele Gerade, die der Kreisebene in K begegnet, und bestimmt die Polare des Punktes K in Bezug auf den Kreis, so ist nach 62. die Durchschnittslinie der durch diese Polare und S gelegten Ebene mit dem Kegelschnitt der der Geraden AB conjugirte Durchmesser für den Kegelschnitt.

Sind nun CD, EF etc. beliebig viele andere Gerade in des

Kegelschnitts Ebene, und L, M etc. die Durchschnitte der durch S mit CD, EF parallelen Geraden mit der Kreisebene, bestimmt man ferner die Polaren der Punkte L, M in Bezug auf den Kreis, so werden die Durchschnittslinien aller durch diese Polaren und S gelegten Ebenen mit dem Kegelschnitt die conjugirten Durchmesser der Geraden CD, EF sein.

Die Punkte K, L, M, welche in der durch S mit dem Kegelschnitt parallelen Ebene und der Ebene des Kreises zu gleicher Zeit liegen, müssen sich in beider Ebenen Durchschnittslinie, also in einer Geraden befinden, und ihre Polaren ab, cd, ef folglich in einem Punkte p schneiden oder parallel sein. Daher werden im ersten Falle auch die durch Sab, Scd, Sef gelegten Ebenen den Kegelschnitt in Geraden treffen, welche in einem einzigen Punkte P zusammenkommen, der nämlich der Durchschnitt der Geraden Sp mit dem Kegelschnitt ist. Im zweiten Falle müssen, wie in 62. gezeigt ist, benannte Geraden entweder sich in einem Punkt schneiden, oder parallel sein.

Also hat man folgendes Theorem:

Alle conjugirten Durchmesser, welche beliebig vielen Geraden in Bezug auf einen Kegelschnitt zugehören, schneiden sich in einem und demselben Punkte (Mittelpunkt des Systems) oder sie sind einander parallel.

64.

Theorem. Die Polare eines Punktes in Bezug auf einen Kreis ist die Potenzlinie zweier Kreise, von denen der eine der gegebene, der andere um die Entfernung des in Rede stehenden Punktes vom Mittelpunkt des Kreises als Diameter beschrieben ist.

Beweis. Der gegebene Punkt P liege zuerst ausserhalb der Kreislinie C. Schneidet die um CP als Diameter beschriebene Kreislinie die gegebene in B und B', so ist die Sehne BB' beider Kreise Potenzlinie, und zugleich die Polare von P für den Kreis C, da PB und PB', als auf CB und CB' senkrecht, Tangenten des gegebenen Kreises sind.

Liegt der Punkt in der Kreislinie C, so berühren beide Kreise einander in P und ihre gemeinschaftliche Tangente ist nicht nur beider Potenzlinie, sondern auch des Punktes P Polare.

Befindet sich der Punkt P endlich innerhalb der Kreislinie C, so sei PB senkrecht auf CP, in B die Tangente BK an den Kreis gezogen, welche CP in K schneidet, und durch K eine Parallele mit BP gezogen, welche also die Polare von P sein wird. Nun ist, wenn C' der Mittelpunkt des zweiten Kreises, $CK^2 - C'K^2 = CC'(CK + C'K) = CC'(2CK - CC') = CP \times CK - CC'^2 = CB^2 - CC'^2$. Da also die Quadratdifferenz der Entfernungen des Punktes K von den Mittelpunkten C, C' dem Quadratunterschied der Radien gleich, so muss die durch K auf CP senkrechte Gerade beider Kreise Potenzlinie sein, w. z. B. w.

65.

Die Proposition in 61. ist sehr geeignet, um zu jedem Satz,

ıe metrische Bestimmung enthält, einen correlativen aufzu-
indem, wenn von Geraden bekannt ist, dass sie in einem
zusammentreffen, stets Punkte nachgewiesen werden kön-
lche in einer geraden Linie liegen. Dieses Princip ist zuerst
rgonne (Annales de Mathématiques Tom. XVI. p. 210.)
t und Dualität oder Dualismus genannt worden. J.
r (Geometr. Gestalten) hat es überall auf geistreiche Weise
führt, und gezeigt, dass es mit den Grundgebilden zugleich
itt. Wir wollen das Princip auf einige der erwiesenen
nwenden.

66.

39. ist erwiesen, dass die Punkte D, E, F (Taf. II. Fig. 7.)
ler Linie liegen.
ist A der Pol von MD, L der Pol von CB, also der
hnitt der Geraden MD, CB oder D der Pol von AL;
ist E der Pol von BM, F der Pol von CK. Die drei Po-
r Punkte D, E, F, nämlich AL, BM, CK, treffen daher
elben Punkte zusammen. Also stehen die folgenden Sätze
ältniss des Dualismus

jedem einem Kegel-
t eingeschriebenen
k liegen die 3 Punkte
chen die Seiten von
angenten in den Ge-
ken getroffen wer-
n einer Geraden.

Bei jedem einem Kegel-
schnitt umschriebenen Drei-
eck treffen die 3 Geraden,
welche die Ecken mit den
Berührungspunkten der Ge-
genseiten verbinden, in ei-
nem einzigen Punkte zu-
sammen.

67.

Taf. II. Fig. 8. liegen die Punkte E, F, G, H in gerader
Nun ist KM die Polare von E, LN die Polare von F,
die Polare von G, AC die Polare von H, weshalb KM, LN,
BD in demselben Punkt zusammentreffen.

Also

i jedem einem Kegel-
itt eingeschriebenen
eck liegen die Durch-
ittspunkte der Gegen-
en mit den Durchschnitts-
kten der Tangenten in
Gegenecken in einer
aden.

Bei jedem einem Kegel-
schnitt umschriebenen Vier-
eck gehen die Geraden, wel-
che die Gegenecken ver-
binden, und die Geraden,
welche die Berührungs-
punkte der gegenüberste-
henden Seiten vereinigen,
durch einen und denselben
Punkt.

Ferner ist (Taf. II. Fig. 8.) erwiesen, dass die Punkte N, L,
einer Geraden sind, weshalb die Polaren dieser Punkte, näm-
AD, BC, KM, in einem Punkte F zusammentreffen.

Also

Bei jedem einem Kegelschnitt eingeschriebenen Viereck liegt der Durchschnittspunkt zweier Gegenseiten mit den Durchschnittspunkten der Tangentenpaare in je zwei anstossenden Ecken, welche nicht auf einer der Gegenseiten zugleich sind, stets in einer Geraden.

Bei jedem einem Kegelschnitt umschriebenen Viereck trifft die Gerade, welche zwei Gegenecken verbindet, mit den beiden Geradenpaaren, welche je zwei anstossende Berührungspunkte, die nicht auf den in einer der in Betracht kommenden Ecken zusammenstossenden Tangenten zugleich liegen, verbindet, jederzeit in einem einzigen Punkte zusammen.

68.

In Taf. III. Fig. 9. sei $a_1a_2a_3a_4a_5a_6$ ein um den Kegelschnitt beschriebenes Sechseck, dessen Seiten durch die Ecken des eingeschriebenen $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ gehen. Oben ist erwiesen, dass die Punkte G_1, G_2, G_3 in gerader Linie liegen. Nun ist a_1a_4 die Polare von G_1, a_2a_5 die Polare von G_2, a_3a_6 die Polare von G_3, also müssen a_1a_4, a_2a_5, a_3a_6 in einem Punkt zusammentreffen. Daher folgende Dualität:

Bei jedem einem Kegelschnitt eingeschriebenen Sechseck liegen die drei Durchschnittspunkte der Seitenpaare, zwischen denen je zwei andere liegen, in einer Geraden (Pascal, Essai sur les coniques).

Bei jedem einem Kegelschnitt umschriebenen Sechseck treffen die 3 Geraden, welche die Eckenpaare, zwischen denen zwei andere liegen, vereinigen (die Hauptdiagonalen), in einem und demselben Punkt zusammen (Brianchon, Journal de l'Ecole Polytechnique Cah. XIII.).

Ferner liegen auch die Punkte K_1, K_2, K_3 in einer Geraden, und folglich schneiden sich A_1A_4, A_2A_5, A_3A_6 in demselben Punkte, in welchem sich auch a_1a_4, a_2a_5, a_3a_6 schneiden. Daher das umfassendere Theorem:

Sind zwei Sechsecke einem Kegelschnitt eingeschrieben und umschrieben, dass des letztern Seiten durch die Spitzen des erstern gehen, so

liegen die 6 Durchschnittspunkte der Hauptsehnen und Haupttangenten beider Sechsecke stets in gerader Linie.

schneiden sich die 6 Hauptdiagonalen in einem und demselben Punkte.

69.

Auf ganz ähnliche Art entspringt folgender Dualismus bei dem Fünfeck am Kegelschnitt.

Bei jedem einem Kegel-hnitt eingeschriebenen ünfeck liegen die Durch-hnittspunkte irgend eier Seitenpaare, und der rchschnittspunkt, wel-en die jedesmalige fünfte ite mit der Tangente in r Gegenecke bildet, stets einer Geraden.

Bei jedem einem Kegelschnitt umschriebenen Fünfeck treffen die Diagonalen, welche irgend zwei Eckenpaare vereinigen, und die Gerade, welche die jedesmalige fünfte Ecke mit dem Berührungspunkte der Gegenseite verbindet, in einem einzigen Punkte zusammen.

VI. Harmonische Punkte und Strahlen.

70.

Auf einer Geraden denke man sich zwei Punkte A, B, und zwischen ihnen einen dritten C angenommen; wir suchen auf der nämlichen Geraden einen Punkt D, der so beschaffen ist, dass das Verhältniss $AC:BC$ dem Verhältnisse $AD:BD$ gleich ist.

Zunächst ist klar, dass, wenn C in der Mitte zwischen A und B liegt, ein solcher Punkt D nicht existirt.

Liegt aber der Punkt C bei B näher als bei A, dass also $AC > BC$, so kann D nicht auf der Verlängerung der Geraden über A hinaus liegen, weil die Proportion $AC:BC = AD:BD$ verlangt, dass zu gleicher Zeit $AC > BC$, $AD > BD$, was nicht sein würde. Auch kann D sich nicht zwischen A und B befinden, denn es würde folgen $AC + BC : AC = AD + BD : AD$, d. i. $AB : AC = AB : AD$, also $AC = AD$.

Dagegen giebt es auf der Verlängerung unserer Geraden über B hinaus in der That einen, aber auch nur einen einzigen Punkt D, welchem die verlangte Eigenschaft zukommt. Denn man suche die vierte Proportionale zu $AC - BC$, AC, AB, und schneide dieselbe, welche grösser als AB sein wird, von A aus auf der Geraden AB ab, so wird man einen Punkt D erhalten, für welchen $AC - (AC - BC) : AC = AD - AB : AD$, d. i. $BC : AC = BD : AD$, oder $AC : BC = AD : BD$ ist. Dass es nur einen solchen Punkt D giebt, ist daraus klar, dass die Proportion $AC : BC = AD : BD$ diese andere $AC - BC : AC = AB : AD$ erfordert, und zu den 3 ersten Gliedern der letztern nur eine einzige vierte Proportionale gefunden werden kann.

Umgekehrt liegt der Punkt D auf der Verlängerung der Geraden AB über B hinaus, so existirt auf dieser Geraden nur ein einziger Punkt C, für welchen $AD : BD = AC : BC$ ist, und zwar befindet sich C stets zwischen A und B, und liegt näher bei B als bei A.

Daraus folgt, dass für keine vier Punkte auf einer Geraden die Verhältnisse der Entfernungen zweier auf einander folgenden Punkte vom dritten und vierten gleich sind, dass dies vielmehr nur für die abwechselnden Punkte gilt.

Wenn vier Punkte auf einer Geraden so auf einander folgen: A, C, B, D, und wenn die Proportion statt findet $AC : BC = AD : BD$ (wo also C näher bei B als bei A liegt), so werden

dieselben **vier harmonische Punkte** genannt, und zwar heissen A und B sowohl, als C und D **zugeordnete harmonische Punkte.**

Dem Mittelpunkte von AB entspricht dann gewissermassen ein in der Geraden unendlich entfernter Punkt.

Harmonische Strahlen oder **Harmonikalen** (**Steiner**) (faisceau harmonique nach Brianchon) nennt man vier durch harmonische Punkte gehende und in einem einzigen Punkte zusammentreffende Gerade.

71.

Aus 70. wird man zu jeden 3 Punkten den vierten harmonischen Punkt finden können, indem man zu 3 Geraden die vierte Proportionale sucht. Es lassen sich aber einfachere Auflösungen dieser Aufgabe geben, wenn man die Harmonikalen in Betracht zieht, und dazu bahnen folgende Betrachtungen den Weg.

In Taf. III. Fig. 14. gehen vom Punkte O aus nach beliebigen 4 Punkten einer Geraden A, C, B, D vier Strahlen, und durch A sei eine Gerade mit dem Strahl OD parallel gezogen, welche von den andern drei Strahlen in A, c, b geschnitten wird.

Dann behaupte ich, dass das Doppelverhältniss

$$\frac{AC}{BC}:\frac{AD}{BD}$$

dem einfachen Verhältniss $Ac:bc$ gleich sei.

Denn wegen der Parallelität der Geraden Ab und OD ist $\frac{AD}{BD}=\frac{Ob}{OB}$; aber wenn man bm parallel mit Oc zieht, $\frac{Ob}{OB}=\frac{Cm}{CB}$, also ist $\frac{AD}{BD}=\frac{Cm}{CB}$, und folglich $\frac{AD}{BD}:\frac{AC}{BC}=\frac{Cm}{CB}:\frac{AC}{BC}=\frac{Cm}{AC}$. Da endlich $\frac{Cm}{AC}=\frac{cb}{Ac}$, so wird sein $\frac{AD}{BD}:\frac{AC}{BC}=\frac{cb}{Ac}$, oder umgekehrt $\frac{AC}{BC}:\frac{AD}{BD}=\frac{Ac}{bc}$.

Daraus fliesst, dass das Doppelverhältniss $\frac{AC}{BC}:\frac{AD}{BD}$ von der Lage der Geraden $ACBD$, wenn sie nur immer durch A geht, ganz unabhängig ist, dass also z. B. $\frac{AC}{BC}:\frac{AD}{BD}=\frac{AC'}{B'C'}:\frac{AD'}{B'D'}$ ist. Dieses Resultat gilt aber in der That auch noch für jede beliebige nicht durch A gehende Gerade. Denn wenn eine solche die vier Strahlen in A'', B'', C'', D'' schneidet, so überzeugt man sich leicht, dass, wenn AD' parallel mit $A''D''$ gezogen wird, stets die Relation statt hat $\frac{A''C''}{B''C''}:\frac{A''D''}{B''D''}=\frac{AC'}{B'C'}:\frac{AD'}{B'D'}$, weshalb auch $\frac{AC}{BC}:\frac{AD}{BD}=\frac{A''C''}{B''C''}:\frac{A''D''}{B''D''}$ sein wird.

Also folgendes Theorem:

Wenn vier von einem Punkte O ausgehende Strahlen von zwei Geraden resp. in A, A'; B, B'; C, C' geschnitten werden, so sind die Doppelverhältnisse $\frac{AC}{BC}:\frac{AD}{BD}$, $\frac{A'C'}{B'C'}:\frac{A'D'}{B'D'}$ stets einander gleich.

Daraus ist ersichtlich, wie man zu verfahren hat, um, wenn er in gerader Linie liegende Punkte A, C, B, D, und drei in ner andern Geraden liegende Punkte A', C', B' gegeben sind, f der letztern Geraden den Punkt D' so zu bestimmen, dass jene ppelverhältnisse gleich sind.

72.

Zusatz. Vier Strahlen, die eine Gerade in harmonischen Punkten treffen, theilen jede andere Gerade harmonisch (Brianchon), und ist diese Gerade mit einem äussersten Strahl parallel, so wird sie von den 3 andern harmonischen Strahlen in 3 Punkten getroffen, deren äussere von dem mittlern gleiche Entfernung haben.

Nun seien in Taf. III. Fig. 14. die Punkte A, C, B, D harmonisch, und Ab parallel mit OD, so wird $Ac = bc$ sein.

Um also zu 3 Punkten A, C, B den dem C zugeordneten harmonischen Punkt zu finden, ziehe man durch einen beliebigen Punkt O die Strahlen OA, OB, OC, halbire AO in n, ziehe nc parallel mit OB bis sie OC in c schneidet, verbinde A mit c, und ziehe durch O mit Ac eine Parallele, welche die Gerade ABC in D trifft, so ist D der harmonische Punkt.

73.

Bestimmen wir jetzt den geometrischen Ort der Spitzen aller ber und unter einer Geraden AB beschriebenen Triangel, deren beide andere Seiten ein constantes Verhältniss zu einander haben.

Wir nehmen das Verhältniss von der Einheit verschieden, weil in diesem Falle der Ort eine im Mittelpunkte von AB auf der letztern senkrechte Gerade ist, wie sogleich erhellet.

Ist C ein Punkt in der Geraden AB, und das Verhältniss $AC:BC$ dem Verhältnisse $OA:OB$ gleich, wo O die Spitze eines der in Betracht kommenden Dreiecke ist, so muss (Euclid Lib. VI. Prop. 3.) die Gerade OC den Winkel AOB halbiren, und ebenso muss, wenn D in der Verlängerung von AB über B hinaus so liegt, dass $AD:BD = OA:OB = AC:BC$, die Gerade DO den Nebenwinkel von AOB (der durch die Verlängerung von AO entsteht) halbiren. Die Geraden OC und OD werden dann auf einander senkrecht stehen, und dies findet für jeden Punkt O statt, für welchen $OA:OB$ jedem der Verhältnisse $AC:BC$, $AD:BD$ gleich ist.

Bewegt sich daher O so fort, dass das Verhältniss $OA:OB$ constant bleibt, so rückt er in der Spitze des über CD beschriebenen rechtwinkligen Triangels fort, die bekanntlich in der um CD als Diameter beschriebenen Kreislinie liegt, welche somit der gesuchte Ort sein wird. Zugleich hat sich ergeben, dass A, B, C, D harmonische Punkte sind.

Wenn also vom Punkte O nach 3 Punkten A, C, B Strahlen so gehen, dass der mittlere den von den beiden andern gebildeten Winkel halbirt, so geht der auf eben diesem senkrechte Strahl jederzeit durch den vierten

harmonischen Punkt zu den Punkten A, C, B, welcher dem C zugeordnet ist.

Also auch wenn man zu den Endpunkten C, D eines Diameters und zu einem dritten Punkte B in demselben den dem letzteren zugeordneten vierten harmonischen Punkt A sucht, so werden die von einem beliebigen Punkte O der Kreisperipherie nach B, A gezogenen Geraden dasselbe Verhältniss bewahren, wie man den Punkt O annehmen mag, und die Strahlen OC, OD werden den Winkel AOB, und des letztern Nebenwinkel halbiren.

74.

Es seien wieder C, D Endpunkte eines Kreisdiameters, und B ein beliebiger (vom Mittelpunkte verschiedener) Punkt auf demselben, der innerhalb des Kreises liegt. Ist nun BO senkrecht auf CD, und in O eine Tangente des Kreises gezogen, die den Diameter in A trifft, so wird A zu C. D, B der vierte harmonische Punkt sein. Denn der Winkel AOC ist $= ODC$ (Euclid Lib. III. prop. 32.) und $ODC = COB$, also $AOC = COB$, so dass AOB von CO halbirt wird.

Um also zu den Endpunkten eines Kreisdiameters, und zu einem dritten Punkte auf demselben den vierten harmonischen Punkt zu finden, verfahre man so:

Liegt der dritte Punkt B innerhalb des Kreises, so errichte man BO senkrecht auf den Diameter CD, dass sie die Peripherie in O trifft, und ziehe von O die Tangente, welche CD in A trifft, so ist A der gesuchte dem B zugeordnete harmonische Punkt.

Liegt der Punkt A ausserhalb der Kreislinie, so ziehe von A an den Kreis eine Tangente, welche ihn in O berührt, und fälle OB senkrecht auf CD, dass sie der letztern in B begegnet, so ist B der vierte dem A zugeordnete harmonische Punkt.

75.

Lehrsatz. Zwei Kreise seien concentrisch, ihr gemeinsamer Mittelpunkt M. Man ziehe einen beliebigen Diameter, welcher den einen Kreis (etwa den grösseren) in A, B, den andern in D schneidet, und suche zu A, B, D den vierten harmonischen Punkt E. Bewegt sich nun der Durchmesser um den Mittelpunkt M, so behaupte ich, dass der zu seinen Endpunkten in dem grössern Kreise und zu dem einen Endpunkte im kleinern Kreise vierte harmonische Punkt in einer mit den gegebenen concentrischen Kreislinie fortrückt.

Beweis. Man ziehe DO senkrecht auf AM bis es die concentrische Kreislinie in O trifft, und OE senkrecht auf OM bis es AM in E trifft, so ist E der vierte harmonische Punkt zu A, B, D (74.). Aber es ist jetzt $DO^2 = DE \times DM$, und da DO, DM constant bleiben, so ist auch DE, folglich auch ME constant, w. z. b. w.

76.

Lehrsatz. Zieht man durch den Berührungspunkt

r sich tangirender Kreise beliebig viele Gerade, e dieselben jede in einem Punkte schneiden werund bestimmt zu jedem Paar des Durchschnittse und dem Berührungspunkte den vierten harmoen Punkt, so liegen alle diese vierten Punkte in Kreislinie, welche beide gegebene in ihrem geamen Berührungspunkt tangirt.

eweis. In Taf. III. Fig. 15. sei DBE die Centrale zweier sich berührender Kreise, A zu D, E, B der vierte dem B zuete harmonische Punkt; $D'BE'$ eine andere Gerade, A' zu , B der vierte harmonische Punkt. Zieht man DD', EE', o ist $DB:EB = DA:EA$, $D'B:E'B = D'A':E'A'$; aber da nd EE' parallel (jede auf $D'E'$ senkrecht), so ist $DB:EB$ $B:E'B$, also auch $DA:EA = D'A':E'A'$, folglich muss arallel mit EE' oder mit DD' sein. Da hiernach der Win-$A'A$ ein rechter, so liegen offenbar alle vierten harmonischen e in der um BA als Diameter beschriebenen Kreislinie.

77.

ehrsatz. Bei irgend vier harmonischen Punkten as Rechteck unter den Abständen zweier zugeordr Punkte von demjenigen Punkte, welcher in der e zwischen den zwei andern liegt, dem Quadrat des en Abstandes der letztern von einander gleich.

eweis. In Taf. III. Fig. 16. seien C, D, B, A harmonische e, um CD als Diameter ein Kreis beschrieben, auf dessen erie ein Punkt P so angenommen, dass APB ein rechter el ist (diesen Punkt zu bestimmen hat man nur den Durcht des um AB als Diameter beschriebenen Kreises mit dem enen zu suchen), ferner M der Mittelpunkt von AB. Zieht an MP, so muss diese Tangente des Kreises sein. Denn we-$MA = MB = MP$ ist $\angle MPB = MBP$, und da CP den el APB hälftet, so ist $CPB = 45°$, also auch $BPD = 45°$, $CPB = DPB$, daher $\angle MPC = MPB - CPB = MBP$ $B = MDP$, also PM eine Tangente des Kreises. Nun ist ntlich $MC \times MD = MP^2$, also $MC \times MD = MA^2$, w. z. b. w.

78.

sei $ABCDEF$ auf Taf. III. Fig. 17. ein vollständiges Vieressen Diagonalen bis zu ihrem gegenseitigen Durchschnitt in , I verlängert sind. Hierüber lassen sich folgende Betrachanstellen.

den drei in E zusammenkommenden Strahlen ED, EB, EI man sich den vierten dem EI zugeordneten harmonischen , und ebenso denke man sich zu den drei in C zusammenenden Strahlen CD, CB, CI den vierten dem CI zugeordharmonischen Strahl, so werden beide vierte harmonische en in einem Punkte der Geraden IBD zusammentreffen, weler zu D, B, I dem I zugeordnete harmonische Punkt ist (72.). anz ebenso werden die beiden in Rede stehenden Strahlen in Punkte auf der Geraden AIH zusammentreffen, welcher der A, H dem H zugeordnete harmonische Punkt ist.

Der Durchschnittspunkt der beiden Strahlen wird also auf den Geraden AH, BI zu gleicher Zeit liegen, fällt also mit G zusammen, und folglich ist G sowohl der vierte harmonische Punkt zu D, B, I als auch zu H, A, F. Geht man von den Ecken D und B aus, so ergiebt sich, dass auch E, C, I, H harmonische Punkte sind.

Daraus fliesst, dass die Strahlen FA, FI zu FB, FD, ferner IA, IF zu IB, IC zugeordnete harmonische Strahlen sind. Die Figur $BDECF$ wird aber vollständiges Viereck genannt (Steiner Geom. Gest. S. 72.), und wir haben somit den Doppelsatz:

In jedem vollständigen Vierseit sind die Punkte, in welchen die drei Diagonalen einander schneiden, zu den zugehörigen Ecken zugeordnete harmonische Punkte. (Pappus Collect. Math. Lib. VII., De Lahire Sect. Conicae p. 9. prop. 20., Schooten Exercitat. Mathem. 1. 2. prop. 5.)

In jedem vollständigen Viereck sind die Strahlen, welche die Durchschnitte der gegenüberliegenden Seitenpaare vereinigen, zu den letztern zugeordnete harmonische Strahlen. (Steiner System. Entw. d. Abhäng. geom. Gestalten von einander S. 75.)

Diese Sätze geben ein Mittel an die Hand, einerseits zu drei gegebenen Punkten den vierten harmonischen Punkt, und andrerseits zu drei gegebenen Strahlen den vierten harmonischen Strahl zu finden, und zwar bloss mit Hülfe des Lineals.

79.

Verlängert man in Taf. III. Fig. 17. die Gerade IF, bis sie AC in K trifft, so werden (72.) A, B, K, C harmonische Punkte sein.

Daher das Theorem:

Zieht man von drei in einer Geraden liegenden Punkten A, B, C drei ganz beliebige Gerade ADE, BD, CE, von denen die erste von den beiden andern in D und E geschnitten wird, die letztern sich in I schneiden, so wird die durch I und den Durchschnittspunkt der Geraden BE, CD gehende gerade Linie die gegebene Gerade immer in dem nämlichen Punkte K treffen, der zu A, B, C der vierte harmonische Punkt ist.

80.

Von einem Punkte O gehen nach den Schenkeln des Winkels A (Taf. III. Fig. 18.) beliebig viele Gerade, welche die Schenkel resp. in B, C; B', C'; B'', C'' etc. treffen, und mehrere Vierecke erzeugen, deren Diagonalen gezogen sind. Die Durchschnittspunkte der Diagonalen D, D', D'' .... werden nun in einer einzigen durch A gehenden Geraden liegen.

Denn nach 78. trifft die Gerade AD sowohl als die Gerade AD' die Transversale OC' in einem Punkte E', der zu B', C', O der vierte harmonische Punkt ist, mithin müssen AD und AD' und ebenso alle übrigen zusammenfallen.

81.

In jedem Paralleltrapez treffen die nicht parallelen Seiten mit der die Mittelpunkte der parallelen verbindenden Geraden in einem einzigen Punkte zusammen.

Nämlich es seien AB, CD die parallelen, E der Mittelpunkt der erstern, AC, BD die nicht parallelen Seiten, O ihr Durchschnitt. Verbindet man O mit E und zieht OM parallel AB, so sind OA, OB, OE, OM (72.) harmonische Strahlen, und da CD mit dem äussersten Strahl ebenfalls parallel ist, so muss der mittlere der drei andern, nämlich OE, ebenfalls durch den Mittelpunkt von CD gehen.

82.

In Taf. III. Fig. 18. denke man sich B, B', C, C' auf der Peripherie eines Kegelschnitts liegend, so erhellet aus (60.), dass die Gerade AD die Polare des Punktes O in Bezug auf den Kegelschnitt ist, und diese Polare wird von den in O zusammenstossenden Sehnen in E und E' so getroffen, dass E und E' die vierten harmonischen Punkte zu den Endpunkten der Sehnen und zu ihrem Durchschnitt O sind. Dies ist auf eben die Art für alle Sehnen zu erweisen, und wir haben somit das sehr merkwürdige Theorem:

Dreht sich eine Gerade, die einen Kegelschnitt schneidet, um irgend einen in ihr liegenden festen Punkt, so ist der Ort desjenigen Punktes, welcher zu den zwei Durchschnittspunkten und dem festen Punkte der vierte, dem letztern zugeordnete harmonische Punkt ist, eine bestimmte Gerade, nämlich die Polarlinie des festen Punktes, in welcher sich also auch der Durchschnitt derjenigen zwei Tangenten dreht, durch deren Berührungspunkte die bewegliche schneidende Gerade geht.

Bewegt sich ein Punkt in einer festen Geraden in der Ebene eines Kegelschnitts, so dreht sich diejenige Gerade, welche zu den zwei durch den Punkt gehenden Tangenten und der festen Geraden der vierte letzterer zugeordnete harmonische Strahl ist, um einen bestimmten Punkt, nämlich den Pol der festen Geraden, um welchen sich also auch diejenige Gerade dreht, welche durch die Berührungspunkte der jedesmaligen zwei Tangenten geht.

Das, was die französischen Geometer schlechthin Polaire und Pol nennen, wird daher von Deutschen auch **Harmonische** und **Harmonischer Pol** genannt.

IX.

Neues Theorem über eine gewisse Klasse periodischer Functionen.

Von

Herrn Doctor O. Schlömilch

zu Weimar.

Wenn eine Function die trigonometrischen Grössen sin, cos etc. allein enthält, so lässt sich dieselbe in vielen Fällen in eine Reihe verwandeln, welche nach den Cosinus der Vielfachen eines Bogens fortgeht, so dass man erhält:

$$f(\sin x, \cos x) = A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + A_3 \cos 3x + \dots \quad (1)$$

wobei die Reihe endlich oder unendlich sein kann. Vorausgesetzt, dass diese Reihenentwickelung für alle Werthe der Veränderlichen von $x = 0$ bis $x = \infty$ gültig bleibt, so ist

$$\int_0^\infty [f(\alpha x) - f(\beta x)] \frac{dx}{x} = \tfrac{1}{2} l \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 [f(0) - A_0]; \quad (2)$$

wobei $f(\alpha x)$, $f(\beta x)$ zur Abkürzung für $f(\sin \alpha x, \cos \alpha x)$ und $f(\sin \beta x, \cos \beta x)$ gesetzt worden sind.

Dieses elegante Theorem lässt sich auf folgende Art beweisen.

Da die Gleichung (1) für alle Werthe von $x = 0$ bis $x = \infty$ richtig bleibt, so kann man in derselben auch μx für x setzen, sie mit $\overset{-ux}{e}\, dx$ multipliciren und zwischen den Gränzen $x = 0$, $x = \infty$ integriren, wodurch man erhält

$$\int_0^\infty \overset{-ux}{e} f(\mu x) dx$$

$$= A_0 \int_0^\infty \overset{-ux}{e} dx + A_1 \int_0^\infty \overset{-ux}{e} \cos \mu x dx + A_2 \int_0^\infty \overset{-ux}{e} \cos 2\mu x dx + \dots$$

Auf der rechten Seite kann man die Werthe aller Integrale angeben, wenn man sich erinnert, dass überhaupt für jedes positive k und h

$$\int_0^\infty \overset{-kx}{e} \cos hx\, dx = \frac{k}{h^2 + k^2}$$

ist. Es ergiebt sich so:

$$\int_0^\infty e^{-ux} f(\mu x)dx$$

$$= A_0 \frac{1}{u} + A_1 \frac{u}{1^2\mu^2 + u^2} + A_2 \frac{u}{2^2\mu^2 + u^2} + \ldots.$$

venn man $\mu = \alpha$, $\mu = \beta$ setzt und beide Werthe subtrahirt,

$$\int_0^\infty e^{-ux} [f(\alpha x) - f(\beta x)]dx$$

$$\left[\frac{u}{1^2\alpha^2 + u^2} - \frac{u}{1^2\beta^2 + u^2}\right] + A_2\left[\frac{u}{2^2\alpha^2 + u^2} - \frac{u}{2^2\beta^2 + u^2}\right] + \ldots$$

Gleichung soll mit du multiplicirt und zwischen den Gränzen 0 und $u = \infty$ integrirt werden. Auf der linken Seite steht das Doppelintegral

$$\int_0^\infty du \int_0^\infty e^{-ux} [f(\alpha x) - f(\beta x)]dx$$

uf der rechten erscheint eine Reihe von Integralen, welche lich unter der Form

$$\int_0^\infty \left[\frac{u}{n^2\alpha^2 + u^2} - \frac{u}{n^2\beta^2 + u^2}\right]du,$$

ganz und positiv ist, enthalten sind. Nun giebt die unbe-te Integration

$$\left[\frac{u}{n^2\alpha^2 + u^2} - \frac{u}{n^2\beta^2 + u^2}\right]du = \tfrac{1}{2}l(n^2\alpha^2 + u^2) - \tfrac{1}{2}l(n^2\beta^2 + u^2)$$

$$= \tfrac{1}{2}l \frac{\frac{n^2\alpha^2}{u^2} + 1}{\frac{n^2\beta^2}{u^2} + 1},$$

durch Einführung der Gränzwerthe $u = \infty$, $u = 0$ findet man

$$\int_0^\infty \left[\frac{u}{n^2\alpha^2 + u^2} - \frac{u}{n^2\beta^2 + u^2}\right]du = -\tfrac{1}{2}l\frac{n^2\alpha^2}{n^2\beta^2} = +\tfrac{1}{2}l\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2,$$

den Werth des Integrales unabhängig von n. So wird nun:

$$\int_0^\infty du \int_0^\infty e^{-ux} [f(\alpha x) - f(\beta x)]dx$$

$$= \tfrac{1}{2}l\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 [A_1 + A_2 + A_3 + \ldots]$$

$$= \tfrac{1}{2}l\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 [f(0) - A_0),$$

man sogleich erkennt, wenn man in der Gleichung (1) $x = 0$ t.

Das obige Doppelintegral nach x und u gestattet aber noch Umformung, nämlich dadurch, dass man die Ordnung der In-

tegrationen umkehrt und zuerst nach u integrirt; dasselbe wird dann

$$=\int_0^\infty [f(\alpha x)-f(\beta x)]dx\int_0^\infty \overset{-xu}{e}\,du=\int_0^\infty [f(\alpha x)-f(\beta x)]dx\,.\frac{1}{x}.$$

Wir haben daher

$$\int_0^\infty [f(\alpha x)-f(\beta x)]\frac{dx}{x}=\tfrac{1}{2}l\Big(\frac{\beta}{\alpha}\Big)^2[f(0)-A_0] \qquad (3)$$

und diess war das zu beweisende Theorem in (2.).

Einige Anwendungen desselben sind folgende.

Für jedes beliebige x und ein r, dessen absoluter Werth die Einheit nicht übersteigt, gilt die Gleichung:

$$\tfrac{1}{2}l(1+2r\cos x+r^2)=\frac{r}{1}\cos x-\frac{r^2}{2}\cos 2x+\frac{r^3}{3}\cos 3x-\ldots \text{ etc.}$$

Wir haben daher für $f(x)=\frac{1}{2}l(1+2r\cos x+r^2)$, $f(0)=l(1+r)$ und $A_0=0$, mithin

$$\int_0^\infty l\frac{1+2r\cos\alpha x+r^2}{1+2r\cos\beta x+r^2}\cdot\frac{dx}{x}=l(1+r)l\Big(\frac{\beta}{\alpha}\Big)^2,\ +1\geqq r\geqq -1. \quad (4)$$

Da $r<1$, so können wir $r=\frac{1}{\varrho}$ setzen, wo $\varrho>1$ ist, und haben so

$$\int_0^\infty l\frac{1+2\varrho\cos\alpha x+\varrho^2}{1+2\varrho\cos\beta x+\varrho^2}\cdot\frac{dx}{x}=l\Big(1+\frac{1}{\varrho}\Big)l\Big(\frac{\beta}{\alpha}\Big)^2,\ \varrho\geqq 1. \quad (5)$$

Ferner sind die Reihen bekannt:

$$2^{2n-1}\cos^{2n}x=(2n)_0\cos 2nx+(2n)_1\cos(2n-2)x+\ldots+\tfrac{1}{2}(2n)_n$$

$$2^{2n}\cos^{2n+1}x=(2n+1)_0\cos(2n+1)x+(2n+1)_1\cos(2n-1)x+\ldots$$
$$+\tfrac{1}{2}(2n+1)_n\cos x.$$

Wir haben daher für die erste $A_0=\frac{1}{2}(2n)_n$, für die zweite $A_0=0$ und nach (3) die beiden Integrale

$$2^{2n-1}\int_0^\infty [\cos^{2n}\alpha x-\cos^{2n}\beta x]\frac{dx}{x}=\tfrac{1}{2}l\Big(\frac{\beta}{\alpha}\Big)^2[2^{2n-1}-\tfrac{1}{2}(2n)_n],$$

$$2^{2n}\int_0^\infty [\cos^{2n+1}\alpha x-\cos^{2n+1}\beta x]\frac{dx}{x}=\tfrac{1}{2}l\Big(\frac{\beta}{\alpha}\Big)^2 2^{2n}$$

oder:

$$\int_0^\infty [\cos^{2n}\alpha x-\cos^{2n}\beta x]\frac{dx}{x}$$
$$=\tfrac{1}{2}l\Big(\frac{\beta}{\alpha}\Big)^2\Big[1-\frac{(n+1)(n+2)\ldots(2n)}{4.8.12\ldots(4n)}\Big] \quad (6)$$

$$\int_0^\infty [\cos^{2n+1}\alpha x - \cos^{2n+1}\beta x]\frac{dx}{x} = \tfrac{1}{2}l\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \quad (7)^*)$$

dass also der Werth des zweiten Integrales von n unabhängig ist.

Man könnte ein ähnliches allgemeines Theorem wie das in (3) für solche Functionen aufzustellen versuchen, welche sich nach den Sinus eines vielfachen Bogens entwickeln lassen, so dass z. B.

$$f(\sin x, \cos x) = B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + B_3 \sin 3x + \ldots.$$

die Annahme wäre. Man gelangt aber zu keinem eleganten Resultat, da sich aus der vorstehenden Reihe die Summe der Coefficienten allein

$$B_1 + B_2 + B_3 + \ldots.$$

nicht finden lässt, wie diess bei der Reihe (1) der Fall ist, wenn man $x = 0$ setzt.

X.

Einige Bemerkungen über die Reihen, mit besonderer Hinweisung auf die Exponential- und Binomialreihe.

Von dem

Herrn Doctor Barfuss

zu Weimar.

---

§. 1.

Die Mängel, welche den Demonstrationen der älteren Mathematiker hier und da noch eigen sind, mussten natürlich bei den Nach-

---

*) Die Integrale (4), (5) und das obige (7) für den Fall $n=0$ ergeben sich aus den interessanten Betrachtungen des Hrn. Prof. Raabe: „Ueber die Summation harmonisch periodischer Reihen etc." in Crelle's Journal Band 23. Die Bemerkung, dass jene 3 Integrale den gemeinschaftlichen Factor $\frac{1}{2}l\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2$ haben, veranlasste die Aufsuchung des allgemeinen Theoremes (3).

folgern mannigfaltige Bestrebungen anregen, die Theorie vor jedem denkbaren Einwurfe sicher zu stellen. Bei den Reihenentwickelungen waren es vorzüglich die Bedingungen der Convergenz, die man einer weit gründlicheren Betrachtung unterwarf, als vorher geschehen war, und man scheute in dieser Beziehung keinen Aufwand an Rechnungen, um der Theorie den vermissten Besitz nicht länger vorzuenthalten, besonders da man auf die Meinung verfallen war, dass nur convergirende Reihen auf analytische Geltung Anspruch haben, während divergirende von allem analytischen Gebrauche auszuschliessen seien. Kamen durch den Gebrauch der letzteren fehlerhafte Resultate zum Vorschein, so wurde der Grund lediglich auf die Divergenz. d. h. auf den vernachlässigten Rest geschoben, und in der That fehlte es auch nicht an Beispielen, wo durch Beibehaltung des Restes richtige Resultate erhalten wurden.

Bei allen diesen Bestrebungen aber scheint es mir, als ob man eine bei den Reihen wesentliche Unterscheidung viel zu sehr vernachlässigt habe, woraus allerdings viele Fehler erklärlich werden können, die man auf die Divergenz schieben will. Es ist nämlich wohl zu unterscheiden, ob eine Reihe bloss eine Summe unendlich vieler Glieder, oder ob sie die Entwickelung einer Function sei. Convergirt die Reihe, so kann sie freilich allemal als Entwickelung einer Function ihrer allgemeinen Grösse angesehen werden, aber dieses ist nicht immer der Fall, wenn die Reihe divergirt. Dieses will ich jetzt an einem Beispiele erläutern.

Man läugnet die Richtigkeit des Ausdrucks:

$$\text{I.}\quad -\tfrac{1}{2} = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots\ldots$$

weil diese Reihe divergirt und unterstützt die Behauptung unter anderen mit folgendem Grunde. Man findet die Summe der endlichen Reihe:

$$\text{II.}\quad \cos x + \cos 2x + \ldots\ldots + \cos nx = -\tfrac{1}{2} + \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{1}{2}x},$$

woraus aber, wenn $n = \infty$ genommen wird, der Ausdruck I. gar nicht folgt. Aber dieser Schluss, welcher vollkommen richtig sein würde, wenn die Reihe eine convergente wäre, lässt sich auf divergirende Reihen gar nicht anwenden. Denn die Reihe I. hat kein letztes Glied, welches durch $\cos \infty x$ ausgedrückt werden könnte, sondern sie involvirt über dasselbe hinaus als ihren Rest noch die Reihe

$$\cos(n+1)x + \cos(n+2)x + \ldots\ldots$$

in welcher $n = \infty$ ist. Dieselbe ist abermals eine Entwickelung, und zwar von

$$-\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{1}{2}x},$$

wie man sich ganz auf dieselbe Art, nach welcher die Formel I. gefunden wird, leicht überzeugen kann. Daher gestaltet sich für jeden Werth von n die Reihe I. so:

$$\cos x + \cos 2x \ldots . + \cos nx - \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{1}{2}x} = -\tfrac{1}{2},$$

elches eben der Ausdruck in II. ist.

Man wird hiernach einsehen, was es heissen soll, dass man nen Unterschied zwischen blosser Summe und Entwickelung zu chen habe. Beide fallen bei convergirenden Reihen zusammen. at man irgend eine entwickelte Reihe:

$$f(x) = X_{(1)} + X_{(2)} + X_{(3)} + \ldots .$$

d man will hieraus die Summe einer endlichen Anzahl ihrer eren Glieder finden, nämlich

$$S = X_{(1)} + X_{(2)} + \ldots . + X_{(n)},$$

kommt es darauf an, diejenige Function $\varphi(x)$ zu bestimmen, aus lcher der Rest

$$X_{(n+1)} + X_{(n+2)} + \ldots .$$

twickelt werden kann, da dann

$$S = f(x) - \varphi(x)$$

t. Dieses gilt für convergirende Reihen eben so gut, als für diergirende, allein wenn bei den ersteren $n = \infty$ ist, so verschwinet der Rest $\varphi(x)$ und man erhält $S = f(x)$. Bei den divergirenen Reihen aber verschwindet $\varphi(x)$ gegen S auch dann nicht, wenn $= \infty$ ist, daher man auch nicht erwarten darf, dass $S = f(x)$ erde.

§. 2.

Indem sich nun die Ansichten so gestalteten, wie sie heut zu Tage vorliegen, wollten die älteren Methoden durchaus den Anforderungen nicht genügen, die man an die mathematische Darstelung machte. Besonders war es die Methode der unbestimmten Coefficienten, welche von allen Seiten her chicanirt wurde, und eut zu Tage kommt man gleich in den Rang eines mathematischen ettlers, wenn man nur einiges Vertrauen auf diese Methode laut erden lässt. Ohne in das Wesen derselben einzudringen und die r ganz fremdartigen Schwächen zu beseitigen, an welchen viele ltere Darstellungen leiden, hat man sie als ein meist trügliches Werkzeug bei Seite gelegt und anderen Entwickelungsmethoden en Vorzug gegeben. Ob nun diese ohne Schwächen sind, davon st nicht die Rede. Die Grenzmethode erscheint freilich als eine ollkommen strenge, aber was berechtigt uns denn, sie in die Arithetik da einzuführen, wo es der Entwickelung einer Form aus der nderen gilt? Eine Grösse, welche über jede Grenze wachsen soll, st eine unendliche, man mag nun hierbei den Ausdruck gestalten, wie man will. Mag man auch in jeder Zeile wiederholen: „je rösser n wird, desto mehr nähert sich $f(x,n)$ dem $\varphi(x)$; die Abitung der Form $\varphi(x)$ aus der Urform geschieht doch mit Hülfe iner fremden Grösse n, welche eben deshalb aus dem Resultate erschwindet, weil sie unendlich wird.

Auf diese Art der Betrachtung sind wir überall hingewiesen, wo in der Geometrie oder in der mathematischen Physik das Ungleichförmige mit dem Gleichförmigen zu vergleichen ist. Wir können z. B. den Bogen mit der Abscisse nur in den unendlich kleinen Theilen unmittelbar vergleichen, gelangen aber dadurch stufenweise zur endlichen Vergleichung mit Hülfe der Summation solcher Reihen, die keine Entwickelungen sind.

Aber in der Arithmetik bilden wir auf synthetischem Wege Form aus Form ohne Zuziehung des Unendlichen. Wir gebrauchen also dieses Mittel nicht, um z. B. für den Ausdruck $\sqrt[m]{a^n}$ die Form $a^{\frac{n}{m}}$ zu rechtfertigen, worin soll nun die Nothwendigkeit begründet sein, dass die Entwickelung von a^x einzig und allein durch die Grenzmethode eine sichere Basis erhalte? Ich wenigstens kann an keinen Umbau der Analysis auf dieser Grundlage glauben.

Doch wir wollen über die Zulässigkeit der Methoden nicht weiter streiten, meine Absicht ist demnächst die Rechte der Methode der unbestimmten Coefficienten zu vertheidigen und ihre wahre Bedeutung zu erklären. Dieses will ich vorzugsweise an der Exponentialreihe thun und dabei zugleich, um allen Vorwürfen zu entgehen, strenge Rücksicht auf die Bedingungen der Convergenz nehmen.

§. 3.

Die Methode der unbestimmten Coefficienten ist gleichsam eine indirecte Entwickelung und kommt allenthalben da in Anwendung, wo die directe Entwickelung zu schwierig werden würde. Die Ableitung der Binomialreihe für ganze positive Exponenten aus combinatorischen Gesetzen ist eine directe Entwickelung, die sich unmittelbar auf den arithmetischen Satz von der Multiplication complexer Factoren gründet. Es wird wohl Niemandem im Ernst einfallen, für diese Entwickelungsweise diejenige Demonstration als eine bessere substituiren zu wollen, nach welcher man die Form der Reihe als zuerst gegeben ansieht und nachher ihre Summe sucht.

An diese Entwickelung schliesst sich äusserst leicht eine zweite für ganze negative Exponenten an. Man hat nämlich

$$(1+x)^{-m} = \left(1 - \frac{x}{1+x}\right)^m,$$

also da der binomische Lehrsatz für ganze positive Exponenten bewiesen ist:

$$(1+x)^{-m} = 1 - m_{(1)} \cdot \frac{x}{1+x} + m_{(2)} \cdot \frac{x^2}{(1+x)^2} - m_{(3)} \frac{x^3}{(1+x)^3} \cdots$$
$$\mp m_{(1)} \cdot \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m-1}} \pm \frac{x^m}{(1+x)^m},$$

wo die Bedeutung des Ausdrucks $m_{(r)}$ bekannt ist. Da nun überhaupt

$$\frac{x^p}{(1+x)^q} = \frac{x^p}{(1+x)^{q-1}} - \frac{x^{p+1}}{(1+x)^q},$$

ilt man, wenn man diese Umbildung in jedem Gliede macht:

$$-^m = 1 - m_{(1)}x + [m_{(2)} + m_{(1)}] \cdot \frac{x^2}{1+x} - [m_{(3)} + m_{(2)}]\frac{x^3}{(1+x)^2} \dots$$
$$\pm [m_{(1)} + 1] \frac{x^m}{(1+x)^{m-1}} \mp \frac{x^{m+1}}{(1+x)^m}.$$

veil sich sehr leicht beweisen lässt, dass

$$m_{(r)} + m_{(r-1)} = (m+1)_{(r)},$$

man

$$)^{-m} = 1 - m_{(1)}x + (m+1)_{(2)} \cdot \frac{x^2}{1+x} - (m+1)_{(3)} \cdot \frac{x^3}{(1+x)^2}$$
$$\dots \pm (m+1)_{(1)} \cdot \frac{x^m}{(1+x)^{m-1}} \mp \frac{x^{m+1}}{(1+x)^m}.$$

Viederholt man dieselbe Umbildung bei allen Gliedern, die den Divisor $1+x$ haben, so erhält man ferner:

$$x)^{-m} = 1 - m_{(1)}x + (m+1)_{(2)}x^2 - (m+2)_{(3)} \cdot \frac{x^3}{1+x} \dots$$
$$\pm (m+2)_{(1)} \cdot \frac{x^{m+1}}{(1+x)^{m-1}} \mp \frac{x^{m+2}}{1+x)^m}.$$

Fährt man so fort, bis man zu einem Glied mit dem Factor x^r mmen ist, das aber den Divisor $1+x$ nicht mehr hat, so finich:

$$+x)^{-m} = 1 - m_{(1)}x + (m+1)_{(2)}x^2 - (m+2)_{(3)}x^3 \dots$$
$$\pm (m+r-1)_{(r)}x^r,$$

n aber noch der Rest

$$\frac{x^{r+1}}{+x}[(m+r)_{(r+1)} - (m+r)_{(r+2)} \cdot \frac{x}{1+x} \dots \pm \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m-1}}]$$
$$\pm \frac{(m+r)_{(r+1)}x^{r+1}}{1+x}[1 - \frac{m-1}{r+2} \cdot \frac{x}{1+x} + \frac{m-1 \,.\, m-2}{r+2 \,.\, r+3} \cdot \frac{x^2}{(1+x)^2} \dots$$
$$\pm \frac{m-1 \,.\, m-2 \dots 1}{r+2 \,.\, r+3 \dots r+m} \cdot \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m-1}}]$$

akommen muss, um $(1+x)^{-m}$ vollständig zu erhalten. Da in der Parenthese enthaltene Reihe sich der 1 um so mehr nä-, je grösser r ist, so kommt die Bedingung der Convergenz täglich auf den Ausdruck

$$\frac{(m+r)_{(r+1)}x^{r+1}}{1+x}$$

zurück, und es lässt sich leicht zeigen, dass wenn derselbe anfangs auch einen bedeutenden Werth hat, er doch endlich schneller abnimmt, als die Glieder einer geometrischen Reihe, deren Exponent irgend ein echter Bruch ist, wenn auch x ein solcher ist. Daher ist für alle positive oder negative x, die kleiner als 1 sind,

$$(1+x)^{-m} = 1 - m_{(1)}x + (m+1)_{(2)}x^2 - (m+2)_{(3)}x^3 \ldots.$$

was mit der Form

$$1 + (-m)_{(1)}x + (-m)_{(2)}x^2 + (-m)_{(3)}x^3 \ldots.$$

übereinkommt. Ich meine aber, die Entwickelung sei richtig, auch wenn $x > 1$, und statt einer solchen Entwickelung lasse sich überall nur $(1+x)^{-m}$ setzen.

§. 4.

Eine Entwickelung der Art nenne ich nun eine directe. Wird dieselbe sehr verwickelt oder erfordert sie bedeutende Vorbereitungen, so tritt oft die indirecte Entwickelung, d. h. die Methode der unbestimmten Coefficienten, als Vermittlerin ein. Dieselbe muss aber nothwendig die Form der Reihe, deren Coefficienten sie bestimmen will, als hinlänglich durch analytische Wahrheiten begründet vorfinden. So folgt leicht mit Hülfe des binomischen Lehrsatzes für positive Exponenten und durch die gewöhnliche Division, dass der Ausdruck $(1+x)^{-m}$ eine Reihe von der Form

$$1 + A_{(1)}x + A_{(2)}x^2 + \ldots.$$

geben muss, und durch die analytischen Eigenschaften dieses Ausdruckes, die nothwendig auch der Reihe zukommen müssen, findet sich die Relation der Coefficienten, wornach sie gegenseitig von einander abhängen. Der Werth von $A_{(1)}$ wird sich aber dadurch noch nicht finden lassen, derselbe muss vielmehr unmittelbar aus directer Entwickelung hervorgehen. Diese Bemerkung ist für die Sache von Wichtigkeit; die Methode der unbestimmten Coefficienten findet zunächst immer nur deren Relation und nicht ihre absoluten Werthe; sie findet, wie alle übrigen Coefficienten vom ersten abhängen, aber durchaus nicht den ersten selbst. Oft freilich nehmen wir den ersten Coefficienten gleich von vorn herein richtig an, wie z. B. bei Quotientenentwickelungen.

Ueberlegt man so mit Klarheit den Gang der Schlüsse, so fällt der Zweifel sogleich hinweg, ob wirklich die Entwickelung mit der entwickelten Function identisch sei, ob beide nicht vielmehr nur die syntaktische Eigenschaft gemein haben, vermöge welcher die Relation der Coefficienten bestimmt wurde. Die Form der Reihe ist nachgewiesen durch eine Entwickelung, welche zugleich denjenigen oder auch diejenigen Coefficienten gab, von welchen die Bestimmung aller übrigen abhängt, und aus den syntaktischen Eigenschaften der Function bestimmten sich zuletzt alle jene übrigen Coefficienten. Was verlangt man da nun noch?

Ich wüsste nicht, was die neuere Analysis dem entgegensetzen wollte, als die Beschuldigung, dass man mit einer Reihe operirt,

von der man noch nicht weiss, ob sie convergirt, und bei der man folglich den Rest beachten müsse, der freilich unbekannt ist. Wenn dieser Einwurf einen Sinn haben soll, so müsste die Meinung sein, dass durch die Vernachlässigung des Restes ein fehlerhaftes Entwickelungsgesetz gefunden werden könnte. Allein hier fragt man, ob dann nicht dieselbe Gefahr auch bei convergirenden Reihen vorhanden sei, denn der Rest hat ja immer dieselbe Form, die Reihe mag convergiren oder divergiren. Wir müssten also die Methode der unbestimmten Coefficienten auch bei convergirenden Reihen fallen lassen, aber dann sind jene neuen so hoch gepriesenen Methoden nicht besser daran. Diess würde z. B. mit der, namentlich von Cauchy geübten Summationsmethode der Fall sein, welche noch überdiess dem synthetischen oder progressiven Vortrage der Mathematik zuwider ist. Wenn so grosse Männer vermöge der Gewalt ihres Geistes einen Stoff nach Belieben formen können und zu formen sich erlauben, so kann damit noch nicht gemeint sein, dass solche Gebilde für ein wissenschaftliches System sich schicken.

Obschon es sich kaum der Mühe lohnt, weitläufiger von dieser Sache zu reden, so will ich dieselbe doch noch ein wenig weiter verfolgen und, um mich auf ein bestimmtes Beispiel zu beziehen, die Reihe

$$1 + m_{(1)}x + m_{(2)}x^2 + m_{(3)}x^3 + \ldots\ldots = f(m)$$

wählen, deren Charaktere bekannt sind, und für welche sich die Convergenz, die in allen Fällen, wo $x < 1$ ist, statt findet, beweisen lässt. Multiplicirt man sie mit einer ähnlichen Reihe

$$1 + n_{(1)}x + n_{(2)}x^2 + n_{(3)}x^3 + \ldots\ldots = f(n),$$

so findet man mit Hülfe einer vorher nachgewiesenen Eigenschaft der Binomialcoefficienten, dass $f(m) \times f(n) = f(m+n)$ sein muss. Hieraus und mit Hülfe der speciellen Werthe $f(1) = 1 + x$ und $f(0) = 1$ findet man alsdann, dass überhaupt $f(n) = (1+x)^n$ ist. Wer steht mir denn aber dafür, dass in das Product beider Reihen keine Störung in das Entwickelungsgesetz gekommen sei? Antwortet man aber, dass der weggelassene Rest nur die Entwickelung einer jeden Reihe in gleicher Weise weiter geführt haben würde und dass im Producte alle Glieder mit einerlei Potenzen vollständig zusammengestellt seien, so frage ich, warum das nicht eben so gut für divergirende Reihen gelten soll? Wenn man jede Reihe einmal abbricht und dann das Product macht, so werden die letzten Glieder desselben immer fehlerhaft, d. h. sie sind nicht nach demselben Gesetz gebildet, wie die ersten, aber sie ergänzen sich aus den Producten, welche die Reste zu Factoren haben, wenn dieselben weiter entwickelt werden. Dieses geschieht aber auf gleiche Weise z. B. bei den obigen Reihen, x mag grösser oder kleiner als 1 sein, denn die Reste sind in allen Fällen dieselbe Functionsform und geben also auch dieselbe Entwickelung.

So scheint es, als ob die Schwierigkeit nur mit Gewalt herbeigezogen sei, oder dass sie sich auf die Meinung gründe, dass divergirende Reihen nur Ausdrücke mit gewissen syntaktischen Eigenschaften seien. Sind sie denn nicht zugleich auch charakterisch für die Function, woraus sie entspringen, d. h. kann dieselbe voll-

ständig bestimmte Reihe aus verschiedenen Functionsformen
wickelt werden?

Jene angedeutete Demonstration Cauchys für den binomi
Lehrsatz scheint mir auch mit dem Namen einer Summirung
nicht richtig bezeichnet zu sein. Es wird von den Eigensch
der Reihe auf die Function zurückgeschlossen, aus welcher si
wickelt werden kann. Die ganze Demonstration ist so geh
dass die Bedingung der Convergenz gar nicht zur Sache g
dass sie auch ohne diese Rücksicht ganz dieselbe bleiben w
wenn man nur statt des Ausdruckes der Summe den allgemei
der Entwickelung zu substituiren beliebte, d. h. wenn ma
Frage so stellen wollte: aus welcher Function kann die so
dete Reihe entwickelt werden? Und wie gross ist nun der U
schied dieser Methode von der der unbestimmten Coefficienten,
che nicht von den Eigenschaften der Coefficienten einer Reih
die entwickelte Function, sondern umgekehrt von den Eigens
ten der Function auf die Coefficienten ihrer Entwickelung schli

§. 5.

Die Convergenz oder Divergenz hat auf das Entwickelun
setz gar keinen Einfluss; sie wird aber alsbald erkannt, wen
Reihe vollständig ist. Zu solcher Erkenntniss lässt sich abe
weit weniger Aufwand von Rechnungen gelangen, als gewöh
geschieht, denn

von der aus der Function $f(x)$ entwickelten R
weiss ich allemal, dass sie convergirt, wenn
Glieder bis zum Verschwinden klein werden.

Dieses will ich jetzt zu begründen suchen.

Es sei

$$f(x) = X_{(1)} + X_{(2)} + \ldots X_{(n)} + R_{(n)},$$

wo $R_{(n)}$ den Rest bezeichnet. Auf gleiche Weise hat man da

$$fx) = X_{(1)} + X_{(2)} + \ldots X_{(n-1)} + R_{(n-1)},$$

woraus sogleich folgt

$$R_{(n-1)} - R_{(n)} = X_{(n)}.$$

Unter der gemachten Voraussetzung verschwindet also die
ferenz zweier Nachbarreste immer mehr und mehr, je höher
in die Reihe geht. Desshalb verschwinden entweder die Reste s
und dann ist die Sache klar.

Will man aber annehmen, die Reste verschwinden nicht
müssen sie, wenn $f(x)$ und alle Glieder seiner Entwickelung
lich sind, selbst nur einen endlichen Werth haben. Zugleich
den sie aber auch im Fortgange der Reihe, zu Folge der Vor
setzung immer kleiner. Denn sind alle Glieder der Entwickel
positiv, so zeigt die Gleichung

$R_{(n-1)} - R_{(n)} = X_{(n)}$, dass $R_{(n)} < R_{(n-1)}$, $R_{(n+1)} < R_{(n)}$ u.

Wechseln aber die Vorzeichen, so kann man wegen der Vor

ng positive Gliedergruppen bilden, die bis zum Verschwinden
men, und man erhält dann eine Reihe positiver Glieder, für
e wieder dasselbe gilt, wie vorhin. Auch lässt sich der Schluss
auf den Fall ausdehnen, wo alle höheren Glieder der Reihe
iv sind.

Hieraus folgt aber mit Nothwendigkeit, dass wenn die Reste
ch bleiben sollten, sie sich einer constanten Grösse C ohne
nähern müssten. Es wäre also die Gleichung

$$f(x) = X_{(1)} + X_{(2)} + X_{(3)} + \ldots . X_{(n)} + C$$

o richtiger, je grösser n wäre, also auch die Gleichung

$$f(x) - C = X_{(1)} + X_{(2)} + \ldots . X_{(n)}$$

so richtiger, je grösser n wäre. Ich finde also jetzt dieselbe
e convergirend, von welcher ich vorhin annahm, dass sie di-
gire. Da nun aber die Reihe eine Entwickelung von $f(x)$ ist,
nähert sie sich auch ohne Ende dem Werthe von $f(x)$ und nicht
n von $f(x) - C$, also dass C verschwindet.

Nimmt man an, dass bei übrigens endlichen Gliedern der Reihe
Reste unendlich werden, so muss natürlich auch $f(x)$ unendlich
n. Diesen Fall könnten wir von unserer Betrachtung ganz aus-
liessen, allein es ist der Sache angemessener, den Begriff der
nvergenz auch darauf auszudehnen. Der Rest verschwindet näm-
h hier nicht absolut, sondern im Vergleich zum Werthe von $f(x)$,
d weil dieser unendlich ist, so muss man natürlich den Rest bis
Unendliche hinausrücken. Es ist noch immer ein grosser Un-
schied zwischen einer divergirenden Reihe und einer solchen,
en Summe unendlich gross ist. Bei der ersteren kann von einer
mirung, d. h. Zusammenrechnung der Glieder auf keine Weise
Rede sein. — Olivier hat in einem Aufsatze in Crelle's Journal
n ähnlichen Satz aufgestellt, als ich hier, allein er lässt solche
hen, die eine unendlich grosse Summe haben, an dem Begriffe
Convergenz nicht Theil nehmen, auch redet er nicht von ent-
kelten Reihen, sondern setzt dieselben als ursprünglich gegeben
us. Ihn sollte eigentlich der Satz zu der Entscheidung führen,
die Summe einer gegebenen Reihe endlich oder unendlich sei,
das kann derselbe nicht leisten.

Doch wir wollen uns dabei nicht länger aufhalten; wir sehen,
wenn $f(x)$ einen endlichen Werth hat, der Rest seiner Ent-
elung, deren Glieder wir endlich voraussetzen, auch nur end-
sein kann. Werden dann noch die Glieder der Reihe über alle
nzen klein, so convergirt sie, und diese Wahrheit überhebt uns
r nutzlosen Rechnungen und bringt uns auf ein freundlicheres
der Wissenschaft, wenn wir nur unablässlich die einzig ihrem
akter entsprechende Methode, die der Entwickelungen nämlich,
seien direct oder indirect, verfolgen wollen. Für jene Fehler,
man durch den Gebrauch divergirender Reihen bekommen ha-
will, werden sich sicherlich bessere Erklärungsgründe auffin-
lassen, als die Divergenz, und die Wissenschaft wird aus den-
n einen grösseren Gewinn ziehen, als durch alle Untersuchun-
über die Convergenz.

§. 6.

Ich komme nun noch zur Entwickelung der Exponentialreih für welche ich nur die Gültigkeit der Binomialreihe bei ganzen p sitiven und negativen Exponenten voraussetze. Ist sie für solch Exponenten entwickelt, so lässt sich ihre Allgemeinheit sehr leich darthun und daraus dann rückwärts auf die allgemeine Gültigke der Binomialreihe schliessen. Ich meine gerade nicht, dass auf di sem Wege etwas Wesentliches gewonnen werde, obschon man da bei auch nichts einbüsst; mein Zweck ist nur, die Methode der u bestimmten Coefficienten in ein klares Licht zu setzen.

Die Entwickelung der Exponentialreihe, die ich hier gebe, i keine andere, als die von Thibaut in der allgemeinen Arithmeti angedeutete, aber nicht bis zu den Anforderungen der neueren M thematik durchgeführte. Sie besteht lediglich in einer anderen A ordnung der Binomialreihe. In a^x setze ich $a = 1 + b$ und erha

$$a^x = (1 + b)^x = (1 - \frac{b}{1+b})^{-x},$$

also wenn ich $\frac{b}{1+b} = \beta$ setze:

$$a^x = 1 + x\beta + \frac{x \,.\, x+1}{1 \,.\, 2}\beta^2 + \frac{x \,.\, x+1 \,.\, x+2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}\beta^3 + \ldots$$

Löse ich hier die Facultäten aller Glieder auf und bezeichne du $\overset{r}{C}_{(m)}$ die Summe aller Producte zu je r Factoren aus den Zahl von 1 bis m, so wird:

$$x = x$$

$$x \,.\, x+1 = x^2 + \overset{1}{C}_{(1)} x$$

$$x \,.\, x+1 \,.\, x+2 = x^3 + \overset{1}{C}_{(2)} x^2 + \overset{2}{C}_{(2)} x$$

$$x \,.\, x+1 \,.\, x+2 \,.\, x+3 = x^4 + \overset{1}{C}_{(3)} x^3 + \overset{2}{C}_{(3)} x^2 + \overset{3}{C}_{(3)} x$$

u. s. w.

Stelle ich nun hier alle Glieder zusammen, welche gleiche Potenz von x enthalten, so bekomme ich die neue Entwickelung:

$$a^x = 1 + [\beta + \frac{\overset{1}{C}_{(1)}}{1 \,.\, 2}\beta^2 + \frac{\overset{2}{C}_{(2)}}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}\beta^3 + \frac{\overset{3}{C}_{(3)}}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4}\beta^4 + \ldots] \frac{x}{1}$$

$$+ [\beta^2 + \frac{\overset{1}{C}_{(2)}}{3}\beta^3 + \frac{\overset{2}{C}_{(3)}}{3 \,.\, 4}\beta^4 + \frac{\overset{3}{C}_{(4)}}{3 \,.\, 4 \,.\, 5}\beta^5 + \ldots] \frac{x^2}{1 \,.\, 2}$$

$$+ [\beta^3 + \frac{\overset{1}{C}_{(3)}}{4}\beta^4 + \frac{\overset{2}{C}_{(4)}}{4 \,.\, 5}\beta^5 + \frac{\overset{3}{C}_{(5)}}{4 \,.\, 5 \,.\, 6}\beta^6 + \ldots] \frac{x^3}{1 \,.\, 2}$$

u. s. w.

was wir kürzer mit

$$\text{II.}\quad a^x = 1 + A \,.\, x + \frac{A_{(2)}x^2}{1.2} + \frac{A_{(3)}x^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{A_{(n)}x^n}{1.2.3\ldots n} + \ldots$$

bezeichnen wollen. Hier ist nun

$$\text{III.}\quad A_{(n)} = [\beta^n + \frac{\overset{1}{C}_{(n)}}{n+1}\beta^{n+1} + \frac{\overset{2}{C}_{(n+1)}}{n+1\,.\,n+2}\beta^{n+2} + \ldots$$

$$+ \frac{\overset{r}{C}_{(n+r-1)}}{n+1\,.\,n+2\ldots n+r}\beta^{n+r}\ldots$$

Dabei ist aber noch zu bemerken, dass diese Entwickelung sowohl für positive als auch für negative x gilt. Bei letzteren muss zwar die Reihe endlich abbrechen, indem sich a^{-x} auf $(1-\beta)^x$ reducirt, allein da dann alle Glieder der Reihe, welche man nach gleichem Gesetz über das Glied β^x hinaus bildet, der 0 gleich werden, so ist die Fortführung bis ins Unendliche immerhin zulässig.

Die Entwickelung ist in Bezug auf x eigentlich schon vollständig, es bedarf bloss noch einer Reduction der Coefficienten und der Nachweisung der Convergenz, um jetzigen Anforderungen zu genügen. Weil aber überhaupt $\overset{m}{C}_{(m)} = 1.2.3\ldots m$, so wird

$$\text{IV.}\quad A = \beta + \tfrac{1}{2}\beta^2 + \tfrac{1}{3}\beta^3 + \tfrac{1}{4}\beta^4 + \ldots$$

Mit meinem oben aufgestellten Satze darf ich eigentlich die Convergenz dieser Reihe nicht beweisen, weil ich die Function $f(\beta)$ noch nicht kenne, aus welcher A entwickelt werden kann. Da indessen $\beta = \frac{b}{1+b} = \frac{a-1}{a}$ für alle positive b ein echter Bruch ist, so fällt die Reihe A schneller als die geometrische $\beta + \beta^2 + \beta^3 + \ldots = \frac{\beta}{1-\beta} = b$, und es ist folglich $A < b$.

In $A_{(n)}$ ist der Coefficient des allgemeinen Gliedes $\frac{\overset{r}{C}_{(n+r-1)}}{n+1\,.\,n+2\ldots n+r}$, und es ist derselbe kleiner als der Coefficient von β^r in der Entwickelung von $(1-\beta)^{-n}$, d. h.

$$\frac{\overset{r}{C}_{(n+r-1)}}{n+1\,.\,n+2\ldots n+r} < (n+r-1)_{(r)}.$$

Denn das grösste Product in $\overset{n}{C}_{(n+r-1)}$ ist $n\,.\,n+1\,.\,n+2\ldots n+r-1$, und da $\frac{n+r-1\,.\,n+r-2\ldots n}{1.2.3\ldots r} = (n+r-1)_{(r)}$ die Anzahl aller Producte ist, so hat man

$$\overset{r}{C}_{(n+r-1)} < (n+r-1)_{(r)}\, n\,.\,n+1\,.\,n+2\ldots n+r-1,$$

und daher

$$\frac{\overset{r}{C}_{(n+r-1)}}{n+1\,.\,n+2\,....\,n+r} < \frac{n}{n+r}(n+r-1)_{(r)},$$

woraus obige Behauptung sogleich hervorgeht. Daher sind al
Glieder der Reihe $A_{(n)}$ kleiner als die gleichzähligen in der Er
wickelung $\beta^n(1-\beta)^{-n}$, und folglich, weil hier Convergenz st
findet,

$$A_{(n)} < \left(\frac{\beta}{1-\beta}\right)^n, \text{ d. h. } A_{(n)} < b^n.$$

Also sind die Glieder der Exponentialreihe sämmtlich kleiner a
die gleichzähligen in der Reihe $1+bx+\frac{b^2x^2}{1.2}+\frac{b^3x^3}{1.2.3}....$, u
da diese schon bis ins Unendliche abnehmen, so darf man nach m
nem obigen Satze auf die Convergenz der Exponentialreihe schliesse
da die Summe derselben zu Folge der Entwickelung nichts and
als a^x sein kann.

Bisher haben wir directe Entwickelung und dieselbe ist eige
lich in so fern schon vollständig, als der Werth von a^x durch d
Reihe I. schon berechenbar ist. Da aber $A, A_{(2)}....A_{(n)}$ Funct
nen von β, d. h. von a sind, so könnte es kommen, dass eine g
wisse einfache Relation zwischen den Coefficienten statt hätte, w
che aus A alle übrigen finden liesse. Um diese Relation auf d
rectem Wege zu entdecken, müssten wir tiefer in die Natur d
Ausdrucks $\overset{r}{C}_{(m)}$ eingehen, allein um dieses zu vermeiden, bedien
wir uns der Methode der unbestimmten Coefficienten, d. h. wir s
chen die Relation der Coefficienten $A, A_{(2)}....A_{(n)}$ durch d
Eigenschaften der Function a^x.

Wir setzen daher $x+y$ statt x in II. und erhalten dur
Auflösung der Potenzen von $x+y$ leicht folgende neue Anor
nung:

$$\text{V.}\quad a^{x+y} = 1 + Ax + \frac{A_{(2)}x^2}{1.2} + \frac{A_{(3)}x^3}{1.2.3} + ...$$

$$+ \left[A + A_{(2)}x + \frac{A_{(3)}x^2}{1.2} + \frac{A_{(4)}x^3}{1.2.3} + ...\right]y$$

u. s. w.,

womit ich meine, dass die Entwickelung nach den Potenzen v
y geordnet sein soll. Aus $a^{x+y} = a^x a^y$ erhält man aber, wei
man für a^y die Entwickelung einsetzt:

$$\text{VI.}\quad a^{x+y} = a^x + Aa^x y + \frac{A_{(2)}a^x y^2}{1.2} + ...$$

Hier meint man nun gewöhnlich noch fernere Umbildungen mach
zu müssen, um zu beweisen, dass in V. und VI. die Glieder, we
che die erste Potenz von y zum Factor haben, wirklich gleich sin
Ich halte diese Bemühung für sehr überflüssig, denn es handelt si
hier nicht um eine numerische Gleichheit beider Entwickelunge
es ist ja die Frage darnach, welche Relation zwischen den Coef
cienten $A, A_{(2)}....A_{(n)}$ statt haben muss, damit die Entwickelung

V. und VI. durchaus identisch werden. Hierdurch wird ja die Identität der gleichgebildeten Glieder in beiden Reihen zur unmittelbaren Bedingung. Man hat daher, wenn man die Glieder ohne vergleicht,

$$a^x = 1 + Ax + \frac{A_{(2)}x^2}{1.2} + \ldots$$

nothwendig. Alsdann

$$Aa^x = A + A_{(2)}x + \frac{A_{(3)}x^2}{1.2} + \frac{A_{(4)}x^3}{1.2.3} + \ldots$$

wenn wir wieder statt a^x die Reihe II. einsetzen:

$$A + A_{(2)}x + \frac{A_{(3)}x^2}{1.2} + \frac{A_{(4)}x^3}{1.2.3} + \ldots$$
$$= A + A^2x + \frac{AA_{(2)}x^2}{1.2} + \frac{AA_{(3)}x^3}{1.2.3} + \ldots$$

folglich $A_{(2)} = A^2$, $A_{(3)} = AA_{(2)} = A^3$, $A_{(4)} = AA_{(3)} = A^4 \ldots$ überhaupt $A_{(n)} = A^n$.

Daher haben wir

$$\text{VII.} \quad a^x = 1 + Ax + \frac{A^2x^2}{1.2} + \frac{A^3x^3}{1.2.3} + \frac{A^4x^4}{1.2.3.4} + \ldots$$

nun die Entwickelung vollständig ist. Die Gleichung $A_{(n)} = A^n$ führt uns zugleich auch zu dem schönen Resultate, dass

$$\text{VIII.} \quad (\beta + \tfrac{1}{2}\beta^2 + \tfrac{1}{3}\beta^3 + \tfrac{1}{4}\beta^4 + \ldots)^n$$

$$= \beta^n + \frac{\overset{1}{C}_{(n)}}{n+1}\beta^{n+1} + \frac{\overset{2}{C}_{(n+1)}}{n+1.n+2}\beta^{n+2} + \frac{\overset{3}{C}_{(n+2)}}{n+1.n+2.n+3}\beta^{n+3} \ldots$$

$$+ \frac{\overset{r}{C}_{(n+r-1)}}{n+1.n+2\ldots n+r}\beta^{n+r} \ldots$$

Es ist nun noch zu beweisen, dass die Reihe VIII. allgemein gilt. Zu dem Ende bemerken wir, dass A eine Function von a ist, die wir mit $\varphi(a)$ bezeichnen wollen. Setzt man a^m statt a, wo m eine ganze Zahl ist, so wird $\varphi(a^m)$ aus $\varphi(a)$. Da aber

$$(a^m)^x = a^{mx} = 1 + Amx + \frac{A^2m^2x^2}{1.2} + \ldots,$$

so sehen wir sogleich, dass $\varphi(a^m) = m\varphi(a)$ sein muss. Dieses gilt zunächst für ganze positive oder negative m, kann aber leicht auch für gebrochene m bewiesen werden. Man hat nämlich

$$\varphi(a) = \frac{1}{p}\cdot\varphi(a^p) = \frac{1}{p}\cdot\varphi[(a^{\frac{p}{q}})^q] = \frac{q}{p}\varphi(a^{\frac{p}{q}}),$$

daher

$$\varphi(a^{\frac{p}{q}}) = \frac{p}{q}\varphi(a).$$

Demnach ist auch

$$a^{\frac{p}{q}} = (a^{\frac{1}{q}})^p = 1 + \varphi(a^{\frac{1}{q}}) . p + \frac{[\varphi(a^{\frac{1}{q}})]^2 p^2}{1.2} + \ldots$$

$$= 1 + \varphi(a) . \frac{p}{q} + \frac{(\varphi(a))^2}{1.2} . \frac{p^2}{q^2} + \ldots.$$

d. h. die Exponentialreihe gilt für alle positive oder negative ga oder gebrochene Werthe des Exponenten. Daher gilt auch Reihe I. für jeden Werth von x, und wenn man sie wieder so ducirt, dass die gleichen Potenzen von β zusammen kommen, d statt der combinatorischen Ausdrücke wieder die Facultäten se so erhält man die Binomialreihe wieder, die folglich ganz allgem gilt.

Der Werth von

$$A = \left(\frac{a-1}{a}\right) + \tfrac{1}{2}\left(\frac{a-1}{a}\right)^2 + \tfrac{1}{3}\left(\frac{a-1}{a}\right)^3 + \ldots.$$

zeigt uns auf das Unzweideutigste, dass für a eine solche Z existiren müsse, wodurch $A = 1$ wird. Bezeichnen wir sie mi so haben wir

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots,$$

also für $x = 1$

$$e = 2 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \ldots.$$

Wir machen nun e zur Grundzahl eines Logarithmensyste das wir das natürliche nennen. Weil dann für $x = 1$:

$$a = 1 + A + \frac{A^2}{1.2} + \frac{A^3}{1.2.3} + \ldots = e^A,$$

so folgt

$$A = \log \text{ nat } a.$$

Da nun $a = \frac{1}{1-\beta}$, so folgt sogleich:

$$\log \text{ nat } (1-\beta) = -(\beta + \tfrac{1}{2}\beta^2 + \tfrac{1}{3}\beta^3 + \tfrac{1}{4}\beta^4 + \ldots).$$

§. 7.

Einen wichtigen Zweifel dürfen wir uns jedoch am Ende ni verhehlen, den ich absichtlich in die Rechnung des vorigen Parag phen legte. Die Aufgabe war, in den Reihen V. und VI. die Co licienten so zu bestimmen, dass beide identisch werden. Diess fordert, dass die gleich gebildeten Glieder identisch sind. In Tbat liegen auch die von y freien Glieder a^x und $1 + Ax$ $\frac{A(2)x^2}{1.2} + \ldots$ schon als identisch vor. Dann machten wir die G

der mit der ersten Potenz von y identisch, nämlich $A \, . \, a^x = A + A_{(2)}x + \frac{A_{(3)}x^2}{1.2} + \ldots.$ und dieses führte uns auf einmal zur Bestimmung der gesuchten Relation zwischen den Coefficienten A, $A_{(2)} \ldots . A_{(n)}$. Demnach werden in V. und VI. die zwei ersten Glieder beider Reihen identisch, aber wie steht es denn mit den Gliedern, welche die höheren Potenzen von y zu Factoren haben?

Man hilft sich hier gewöhnlich damit, dass man beide Reihen einander gleich setzt, die gleichen von y unabhängigen Glieder dann weglässt, mit y dividirt und zuletzt $y = 0$ setzt, wodurch man die Bestimmungsgleichung für alle Coefficienten erhält. Dieses Verfahren ist im Grunde mit dem der Differentialrechnung ganz einerlei, denn man erhält dadurch die derivirten Functionen, und eben dahinaus kommen auch andere Umbildungsmethoden, z. B. die im mathematischen Wörterbuche Bd. V. Th. I. S. 500 in Anwendung gebrachte. Aber es bleibt hierbei immer der oben ausgesprochene Zweifel; es werden zwar zwei Glieder der beiden Entwickelungen für a^{x+y} identisch, aber nicht alle. Vielleicht ist dieses ein Hauptgrund, warum die Methode der unbestimmten Coefficienten nicht befriedigen wollte. Denn die Relation der Coefficienten soll ja so bestimmt werden, dass die Bedingung $a^{x+y} = a^x \, . \, a^y$ erfüllt wird, nicht dass bloss ein Paar Glieder von beiderlei Entwickelung identisch werden.

Man hat hier offenbar ein Princip in die elementare Analysis herabgezogen, ohne davon nur die mindeste Rechenschaft zu geben. Wenn daher die Methode nicht befriedigt, so kann man doch deswegen den Grund nicht den unbestimmten Coefficienten zur Last legen. So wie diese Methode vielfach angewandt worden, ist sie eigentlich nur durch eine gut begründete Derivationsrechnung zulässig.

In unserem Falle lässt sich freilich die vollständige Nachweisung leicht geben. Die vollkommene Identität der beiden Reihen V. und VI. erheischt, dass überhaupt

$$A_{(n)}a^x \text{ und } A_{(n)} + A_{(n+1)}x + \frac{A_{(n+2)}}{1.2}x^2 + \frac{A_{(n+3)}}{1.2.3}x^3 + \ldots.$$

vollkommen identisch werden, wie sich sehr leicht ergiebt, wenn man aus den Reihen

$$a^{x+y} = 1 + A(x+y) + \frac{A_{(2)}(x+y)^2}{1.2} + \ldots.$$

und

$$a^x(1 + Ay + \frac{A_{(2)}y^2}{1.2} + \ldots.) = a^x \, . \, a^y$$

die Glieder heraussondert, welche den Factor y^n haben. Setzen wir nun statt $A_{(n)}$, $A_{(n+1)}$, $A_{(n+2)}$ die im vorigen Paragraphen gefundenen Werthe A^n, A^{n+1}, A^{n+2}, so ist die Identität der obigen allgemeinen Gleichung sogleich einleuchtend, und die Entwickelung der Exponential-, so wie auch der Binomialreihe ist auf das strengste gerechtfertigt.

Aber so leicht dürfte die Rechtfertigung in anderen Fällen

nicht sein, daher allerdings zu rathen ist, die Methode der unb stimmten Coefficienten nicht bei Seite zu legen, denn wir würd dann die Analysis an ihrem innersten Wesen verletzen; wohl al ist zu rathen, die Schwächen, welche den elementaren Entwick lungen hier und da noch ankleben, durch kluge Maassregeln beseitigen.

XI.

Dissertation sur la théorie des axes principau et des axes permanents de rotation.

Par

Monsieur Steichen,

Professeur à l'école militaire de Belgique
à Bruxelles.

---

§. I. Théorie des axes principaux.

1.

L'objet de cette dissertation est de simplifier et de complé la théorie des axes principaux, et pour atteindre à ce but, nous prendrons en entier le problème qui s'y rapporte et nous baser notre solution sur quelques définitions et notions fondamentales mécanique, que l'on admettra probablement sans difficulté; car notions ne renferment en elles-mêmes rien de gratuit, et elles frent l'avantage de conduire par le moyen de l'analyse ordinair la solution directe des questions à traiter.

Concevons un système matériel homogène, pourvu d'un a fixe qui le traverse en son centre d'inertie, à l'instar d'un ess raide et inébranlable, et imprimons au corps un mouvement de tation sur cet axe. Sera-t-il possible de trouver à cet axe u position pour laquelle les forces centrifuges, qui naissent de ce rotation, se fassent équilibre et ne tendent pas à le déplacer?

Pour s'assurer de la possibilité de la question et pour en tr ver en même temps une solution directe et générale, il f commencer par exprimer analytiquement les conditions mécaniq qu'elle entraîne. Or comme les forces centrifuges ne doivent po déplacer l'essieu de rotation, lors même qu'il serait libre, il faut q la sommes algébrique de leurs composantes suivant un axe quelc

que soit nulle, et que de plus leur énergie totale à tourner l'essieu de rotation autour d'un autre axe quelconque, passant par le centre soit nulle aussi. Mais en traçant par ce centre un plan normal à l'axe fixe primitif, et tirant dans ce plan deux axes rectangulaires entr'eux Iz', Iy', on obtient un système d'axes coordonnés rectangles Iz', Iy', Ix', dont le dernier coïncide avec l'axe de rotation, et dont les deux premiers seront censés fixes dans le corps, mais mobiles avec lui autour de Ix'. Si donc Ω dénote la vitesse angulaire du système tournant, et que x', y', z' soient les coordonnées d'un point matériel quelconque m du solide, on aura les forces centrifuges partielles, représentées par les expressions: $m \cdot \Omega^2 \cdot \sqrt{y'^2 + z'^2}$, $m' \cdot \Omega^2 \cdot \sqrt{y''^2 + z''^2} \ldots$; et toutes ces forces étant normales de direction à l'axe Ix', la somme de leurs projections orthogonales sur cette ligne sera nulle d'elle-même. Il faudra donc les estimer par rapport à une autre droite ayant une position moins particulière, et l'on pourra toujours commencer par prendre Iy' pour axe de comparaison.

La projection sur cette droite de la force centrifuge $m\Omega^2 \cdot \sqrt{y'^2 + z'^2}$ se réduit à $m\Omega^2 y'$, et de même sur l'axe Iz' elle devient $m\Omega^2 \cdot z'$; ainsi d'après la première condition qui doit exprimer la nullité de la translation, ou de la tendance du solide à la translation, le long d'un axe quelconque, il faudra poser les équations analytiques:

$$\Omega^2 \cdot \Sigma \cdot my' = 0, \ \Omega^2 \cdot \Sigma \cdot mz' = 0$$

lesquelles, par suite de la définition du centre d'inertie, sont satisfaites d'elles-mêmes, et l'on aura par conséquent pas besoin de s'en embarrasser.

Quant au moyen d'exprimer la seconde condition, on doit se rappeler que l'énergie totale de plusieurs forces à tourner un corps autour d'une droite, telle que Iy', s'obtient par la projection de toutes les forces sur un plan perpendiculaire à la droite, et par l'addition algébrique des moments des forces ainsi projetées. Mais les forces centrifuges, projetées par exemple sur le plan des $x'z'$ donnent lieu à un grouppe de forces parallèles $\Omega^2 \cdot mz'$, $\Omega^2 \cdot mz''$, $\Omega^2 \cdot mz''' \ldots$, parcequ'elles sont toutes dirigées dans des plans perpendiculaires à l'axe Ix'; de plus le moment d'une force, telle que $\Omega^2 \cdot mz'$, par rapport à l'axe Iy', se compose du produit de $\Omega^2 \cdot mz'$ par la perpendiculaire abaissée de l'origine I sur la direction de la force, ou par l'abscisse x'. de sorte que ce moment est $\Omega^2 \cdot m \cdot x'z'$ et le moment total sera parconséquent $\Omega^2 \cdot \Sigma \cdot mx'z'$. — On trouvera de même que l'énergie totale des forces à tourner le corps et l'essieu Ix' autour de l'axe Iz' est représentée par $\Omega^2 \Sigma \cdot mx'y'$; et pour exprimer que cette double tendance à la rotation est nulle, il faudra poser par conséquent les conditions analytiques:

$$\Omega^2 \cdot \Sigma \cdot mx'y' = 0, \ \Omega^2 \cdot \Sigma \cdot mx'z' = 0.$$

On pourrait peut-être croire, que ces conditions soient insuffisantes pour exprimer que les forces centrifuges ne tendent pas à déplacer l'axe Ix'; mais on doit remarquer qu'elles ne sont pas même toutes

deux nécessaires, et qu'une seule d'entr'elles suffit, puisque nous n'avons pas assigné jusqu'ici de position particulière aux axes Iy', Iz' dans le plan normal en I à Ix'. Seulement dèsqu'on se donne la direction de Iy', celle de Iz' en résulte, comme devant être normale à l'autre. D'ailleurs il est manifeste que la rotation de Ix' n'est possible qu'autour d'un axe situé dans le plan $y'z'$. Si l'on donnait toutefois l'axe Iy' dans le plan, il faudrait poser à la fois les deux équations précédentes, parcequ'alors la gyration de Ix' autour de Iy' pourrait être nulle, sans qu'elle le fût en même temps autour de l'axe Iz', normal à Iy'.

Cela posé traçons au centre d'inertie I trois nouveaux axes rectangles Ix, Iy, Iz qui soient fixes et immobiles, et supposons

$$\cos(x', x) = \alpha, \quad \cos(x', y) = \beta, \quad \cos(x', z) = \gamma$$
$$\cos(y', x) = \alpha', \quad \cos(y', y) = \beta', \quad \cos(y', z) = \gamma'$$
$$\cos(z', x) = \alpha'', \quad \cos(z', y) = \beta'', \quad \cos(z', z) = \gamma''$$

de plus x, y, z dénotant les coordonnées d'un point m, rapporté aux axes fixes, à un instant quelconque de la rotation, pour lequel ce même point a par rapport aux axes mobiles les coordonnées x', y', z', on doit avoir d'après la transformation connûe:

$$x' = \alpha x + \beta y + \gamma z$$
$$y' = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z$$
$$z' = \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z$$

et les six équations de condition:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, \quad \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1, \quad \alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2 = 1$$
$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0, \quad \alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' = 0, \quad \alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' = 0.$$

Mais pour que l'essieu Ix', jusqu'ici arbitraire de direction dans le système matériel, à cause qu'il a été rendu fixe, coïncide avec l'axe d'équilibration des forces centrifuges, partant pourqu'étant rendu libre il ne se déplace pas d'un mouvement gyratoire, pendant que le système tourne sur lui, il est nécessaire que les angles relatifs aux cosinus α, β, γ soient ceux que forme l'axe d'équilibration avec les trois axes coordonnés fixes Ix, Iy, Iz qui sont indépendants du corps. Il faut donc que les deux équations de condition posées plus haut, subsistent ici; ou bien il sera nécessaire du moins, que la première d'entr'elles soit satisfaite, l'axe Iy' étant dèslors arbitraire de direction dans le plan $y'z'$; il faut et il suffit parconséquent que l'on fasse dans cette hypothèse:

$$\Omega^2 . \Sigma . mx'y' = 0, \text{ ou } \Sigma . mx'y' = 0.$$

Substituant la valeur du rectangle en $x'z'$, en fonction de xy, α, β, γ, et posant pour abréger:

$$\Sigma . mx^2 = a, \quad \Sigma . my^2 = b, \quad \Sigma . mz^2 = c,$$
$$\Sigma . mxy = f, \quad \Sigma . mxz = g, \quad \Sigma . myz = h,$$

on obtiendra par un calcul rapide et facile la condition transformée

$$\left.\begin{array}{l}a.\alpha\alpha' + b.\beta\beta' + c.\gamma\gamma' + f.(\alpha'\beta + \alpha\beta') \\ + g(\alpha'\gamma + \alpha\gamma') + h(\beta'\gamma + \beta\gamma')\ldots\end{array}\right\} = 0.$$

Et comme cette équation doit être satisfaite, quelle que soit la position de l'axe Iy' dans le plan normal ($y'Iz'$), elle doit encore être remplie pour le cas où après avoir fait tourner les axes Iy', Iz' dans ce plan on a amené Iy' dans une position pour laquelle $y'Ix = 90^\circ$, c. à d. pour le cas de $\alpha' = 0$, et pourvu qu'on tienne compte de la condition simplifiée $\beta\beta' + \gamma\gamma' = 0$. On aura donc ainsi, en supprimant le facteur commun β':

$$(b - c).\beta\gamma + f.\alpha\gamma - g.\alpha\beta + (\gamma^2 - \beta^2)h = 0 \ldots \quad (I).$$

Mais l'équation de condition générale est encore satisfaite pour la position particulière de l'axe Iy' dans laquelle $\beta' = 0$, pourvu qu'on tienne compte de la condition simplifiée $\alpha\alpha' + \gamma\gamma' = 0$, qui en résulte; on est ainsi conduit à une deuxième relation entre quantités connûes et inconnûes:

$$(a - c)\alpha\gamma + f.\beta\gamma + (\gamma^2 - \alpha^2)g - \alpha.\beta.h = 0 \ldots \quad (II).$$

Or ces deux équations particulières, étant jointes à la relation perpétuelle $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, sont évidemment suffisantes pour déterminer les trois inconnûes α, β, γ, et partant la position de l'axe d'équilibration des forces centrifuges que l'on cherche; mais rien ne nous prouve encore que cet axe existe, puisque nous ne savons pas, si l'élimination nous donnera des valeurs réelles ou imaginaires pour α, β, γ. Il y a d'ailleurs une autre difficulté, c'est que rien n'empèche de faire à son tour $\gamma' = 0$ dans l'équation générale; et cette supposition donnera la 3ème équation:

$$(a - b)\alpha.\beta + f(\beta^2 - \alpha^2) + g.\beta\gamma - h.\alpha\gamma = 0 \ldots \quad (III)$$

et l'on aurait ainsi quatre équations pour déterminer trois inconnûes. Il importe donc d'examiner avant tout si la 4ème équation, marquée par (III.), n'est pas une conséquence des trois autres: car si ce cas n'arrive pas, toute recherche ultérieure sera inutile, et l'axe cherché sera impossible. Or on voit aisément qu'en multipliant l'équation (I) par α, et l'équation (II) par β, et retranchant les résultats membre-a-membre, on obtient en effet l'équation (III). Ainsi ces conditions analytiques s'accordent d'une manière remarquable avec l'observation qu'on a présentée plus haut sur le nombre d'équations de condition de la forme: $\Sigma.mx'y' = 0$. De plus en opérant sur l'équation $\Sigma.mx'z' = 0$, comme on l'a fait à l'égard de celle $\Sigma.mx'y' = 0$, on obtiendra manifestement une équation générale que l'on trouve sans nouveau calcul, en changeant α', β', γ' dans celle déjà trouvée, en α'', β'', γ'' respectivement. Et si l'on pose ensuite $\alpha'' = 0$, $\beta'' = 0$, $\gamma'' = 0$, on retrouvera encore une fois les relations (I), (II), (III); ce qui offre la confirmation de ce qu'on avait prévu sans calcul, et par le simple examen de la nature mécanique de la question.

2.

Toutes les difficultés de la question sont donc ramenées à déterminer les trois inconnûes α, β, γ par le moyen de deux quelconques des équations (I), (II), (III) et de la relation perpétuelle α^2

$+\beta^2+\gamma^2=1$. Si dans la vûe de ramener celle-ci à une identité dont il ne soit plus besoin de tenir compte, on désigne par ϑ l'inclinaison de l'axe réel ou imaginaire sur le plan des (x, y), et par η l'angle compris entre sa projection sur ce plan, et entre l'axe Ix, on devra faire d'après une transformation connûe:

$$\alpha=\cos\eta\,.\cos\vartheta,\ \beta=\cos\vartheta\,.\sin\eta,\ \gamma=\sin\vartheta.$$

Si l'on pose ensuite, pour mieux abréger l'écriture des formules:

$$\text{tang}\ \vartheta=z,\ \text{tang}\ \eta=\zeta,$$

on reduira les conditions trouvées plus haut aux formules suivantes:

$$(a-c+f.\zeta)z.\sqrt{1+\zeta^2}+g.z^2.(1+\zeta^2)-g-h.\zeta=0\ \ldots.\ (\text{I})$$
$$[(b-c)\zeta+f].z.\sqrt{1+\zeta^2}+h.z^2(1+\zeta^2)-g\zeta-h\zeta^2=0\ \ldots.\ (\text{II})$$
$$(g\zeta-h).z.\sqrt{1+\zeta^2}+f.(\zeta^2-1)+(a-\beta)\zeta=0\ \ldots.\ (\text{III}).$$

Si l'on multiplie l'équation (I) par h, l'équation (II) par g, que l'on retranche ensuite l'une de l'autre, et qu'on considère la quantité $z\sqrt{1+\zeta^2}$ comme une seule inconnûe auxiliaire u, on aura une équation du premier degré en u, pour déterminer celle-ci en fonction des autres quantités; de même l'equation (III) donnera encore u par le premier degré en fonction des données et de l'inconnûe ζ. Egalant donc cette double valeur de u, on en tirera par un calcul peu compliqué une équation du troisième degré en ζ qui aura la forme suivante:

$$A_1\zeta^3+B_1\zeta^2+C_1\zeta+D_1=0,$$

dans laquelle on a pour abréger:

$$A_1=(f^2-g^2)h-(b-c).g.f$$
$$B_1=g(2h^2-g^2-f^2)-(a-b)(b-c)g+(2a-b-c)fh$$
$$C_1=h(2g^2-h^2-f^2)+h(a-b)(a-c)+(2b-a-c)fg$$
$$D_1=g(f^2-h^2)-f.h.(a-c).$$

Rémarquons que quand on fait l'élimination entre (I) et (II) seulement, on parvient à une équation du 4ème degré dans laquelle le terme constant se réduit à $f^2.h-f^2.h=0$; de sorte que cette équation aura une racine nulle, ce qui est facile à interpreter, et l'autre facteur, après la suppression de cette racine nulle, reproduira l'équation du 3ème degré, trouvée par la première méthode d'élimination, cette équation, ayant au moins une racine réelle, montre, qu'au centre d'inertie d'un système matériel quelconque donné il existe toujours au moins un axe d'équilibration des forces centrifuges: un tel axe est ce qu'on pourrait nommer pour plus de briéveté encore, axe de libre rotation, axe d'inertie du corps, et que l'on nomme communément axe principal.

Au contraire quand un solide est mis en mouvement de rotation autour d'un axe excentrique, et qu'il continue à tourner sur

cet axe pourvu d'un seul point fixe, sans que cet axe tourne ou tende à tourner sur le point fixe, sous l'action des seules forces centrifuges, l'axe se nommera **axe d'équilibration relatif**, **axe principal relatif à ce point**, ou enfin **axe permanent de rotation**: alors les forces centrifuges ne sauraient plus s'équilibrer d'une manière absolûe, et sans l'intervention d'un point fixe au moins, attendu que pour un point différent du centre on ne saurait plus avoir les deux conditions $\Sigma . my' = 0$, $\Sigma . mz' = 0$; de sorte que sans un point fixe l'axe de rotation du solide serait au moins emporté d'un mouvement de translation rectiligne parallèle, en même temps que le solide tournerait sur lui.

3.

L'existence d'un axe d'inertie dans les solides étant déjà reconnûe, si l'on dirige l'axe fixe des abscisses Ix suivant cette ligne Ix', on devra avoir d'après la condition mécanique de la question:

$$\Sigma . mx'y = 0, \; \Sigma . mx'z = 0$$

ou bien

$$\Sigma . mxy = 0, \; \Sigma . mxz = 0; \text{ à cause de } x' = x:$$

or Ix coïncidant avec Ix', les deux autres axes fixes Iy, Iz des coordonnées doivent être dans un plan normal à Ix', puisque par hypothèse nos trois axes directeurs Ix, Iy, Iz sont rectangulaires, et que d'un autre côté tout axe d'équilibration absolu exige que les sommes de la forme $\Sigma . mxy$, $\Sigma . mxz$ soient nulles, quelle que soit d'ailleurs la direction des deux axes restants Iy, Iz, tracés dans le plan normal. Donc pour le système de coordonnées ainsi disposé il faudra avoir $f = \Sigma . mxy = 0$, $g = \Sigma . mxz = 0$, et ces conditions nous donneront, étant introduites dans les valeurs de A_1, B_1 ....:

$$A_1 = 0, \; B_1 = 0, \; D_1 = 0, \; C_1 = h . [(a-b)(a-c) - h^2].$$

l'équation du 3ème degré, réduite au seule terme $C_1 \zeta = 0$ devient:

$$[(a-b)(a-c) - h^2] . h . \zeta = 0.$$

Celle-ci peut-être satisfaite 1) par l'hypotèse $\zeta = 0$, et chacune des équations (I), (II), (III) donnera pour z la valeur correspondante $z = 0$: ainsi l'on est ramené à conclure ce qu'on savait déjà, que l'axe d'équilibration absolu existe et qu'il coïncide avec Ix. — 2) L'équation peut encore être remplie par la supposition $h = 0$, ce qui donnera encore une fois $z = 0$, $\zeta = 0$, et cette circonstance prouve qu'outre l'axe Ix, celui des Iy, ou des Iz peut être un axe d'inertie à cause qu'on a déjà $f = 0$, $g = 0$: mais nous ne savons encore rien de positif à cet égard, puisqu'aucun symptôme ne nous annonce qu'il soit nécessaire de poser $h = 0$, pour satisfaire à l'égalité $C_1 \zeta = 0$. Enfin il est possible que le facteur entre crochets, savoir: $(a-b)(a-c) - h^2$ soit nul: éprouvons donc aussi cette supposition: et soit en conséquence:

$$(a-b)(a-c)=h^2 \dots \quad (A)$$

En vertu de $f=0$, $g=0$, les trois équation (I), (II), (III) donnerc

$$\left.\begin{array}{l}(b-c)\beta\gamma+(\gamma^2-\beta^2)h=0\\(a-c)\,.\,a\gamma-\alpha\,.\,\beta\,.\,h=0\\(a-b)a\beta-\alpha\,.\,\gamma\,.\,h=0\end{array}\right\}\dots\ (B)$$

Si l'on supprime aux deux dernières le facteur α, ou si s le supprimer, on transporte chaque terme en h dans le second m bre, et qu'on multiplie les résultats membre-à-membre on reproc la condition $h^2=(a-b)(a-c)$, admise ci-dessus comm 3i cas possible. De plus la seconde ou la 3ème équation donne γ valeur de β: et substituant cette valeur dans la première, on n déduit aucune valeur déterminée de β: parceque tous les terı du résultat renfermeront le facteur β^2: ainsi les quantités α, β relatives à chaque axe d'équilibration différent de celui Ix ou I resteraient indéterminées, et le problème général serait par con quent aussi indéterminé; or les quantités $a, b, c, f=0, g=0, h$, dép dent non seulement de la position de l'axe Ix' ou Ix, mais enc de la forme du corps, et de la position des axes Iy, Iz, qui s arbitraires de direction dans un plan défini: il est donc impossi d'avoir généralement $h^2=(a-b)(a-c)$; car quand même ce équation subsisterait pour une position spéciale des axes Iy, elle ne saurait pas rester vraie pour toutes les positions différen Ainsi l'opération dans la quelle on supprimait d'abord le facteur commun à tous les termes des deux dernières équations, ou à s primer le facteur commun $\alpha^2\beta\gamma$ aux termes de la combinaison:

$$(a-c)(a-b)\alpha^2\beta\gamma-\alpha^2\beta\gamma\,.\,h^2=0$$

n'est point permise généralement. Donc il faut qu'on ait:

$$\text{ou } \alpha=0, \text{ ou à la fois } \beta=0,\ \gamma=0.$$

Or l'hypothèse de $\beta=0$, $\gamma=0$, donne $\alpha=1$, et ramène à l' Ix déjà trouvé. Il faut donc encore voir si celle de $\alpha=0$ pourra pas amener quelque nouveau résultat. Dans ce cas trois équations posées plus haut se réduisent à la 1ère:

$$(b-c)\beta\,.\,\gamma+(\gamma^2-\beta^2)h=0$$

à la quelle il faut associer ce que devient la relation perpetue savoir:

$$\beta^2+\gamma^2=1$$

Si l'on pose $\beta=\cos\varphi$, partant $\gamma=\sin\varphi$, la dernière devien identique, et la 1ère donnera pour l'angle φ:

$$\operatorname{tang} 2\varphi=\frac{2h}{b-c}\dots\ (c)$$

L'égalité de $\alpha=0$ montre d'abord, que s'il existe un 2ième, 3ièı axe d'équilibration absolu, il doit se trouver dans un plan n

mal à celui Ix' qu'on a déjà reconnu. La valeur de tang 2φ démontre ensuite, en calculant tang φ ou tang 2φ, que dans ce plan il existe deux axes rectangulaires entr'eux, propres à remplir chacun la condition prescrite. Notre examen des différentes manières de satisfaire à l'équation $C_1\zeta = 0$ prouve d'ailleurs avec évidence que tout autre axe en (I) ne saurait remplir cette même condition d'équilibre des forces centrifuges dans le cas général de la question. Si l'on applique le raisonnement précédent au cas d'un point fixe d'un corps quelconque, on trouvera évidemment la même conclusion: ainsi l'existence des trois axes d'équilibration absolus ou des trois axes principaux du centre, et des trois axes permanents de rotation, relatifs à un point fixe quelconque d'un solide, se trouve démontrée.

Remarque I. Les axes coordonnés fixes étant disposés de la manière indiquée, si la forme du solide est telle qu'on ait $h = \Sigma.myz = 0$ et $b = c$ ou $\int y^2 dm = \int z^2 dm$ par rapport aux Iy, Iz, l'équation (C) donnera tang $2\varphi = \frac{0}{0}$, c. à d. que dans le plan normal à un axe d'inertie d'un solide il peut y avoir une infinité d'autres axes d'inertie, pour certaines formes particulières de corps solides; et alors l'équation du 3ième dégré devient identique.

Remarque II. Nous concevons encore la possibilité d'existence d'une espèce de solides pour lesquels l'équation (A) soit remplie; mais comme alors les équations (B) laissent indéterminées à la fois les trois quantités α, β, γ, relatives à l'axe d'équilibration nouveau qu'on cherche, il s'ensuit que quand l'égalité (A) est remplie seulement par rapport à deux axes particuliers rectangles, situés dans un plan normal en I à un axe d'inertie donné, il y aura ou que du moins il pourra y avoir une infinité d'axes principaux pour de certaines formes spéciales de corps solides.

Remarque III. Pour abréger le plus que possible notre dissertation nous passerons sous silence quelques propriétés bien connües que les personnes qui voudraient suivre notre méthode dans l'enseignement, pourront intercaler ici avec facilité, et nous insisterons sur quelques observations qui nous paraissent utiles.

1) Si un système matériel plan est disposé par rapport à une droite centrale de façon à avoir des quantités de matière égales et à égales distances de part et d'autre de cette droite, sur une même normale, nous nommerons cette droite une ligne de symétrie mécanique du système, ainsi p. ex. pour une surface plane elliptique chacun des deux axes conjugués rectangles est une ligne de symétrie directe, tandis qu'un simple diamètre serait seulement une ligne de symétrie inverse.

Le plan de la base commune d'un système polyédrique et de son symétrique est ce qu'on nommera plan de symétrie directe du système entier; on conçoit de même ce qu'il faut entendre par plan de symétrie inverse. La ligne d'intersection de deux plans de symétrie directe d'un système, si toutefois ces plans existent, est ce qu'on peut nommer ligne de symétrie directe du système; on conçoit de même ce qu'il faut entendre par ligne de symétrie inverse dans les solides. Ces notions posées, il est évident par la théorie des moments, que tout axe de symétrie directe d'un système matériel homogène est un axe absolu d'équilibration des forces centrifuges, partant que pour de certaines classes de solides, qui existent en grand nombre par le fait de la nature ou de

l'art, le calcul laborieux de la recherche d'un axe principal au moins devient inutile, et les deux autres se trouveront ensuite déjà moins laborieusement par le calcul des quantités h, b, c de l'équation (C). Si le solide a deux axes de symétrie directe, il n'y aura plus aucun calcul à faire, puisque le 3ième axe d'inertie sera normal au plan des deux autres.

2) Dans tout solide cylindrique ou prismatique homogène, engendré par le mouvement de transport parallèle d'une figure plane suivant une droite normale au plan les trois axes principaux coïncident l'un avec l'axe central normal au plan, et les deux autres avec les axes d'inertie de la section plane, faite dans le solide par un plan du centre, normal à la directrice du mouvement. Cette propriété a été établie par Mr. Binet (Journ. de l'Ec. polyt.). Nous en omettons pour le moment la démonstration.

3) L'équation générale des surfaces du second ordre rapportées à trois axes coordonnés rectangles démontre que ces surfaces admettent généralement trois plans de symétrie directe: elles admettent donc aussi trois axes de cette espèce: or si l'on considère une telle surface comme un système matériel continu et homogène, les trois axes de symétrie deviennent à leur tour trois axes d'équilibration des forces centrifuges: mais ces trois derniers sont rectangles entr'eux; les trois premiers le sont donc aussi: ce qui établit l'existence des diamètres conjugués rectangles dans les surfaces du second ordre; et l'on en rattache ainsi la théorie à la théorie plus générale des axes d'inertie des systèmes matériels, qui comprennent en effet le cas des courbes et des surfaces courbes, censées matérialisées, et cette matérialisation est permise, quisqu'elle n'enlève à ces courbes aucune de leurs propriétés géométriques.

4) Pour un système matériel plan, c. à d. ayant toutes ses parties matérielles situées dans un même plan, (xIy) par exemple, on a identiquement $\Sigma . mxz = 0$, $\Sigma . mxy = 0$, ou $g = 0$, $f = 0$, l'axe Ix coïncidant avec la normale en I au plan: et des équations (I, II, III) on conclut que deux des trois axes d'inertie sont à angle droit dans ce plan, et que le 3ième tombe sur la normale Ix; la position des deux 1ers axes se calculera donc par l'équation (C), en évaluant $h = \Sigma . myz$ à l'instar d'un moment d'inertie, et les quantité $b = \Sigma . my^2$, $c = \Sigma . mz^2$: cette disposition des axes d'inertie du cas actuel est aussi évidente par la théorie des moments, puisque chaque force centrifuge élémentaire ($\Omega^2 mx$, $\Omega^2 my$) passe par le centre d'inertie, et que par conséquent son moment à tourner l'essieu de rotation Ix autour d'un axe quelconque en I, situé dans le plan est évidemment nulle d'elle-même.

§. II. Théorie des axes permanents de rotation.

Extension de la méthode précédemment exposée, et détermination des axes permanents, relatifs à un point fixe quelconque du solide, par rapport aux axes principaux, déjà censés connus.

4.

D'après ce qu'on a déjà remarqué, il est manifeste qu'un corps

solide étant mis en mouvement de rotation autour d'un axe OK, passant par un point désigné (O) du solide, les forces centrifuges ne sauraient plus se faire équilibre d'une manière absolûe; que si le point (O) n'est pas fixe, ce point et l'axe OK seront emportés dans l'espace d'un mouvement plus ou moins compliqué, en même temps que le corps tourne sur OK: la question precédemment résolue doit donc être modifiée, et posée de la manière suivante.

Un corps solide est invariablement lié à un certain point fixe (O), intérieur ou extérieur, et l'on demande autour de quel axe OK en ce point il faut le faire tourner, pour que les forces centrifuges qui naîssent de cette rotation, se fassent équilibre par le moyen du seul point fixe.

Solution. La condition d'équilibre est évidemment remplie, si l'on exprime par le calcul que la somme algébrique des énergies des forces centrifuges à tourner l'axe de rotation OK autour d'une droite quelconque en (O), située dans le plan perpendiculaire est nulle. A cet effet considérons la rotation à un instant quelconque autour de OK censé d'abord fixe, comme dans le 1er cas, et concevons par le point donné trois axes rectangles OX, OY, OZ, dont le 1er se superpose sur la droite OK, inconnûe de direction, et dont les deux autres se trouvent dans un plan normal en (O) à OK. A ce même instant le centre d'inertie (I) du solide occupera dans l'espace une certaine position.

Concevons en (I) trois autres axes rectangles Ix, Iy, Iz respectivement parallèles aux premiers OX, OY, OZ: enfin imaginons en ce même point (I) les trois axes d'inertie du solide Ix', Iy', Iz', qui seront en général autrement dirigés que ceux du second système, et resteront cependant perpétuellement rectangulaires entr'eux.

Soient (X, Y, Z), (x, y, z), (x', y', z') les coordonnées d'un point quelconque m du solide, rapporté respectivement aux systèmes (OX, OY, OZ), (Ix, Iy, Iz), (Ix', Iy', Iz') pour l'instant où l'on considère le mouvement; et nommons $x_1 y_1 z_1$ les coordonnées au même instant du centre (I), rapporté au premier système, tandis que S, T, U dénoteront les coordonnées du point fixe (O) par rapport aux directrices d'inertie (Ix', Iy', Iz'), les quelles sont mobiles avec le corps.

Si pour abréger, et soulager la mémoire, on dresse le tableau de notations:

$$\cos(X, x') = \cos(x, x') = \alpha, \quad \cos(Y, x') = \cos(y, x') = \beta, \quad \cos(Z, x') = \cos(z, x') = \gamma$$

$$\cos(X, y') = \cos(x, y') = \alpha', \quad \cos(Y, y') = \cos(y, y') = \beta', \quad \cos(Z, y') = \cos(z, y') = \gamma'$$

$$\cos(X, z') = \cos(x, z') = \alpha'', \quad \cos(Y, z') = \cos(y, z') = \beta'', \quad \cos(Z, z') = \cos(z, z') = \gamma''$$

on obtiendra par la transformation connûe:

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha x' + \alpha' y' + \alpha'' z' \\ y &= \beta x' + \beta' y' + \beta'' z' \\ z &= \gamma x' + \gamma' y' + \gamma'' z' \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} \alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 &= 1 \\ \beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2 &= 1 \\ \gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 &= 1 \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{aligned} \alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' &= 0 \\ \alpha\gamma + \alpha'\gamma' + \alpha''\gamma'' &= 0 \\ \beta\gamma + \beta'\gamma' + \beta''\gamma'' &= 0. \end{aligned}$$

Pour fixer les idées, supposons que le centre (I) se trouve dans le tri-rectangle des X, Y, Z positifs, et comptons les x, y, z dans le même sens, que les X, Y, Z; le point (O) se trouvera donc ainsi dans le tri-rectangle des x, y, z négatifs, et les quantités $-x_1$, $-y_1$, $-z_1$ exprimeront parconséquent les coordonées du point (O), rapporté aux axes Ix, Iy, Iz. Mais déjà S, T, U expriment les coordonnées de (O) rapporté aux axes d'inertie Ix', Iy', Iz': on aura donc x_1, y_1, z_1 par les formules:

$$\begin{aligned} -x_1 &= \alpha S + \alpha' T + \alpha'' U \\ -y_1 &= \beta S + \beta' T + \beta'' U \\ -z_1 &= \gamma S + \gamma' T + \gamma'' U. \end{aligned}$$

Pour passer ensuite des coordonnées X, Y, Z aux coordonnées parallèles x, y, z, on a les équations:

$$\begin{aligned} &X = x + x_1,\ Y = y + y_1,\ Z = z + z_1 \\ &XY = xy + yx_1 + xy_1 + x_1 y_1 \\ &XZ = xz + zx_1 + xz_1 + x_1 z_1 \\ &YZ = yz + zy_1 + yz_1 + y_1 z_1; \end{aligned}$$

et comme par hypothèse les plans coordonnés (xz, xy, yz) passent par le centre d'inertie, on a $\Sigma.mx = 0$, $\Sigma.my = 0$, $\Sigma.mz = 0$, et partant, M exprimant la masse entière du corps:

$$\begin{aligned} \Sigma.mXY &= Mx_1y_1 + \Sigma.mxy \\ \Sigma.mXZ &= Mx_1z_1 + \Sigma.mxz \\ \Sigma.mYZ &= My_1z_1 + \Sigma.myz. \end{aligned}$$

Mais l'axe OK ou OX devant être un axe d'équilibration des forces centrifuges, il faut que la somme de leurs moments à tourner OX autour d'un axe quelconque tel que OY ou OZ soit nulle; c'est ce qu'on pourra exprimer en posant à la fois $\Sigma.mXY = 0$, $\Sigma.mXZ = 0$; ou bien en écrivant simplement $\Sigma.mXY = 0$, l'axe OY étant alors dirigé d'une manière quelconque par le point fixe, dans un plan normal à OX. Ainsi en se donnant cette latitude, on doit se borner à faire:

$$\Sigma.mXY = 0$$

ou bien:

$$Mx_1y_1 + \Sigma.mxy = 0.$$

Si l'on substitue dans cette dernière équation les valeurs de $x, y), (x_1, y_1)$ en fonction de $x', y', z', \alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma' \ldots . S$, T, U, on obtiendra l'équation de condition générale:

$$= \left\{ \begin{array}{l} \alpha\beta(MS^2 + \Sigma . mx'^2) + \alpha'\beta'(MT^2 + \Sigma . my'^2) \\ \qquad\qquad + \alpha''\beta''(MU^2 + \Sigma . mz'^2) \\ + MST . (\alpha\beta' + \alpha'\beta) + MSU(\alpha\beta'' + \alpha''\beta) \\ \qquad\qquad + MTU(\alpha'\beta'' + \alpha''\beta'). \end{array} \right.$$

ette équation devant subsister, quelle que soit la valeur de β, β', ', aura encore lieu, quand on fait tour-à-tour chacune de ces uantités nulle. Si donc on pose pour abréger:

$$MST = f,\ MSU = g,\ MTU = h$$
$$\Sigma . my'^2 - \Sigma . mz'^2 + MT^2 - MU^2 = B'$$
$$\Sigma . mx'^2 - \Sigma . mz'^2 + MS^2 - MU^2 = A',$$

n obtient les équations suivantes, toutes issûes de la condition énérale:

$$\alpha'\alpha''B' + f\alpha\alpha'' - g\alpha\alpha' + h(\alpha''^2 - \alpha'^2) = 0 \ldots . \text{(I')}$$
$$\alpha\alpha''A' + f\alpha'\alpha'' + g(\alpha''^2 - \alpha^2) - h\alpha\alpha' = 0 \ldots . \text{(II')}$$
$$\alpha\alpha'(A' - B') + f(\alpha'^2 - \alpha^2) + g\alpha'\alpha'' - h\alpha\alpha'' = 0 \ldots . \text{(III')}.$$

lultipliant la 1re par α, la seconde par α', et retranchant membre-membre, puis supprimant le facteur α'' commun aux termes re-:ants, on obtient la 3ième équation. Ainsi cette dernière n'est u'une conséquence des deux autres, ce qui prouve que jusqu'ici n'y a aucune impossibilité à la question proposée; car on n'a de ette manière que deux équations distinctes, lesquelles étant jointes la relation perpétuelle $\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 = 1$, serviront à faire conaître les angles relatifs aux cosinus $\alpha, \alpha', \alpha''$, et compris entre axe OK, et entre les axes d'inertie Ix', Iy', Iz'. De plus comme élimination de α', α'' se réduit à une opération toute analogue à elle qu'on a déjà effectuée pour le cas du centre d'inertie, et que 'un autre côté les trois équations précédentes sont aux coëfficients ultiplicateurs près les mêmes que celles du premier cas, il s'ensuit ue si l'on pose encore une fois:

$$\alpha = \cos \vartheta . \cos \eta,\ \alpha' = \cos \vartheta . \sin \eta,\ \alpha'' = \sin \vartheta$$

uis:

$$\operatorname{tang} \vartheta = z,\ \operatorname{tang} \eta = \zeta,$$

n obtiendra l'équation du 3ième dégré:

$$A_1\zeta^3 + B_1\zeta^2 + C_1\zeta + D_1 = 0,$$

ans la quelle on a sans nouveaux calculs et par comparaison avec cas traité:

$$A_1 = h(f^2 - g^2) - gfB'$$
$$B_1 = g(2h^2 - f^2 - g^2) + hfA' + (hf - gB')(A' - B')$$
$$C_1 = h(2g^2 - h^2 - f^2) + fgB' + (hA' - gf)(A' - B')$$
$$D_1 = g(f^2 - h^2) - fhA'.$$

Soient A, B, C les trois moments d'inertie principaux du corps, relatifs au centre (I): on aura donc:

$$A - B = \Sigma . m(y'^2 - x'^2),\ A - C = \Sigma . m(z'^2 - x'^2),$$
$$B - C = \Sigma . m(z'^2 - y'^2);$$

et pour plus de clarté dans les notations, il sera utile de dresser le tableau suivant:

$$A' = C - A + M(S^2 - U^2)$$
$$B' = C - B + M(T^2 - U^2)$$
$$A' - B' = B - A + M(S^2 - T^2)$$
$$f = MST,\ g = MSU,\ h = MTU.$$

Si l'on développe maintenant les valeurs de A_1, B_1, C_1, D_1 en fonction des constantes A, B, C, qui expriment en calcul par leurs valeurs respectives le mode de distribution de la matière inerte, ou ce qu'on pourrait nommer la forme mécanique du corps, et en fonction des quantités S, T, U, coordonnées du point fixe (O) par rapport aux trois axes d'inertie du solide, on trouvera par des réductions longues mais faciles:

$$A_1 = M^2(B - C)S^2TU,$$
$$B_1 = M^2(C-A)ST^2U + M^2(B-A)SU^3 + M^2(C-B)(T^2 - U^2)SU$$
$$- M(C-B)(B-A)SU,$$
$$C_1 = M^2(C-B)S^2TU - M^2(B-A)TU^3 + M^2(C-A)(S^2 - T^2)TU$$
$$+ M(B-A)(C-A)TU,$$
$$D_1 = M^2(A - C)ST^2U.$$

Ainsi donc le problème général tel que nous voulions l'envisager, se trouve complétement rèsolu: car un solide homogène continu ou discontinu étant donné de grandeur et de position dans l'espace, et connaîssant, comme cela arrive souvent (remarq. III. No. 3.) la position de ses trois axes d'inertie, on obtiendra celle de ses trois axes permanents, relatifs à un point fixe quelconque par l'évaluation simple des quantités A, B, C, M, et des coordonnées S, T, U, qui donnent la position du point fixe par rapport aux trois axes d'inertie. Car ces quantités étant connûes en nombres, on obtiendra la valeur de ζ par la résolution d'une équation numérique du 3ième dégré. Pour tirer ensuite de là la valeur de $z = \text{tang}\,\vartheta$, il faut se rappeler que dans le cas du centre (I) nous avons trouvé pour $z\sqrt{1+\zeta^2}$ la valeur $\frac{(a-b)\zeta + f(\zeta^2 - 1)}{h - g\zeta}$; de sorte qu'alors la valeur de z était connûe en fonction de ζ, déjà censé calculé. De

plus, pour passer de ce premier cas au cas actuel, il faut changer $b-c$ en B', $a-c$ en A', partant $a-b$ en $A'-B'$, puis les quantités f, g, h, qui d'abord désignaient les sommes $\Sigma.mxy$, $\Sigma.mxz$, $\Sigma.myz$, désignent présentement les quantités MST, MSU, MTU: donc on aura dans le cas actuel:

$$z=\frac{(A'-B')\zeta+f(\zeta^2-1)}{(h-g\zeta)\sqrt{1+\zeta^2}}$$

ou bien:

$$z=\frac{MS^2-MT^2+B-A+MST(\zeta^2-1)}{MU(T-S\zeta)\sqrt{1+\zeta^2}}.$$

Connaissant ζ et z, on connaîtra les quantités α, α', α'' relatives à un même axe inconnu OK, lequel sera par suite connu de position et de direction dans le solide proposé.

L'axe OK ou OX étant ainsi trouvé, comme les équations (I', II', III') sont absolument analogues aux équations (I, II, III) du 1er cas, il s'ensuit que les deux autres sont dans un plan normal en (O) à cet axe, et qu'on en calculera les directions par l'équation suivante qui est l'analogue de l'équation ((C). No. 3.):

$$(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi).\Sigma.mYZ-\sin\varphi.\cos\varphi.\Sigma.m(Y^2-Z^2)=0\ldots\ldots (C')$$

5.

Il importe de rémarquer, que les valeurs des coefficients A_1, B_1, C_1, D_1 dépendant pour tous les termes en A, B, C, S, T, U de la différence des moments d'inertie, pris deux-à-deux, ne peuvent pas se simplifier d'avantage dans le cas particulier d'une forme de corps donnée, à moins que cette forme ne soit donnée en même temps par ses dimensions. On voit aussi par les formules générales que deux solides semblables et semblablement placés ont les mèmes axes principaux, ou du moins des axes parallèles en deux points homologues quelconques.

6.

Quand le solide est de révolution autour d'un axe d'inertie Ix', on a $B-C=0$, partant $A_1=0$, et l'équation trouvée précédemment s'abaisse au second degré, car elle devient:

$$B_1\zeta^2+C_1\zeta+D_1=0\ldots.(D)$$

Dans ce même cas on conclut déjà par la théorie du §. I. que tout plan conduit suivant l'axe de révolution est un plan principal ou d'inertie, c. à d. renfermant deux axes principaux du centre: donc de quelque manière que le point fixe (O) est placé, il peut être censé situé dans un plan d'inertie central $(x'Iy')$, et il est parsuite permis de faire $U=0$, ce qui donne $B_1=0$, $C_1=0$, $D_1=0$, et $z=\infty$. Ainsi dès-lors un des axes permanents de rotation en (O) normal au plan, que déterminent l'axe de révolution et le point [illegible]né (O); et les deux autres sont parconséquent dans ce plan. [illegible]r y trouver leur position, on peut procéder par le moyen de [illegible]ation (C'). D'ailleurs, si avant que de faire $U=0$ commun à

tous les termes de l'équation (D), on supprime ce facteur, et que l'on pose ensuite $U=0$, on obtient par substitution de B_1, C_1, D_1 et en égard à $B-C=0$, la relation suivante:

$$\zeta^2+\frac{M(S^2-T^2)+B-A}{M^2ST}\zeta-1=0,$$

laquelle donne la valeur des angles que forment avec l'axe de figure Ix' les deux axes principaux en (O) situés dans le plan (OIx'), et l'on voit encore, ce qu'on savait déjà généralement, que ceux-ci sont à angles droits, puisque les racines ζ', ζ'' donnent la condition $\zeta'\zeta''+1=0$.

Quand en un point d'un solide donné il existe une infinité d'axes permanents, tous situés dans un même plan, ce point peut être considéré comme un centre d'axes, et on le nommera par cette raison centre de rayonnement ou centre de radiation plane, tandisque nous nommerons centre de radiation absolûe tout point d'un solide pour lequel il existe une infinité d'axes suivant toutes les directions possibles de l'espace.

D'après ce qui précède, il est facile d'obtenir les centres de radiation plane des solides de révolution. En effet pour trouver les coordonnées d'un tel point, il faut exprimer que les racines ζ, ζ' sont indéterminées, ce qui exige qu'on fasse à la fois:

$$ST=0, \text{ et } B-A=M(T^2-S^2).$$

La 1re de ces égalités est satisfaite par $S=0$, et par $T=0$. Si l'axe de figure est un axe de moment d'inertie maximum, on fera $T=0$, et il vient:

$$S=\pm\sqrt{\frac{A-B}{M}}.$$

Ainsi dans ce cas le solide renferme deux foyers de radiation plane, situés sur l'axe de figure à égale distance du centre: ce sont donc deux foyers de radiation conjugués.

Si l'axe de figure est un axe de moment d'inertie minimum, il faudra faire au contraire $S=0$, ce qui donne:

$$T=\pm\sqrt{\frac{B-A}{M}}.$$

Ainsi dans tout solide de révolution autour d'un axe de moment minimum, il existe une infinité de centres de radiation plane, tous distribués sur le lieu d'une circonférence de cercle, tracée dans le plan normal à l'axe de figure, et le quel plan passe par le centre d'inertie: le rayon de cette circonférence est

$$\sqrt{\frac{B-A}{M}}.$$

A la vérité la solution précédente ne semble d'abord donner que deux points conjugués de cette espèce: mais il convient de se rappeler que toute droite, tirée par le centre d'inertie normalement à l'axe de révolution est un axe d'inertie, et en réalité la solution nous

indique qu'une telle droite renferme deux points de radiation conjugués: elle montre donc qu'en effet chaque point de la circonférence en question est un centre de radiation plane.

7.

Observons que les propriétés précédentes subsistent encore pour de certaines classes de solides qui ne sont pas de révolution. Concevons p. ex. le solide matériel homogène, engendré par le mouvement d'une figure plane dont le centre d'inertie se meut sur une droite normale à son plan, et d'un mouvement de transport commun à tous les points de la figure. Si pour les deux axes d'inertie de la figure plane les moments d'inertie correspondants sont égaux entr'eux, le solide engendré aura aussi ses moments égaux relativement à ses deux axes principaux lesquels sont dans un plan normal à l'axe directeur, et de plus parallèles aux axes principaux de la figure mobile, tel est p. ex. le cas d'un parallélipipède droit à base quarrée ou à base lozange, d'un cylindre à base circulaire, quoique appartenant déjà aux solides de révolution. Il existe d'ailleurs d'autres cas de solides qui sans être compris dans l'une ni dans l'autre des deux espèces précédentes ont néanmoins deux moments d'inertie principaux du centre égaux entr'eux: tel est p. ex. l'octaèdre formé par deux pyramides égales régulières, appuyées sur une même base quarrée, et même lozange. Les diagonales de cette base sont évidemment deux axes principaux à moments égaux, tandis que le 3ième axe d'inertie central répondra en général à un moment plus fort ou plus faible.

Si l'on demandait les axes permanents de rotation d'un tel solide, relatifs à un point fixe quelconque (O), la solution de la question se trouverait toute faite par nos formules générales. En nommant Ix' l'axe du moment d'inertie inégal, on aurait ici $B=C$, partant

$$A_1=0,\ B_1=M^2(B-A)S\,.\,U(T^2+U^2),$$
$$C_1=M^2(B-A)TU(S^2-T^2-U^2+\frac{B-A}{M}),$$
$$D_1=-M^2(B-A)ST^2U,$$
$$B_1\zeta^2+C_1\zeta+D_1=0.$$

Si l'on porte maintenant dans cette dernière les valeurs de B_1, C_1, D_1, on pourra y supprimer ensuite le facteur commun $M^2(B-A)U$ toutes les fois que le point fixe (O) ne se trouve point placé dans le plan $y'x'$: car alors U ne sera pas nul. Ayant une fois ζ par l'équation ainsi préparée, on aura également z conformément aux indications de la fin du No. 4. Ainsi la question actuelle est resolûe.

Si l'on resout l'équation en ζ, on reconnaîtra que pour les points de radiation des solides de cette classe il faut avoir encore $C_1=0$, $B_1=0$, partant:

$$M^2(B-A)SU=0,\ M^2(B-A)TU(S^2-T^2-U^2+\frac{B-A}{M})=0.$$

De là on conclut 1) que quand l'axe directeur du mouvement de la figure génératrice (ou l'axe du moment inégal dans d'autres cas) est un axe de moment d'inertie maximum, il existe sur cet axe deux foyers conjugués de radiation plane, et distants du centre d'inertie d'une quantité $\sqrt{\frac{A-B}{M}}$: que si au contraire cet axe central est un axe de moment d'inertie minimum, les foyers de radiation plane, conjugués deux-à-deux, se trouveront sur une circonférence de cercle située dans le plan normal en (I) à l'aye dont il s'agit, et décrite avec un rayon $\sqrt{\frac{B-A}{M}}$. Examinons de plus près la dernière hypothèse laquelle admet $B > A$, et donne parconséquent:

$$S=0, \text{ et } T(S^2 - T^2 - U^2 + \frac{B-A}{M}) = 0.$$

L'équation $S=0$ montre d'abord, que si les centres de radiation plane existent, il faut les chercher tous dans le plan $(y'Iz')$. La 2ième équation est ensuite satisfaite par l'égalité à zéro de chacun de ses facteurs, ce qui donne tour-à-tour:

$$T=0, \text{ et } T^2 + U^2 = \frac{B-A}{M}.$$

Mais l'équation $T=0$ prouve, que le point $U=\frac{B-A}{M}$ du solide est lui-même un foyer de radiation plane, c. à d. que tous les axes en ce point situés dans un certain plan peuvent être des axes permanents de rotation: mais évidemment ce n'est là qu'une solution particulière de la circonférence $T^2+U^2=\frac{B-A}{M}$. Si l'on a encore $B=A$, ce qui est la limite de l'inéquation $B > A$, il viendra à la fois $S=0$, $T^2+U^2=0$, ou $S=0$, $T=0$, $U=0$: c. à d. qu'alors le centre d'inertie est un foyer de radiation plane d'axes principaux, ce qui n'est encore qu'une suite nécessaire de la circonférence reconnûe.

Il est du reste facile de se convaincre, que les points ainsi obtenus sont de radiation plane; car par exemple la supposition de $U=0$, $T=0$ donne $z=\infty$, de sorte qu'il y a toujours un axe permanent qui coïncide au point donné avec la normale au plan $x'y'$.

L'hypothèse $S=0$, $M(T^2+U^2)=B-A$ réduit la valeur de z à $z=\frac{U}{T}$, et fait voir que l'un des trois axes permanents en un point quelconque pris sur le cercle $M(T^2+U^2)=B-A$, a une inclinaison déterminée sur le plan $(x'y')$, dépendante de la position particulière de ce point, et que les autres axes permanents en nombre illimité, sont cependant tous situés dans un même plan normal au 1er axe.

La condition de $C_1{}^2 - 4B_1D_1 = 0$, qui exprime que les deux racines de ζ sont égales entr'elles, ne conduit à aucune conclusion qui ne soit déjà connûe; on trouverait facilement qu'elle ne saurait être satisfaite que par la supposition de $C_1=0$, $B_1=0$ qu'on a déjà examinée.

Les racines de l'équation $B_1\zeta^2 + C_1\zeta + D_1 = 0$ ne sauraient jamais devenir imaginaires, parceque la quantité $C_1{}^2 - 4B_1D_1$ se réduit à une quantité essentiellement positive:

$$M^4(B-A)^2T^2U^2(S^2 - T^2 - U^2 + \frac{B-A}{M})^2$$
$$+ 4M^4(B-A)^2S^2T^2U^2(T^2+U^2).$$

Ainsi conformément aux conclusions de la méthode générale il n'existe ici aucun point extérieur du solide, qui n'admette au moins trois axes permanents.

Les deux racines de l'équation trouvée sont égales et de signes contraires dans tous les cas particuliers où l'on a $C_1 = 0$, et elles deviennent:

$$\zeta = \pm\sqrt{-\frac{D_1}{B_1}} = \pm\frac{T}{\sqrt{T^2+U^2}}.$$

Dans ce cas il faut que le point (O) soit placé sur une surface du second ordre $C_1 = 0$ ou:

$$S^2 - T^2 - U^2 = \frac{A-B}{M},$$

la quelle coupe les plans principaux $(x'y', x'z')$ suivant deux hyperboles, et le plan $(y'z')$ suivant une circonférence imaginaire ou réelle, selon que l'axe Ix' du moment inégal est de maximum ou de minimum: ainsi la surface sera un hyperboloïde de révolution à deux nappes dans le premier cas, et à une seule nappe dans le second cas. On obtiendra d'ailleurs sans difficulté la valeur de z correspondante à celle de $\zeta = \pm\frac{T}{\sqrt{U^2+T^2}}$ dans la formule générale qui donne z en ζ, S, T, U, etc. . . . .

Pour l'espèce de solides dont on vient de s'occuper, on ne saurait faire séparément $B_1 = 0$, ni $D_1 = 0$, sans admettre que le point (O) soit placé dans l'un des trois plans principaux du solide. Or cette position particulière du point (O) mérite sans doute quelque attention: mais on peut l'envisager d'une manière plus générale et même pour les corps qui ont à la fois leurs trois moments d'inertie principaux du centre inégaux entr'eux. Cet examen fera l'objet du No. suivant.

8.

On demande de déterminer les axes permanents d'un solide, relatifs à un point situé dans l'un quelconque des trois plans principaux du centre de ce solide.

Solution. Supposons d'abord que le point (O) soit situé dans le plan principal (x', y'); on aura donc $U = 0$, partant $A_1 = 0$, $B_1 = 0$, $C_1 = 0$, $D_1 = 0$, car U est un facteur commun à tous ces coefficients. Il semble donc que pour le point ainsi placé il y ait une infinité d'axes permanents, ou que du moins, s'il n'y en a que trois, leur détermination échappe à la méthode générale. Mais

on s'apperçoit en même temps qu'en supprimant le facteur U commun à tous les termes de l'équation du 3ième degré, et cherchant ensuite ce que deviennent les quantités $A_1 : U$, $B_1 : U$, $C_1 : U$, $D_1 : U$ par la supposition de $U = 0$, on parvient à l'équation véritable qui convient à ce nouveau cas. Nommant $\left(\frac{A_1}{U}\right)$ la valeur de $\frac{A_1}{U}$ qui résulte de cette hypothèse, $\left(\frac{B_1}{U}\right)$ celle de $\frac{B_1}{U}$, et ainsi de suite pour C_1, D_1, on aura

$$\left(\frac{A_1}{U}\right)\zeta^3 + \left(\frac{B_1}{U}\right)\zeta^2 + \left(\frac{C_1}{U}\right)\zeta + \left(\frac{D_1}{U}\right) = 0,$$

et cette équation pourra servir à déterminer les trois axes permanents. Mais elle ne fait pas connaître d'une manière générale la position mutuelle de ces lignes, et c'est cependant là l'objet auquel il faut attacher ici le plus d'importance. En se reportant ici aux équations générales (I', II', III') et remarquant que $U = 0$ donne $g = 0$, $h = 0$, on obtient les relations simplifiées:

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & \alpha'\alpha'' B' + f\alpha\alpha'' = 0 \\ (2) & \alpha\alpha'' A' + f\alpha'\alpha'' = 0 \\ (3) & \alpha\alpha'(A' - B') + f(\alpha'^2 - \alpha^2) = 0 \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} A' = MS^2 + C - A \\ B' = MT^2 + C - B \\ A' - B' = M(S^2 - T^2) + B - A \end{array}\right\}$$

Si l'on supprime d'abord le facteur α'' dans chaque membre des deux premières conditions, on a:

$$\alpha' B' + f\alpha = 0, \quad \alpha A' + f\alpha' = 0.$$

Tirant de là les valeurs de α', et les égalant entr'elles, on obtient la condition:

$$(f^2 - A'B')\alpha = 0,$$

et comme on ne peut avoir généralement le facteur $f^2 - A'B'$ égal à zéro, à moins que le point (O) déjà situé dans le plan $(x'y')$ n'y occupe une position particulière, il est manifeste qu'on doit faire $\alpha = 0$; ce qui donne parsuite $\alpha' = 0$; ces valeurs étant introduites dans la relation perpétuelle $\alpha^2 + \ldots = 1$ donneront $\alpha'' = \pm 1$. Ainsi dans ce cas l'un des trois axes cherchés est paralèlle à Iz' ou se trouve normal au plan principal dans lequel on a placé le point (O). Quant aux deux autres, ils seront parconséquent situés dans ce plan même où ils occupent une position qu'on peut déterminer par la méthode de l'équat. (C'). No. 4.; mais on peut aussi les déduire des équctions de conditions posées ci-dessus. En effet les deux premières doivent être satisfaites aussi par la supposition de $\alpha'' = 0$, ce qui laisse les cosinus α, α' encore inconnus. Mais comme on a outre la 3ième équation celle-ci: $\alpha^2 + \alpha'^2 = 1$, on aura deux relations pour déterminer deux inconnûes. L'élimination donnera:

$$\alpha' = -\frac{f}{\alpha(A' - B')}\cdot(1 - 2\alpha^2), \quad \alpha'^2 = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(A' - B')^2}{(A' - B')^2 + 4f^2}}$$

Si donc on pose $\alpha = \cos\varphi$, et que l'on dénote par φ', φ'' les angles qui répondent aux deux racines, on obtient:

$$(D) \ldots\ldots \cos^2\varphi' = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{A'-B'}{\sqrt{(A'-B')^2+4f^2}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}K,$$

$$\cos^2\varphi'' = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{A'-B'}{\sqrt{(A'-B')^2+4f^2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}K,$$

pour abréger. La valeur $\alpha'' = 0$ montre qu'un ou deux des axes cherchés sont situés dans le plan d'inertie $(x'y')$, et les valeurs φ', φ'' qui donnent $\operatorname{tang}\varphi' \cdot \operatorname{tang}\varphi'' + 1 = 0$ nous apprennent qu'effectivement ces axes sont au nombre de deux et qu'ils sont à angles droits. De plus leurs directions par rapport à Ix' se trouvent déterminées par les équations en φ', φ''. Ainsi la question actuelle est resolûe.

Pour comprendre la direction de ces deux axes dans une seule formule, on observera que $\cos^2\varphi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}K$ donne:

$$\sin^2\varphi = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}K,\ \cos^2\varphi - \sin^2\varphi = K,\ 4\sin^2\varphi\cos^2\varphi = 1 - K^2,$$

partant:

$$\operatorname{tang} 2\varphi = \frac{2f}{A'-B'} = \frac{2MST}{B-A+M(S^2-T^2)},$$

résultat auquel on parvient aussi par la méthode qui emploie directement l'angle auxiliaire φ. Le résultat précédent et notamment la valeur de $\cos\varphi$ ou celle de $\operatorname{tang} 2\varphi$ nous fournit le moyen de déterminer les centres de radiation plane situés dans le plan principal $(x'y')$. On voit en effet qu'on n'a qu'à exprimer analytiquement la condition que l'angle φ reste indéterminé, ce qui revient à faire à la fois:

$$ST = 0,\ B - A + M(S^2 - T^2) = 0.$$

Si l'on a $B > A$, on fera $S = 0$, et il vient:

$$T = \pm\sqrt{\frac{B-A}{M}}.$$

Si l'on a $B < A$, on fera $T = 0$, et il vient:

$$S = \pm\sqrt{\frac{B-A}{M}}.$$

On conclut de là que l'axe du moment d'inertie maximum dans un solide quelconque renferme toujours deux foyers conjugués de radiation plane, qui a lieu dans le plan principal même formé par les deux autres axes d'inertie du centre.

On démontrerait de même que l'axe principal du moment d'inertie moyen du solide renferme deux foyers conjugués de radiation [illegible] qui se fait dans le plan formé par les deux autres axes prin[illegible]. La distance des foyers au centre est dans ce dernier cas

égale à $\sqrt{\frac{B-C}{M}}$. On suppose alors $A > B$ et $B > C$: l'axe d
moment d'inertie minimum ne renferme que des foyers de radiatio
imaginaires. Dans le cas des solides de révolution où l'on a $B=C$
la distance focale devient nulle, et l'on en conclut ce qu'on sava
déjà: que dans les solides de révolution et dans ceux ayant seule
ment deux moments égaux, tous les axes du centre, tracés dans l
plan normal à l'axe de figure ou à l'axe du moment inégal, sor
des axes principaux.

9.

Nous avons conclu de l'équation:

$$(f^2 - A'B')\alpha = 0,$$

que l'un des trois axes permanents est normal au plan principal o
le point fixe (O) se trouve placé: mais si le point avait dans c
plan, dans celui des ($x'y'$) p. ex. une position particulière propr
à satisfaire à l'égalité à zéro du 1er facteur c. à d. à l'égalité:

$$f^2 - A'B' = 0,$$

on ne serait plus en droit d'admettre cette conclusion, relative
la direction de l'axe cherché; car les quantités α, α', α'' étant tou
jours assujetties aux conditions (1, 2, 3) resteraient indéterminée
entre de certaines limites. Or la condition $f^2 - A'B' = 0$ peu
être remplie de deux manières: 1) par l'hypothèse de $f=0$, $A'B'$
$=0$ à la fois; 2) par l'hypothèse de $f^2 = A'B'$, équation qui peu
subsister sans qu'aucune des quantités f, A', B' soit séparémen
nulle. Examinons d'abord le cas de la première supposition. Ell
exige qu'on ait à la fois $f=0$, $A'=0$, ou bien $f=0$, $B'=0$
Or chaque système de ces équations ramène aux propriétés particu
lières que l'on a déjà reconnues. Reste donc à interprêter l'hypo
thèse plus générale:

$$f^2 = A'B',$$

laquelle étant développée deviendra:

$$MS^2(C-B) + MT^2(C-A) = -(C-A)(C-B).$$

Si C est le plus grand des trois moments d'inertie principaux, l
courbe précédente est imaginaire.

Si C est le minimum de ces trois moments d'inertie, la cour
de cette équation sera une ellipse, tracée dans le plan formé p
les axes du moment maximum et du moment moyen.

Si C est le moment d'inertie moyen, il y aura un terme pos
dans le premier membre, tandis que l'autre est négatif, et le seco
membre devient positif. Ainsi dèslors la courbe de l'équation se
une hyperbole concentrique au système et tracée dans le plan pr
cipal formé par les axes des moments minimum et maximu
De plus la supposition $f^2 = A'B'$ réduit les équations (1) et (
à une même condition:

$$(\alpha A' + f\alpha')\alpha'' = 0,$$

laquelle il faut joindre la relation perpétuelle:

$$\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 = 1$$

t l'équation (3):

$$\alpha\alpha'(A' - B') + f(\alpha'^2 - \alpha^2) = 0.$$

i l'on suppose d'abord $\alpha'' = 0$, il restera pour la détermination es quantités α, α' les deux équations de condition:

$$\alpha^2 + \alpha'^2 = 1,$$
$$\alpha\alpha'(A' - B') + f(\alpha'^2 - \alpha^2) = 0;$$

ar alors cette dernière n'est plus une conséquence des deux autres cause de $\alpha'' = 0$. Or ce cas d'élimination a été déjà traité, et il ous a donné un système d'axes permanents, l'un normal au plan 'inertie $(x'y')$, et les deux autres situés dans ce plan au point onné (S, T). Pour l'un de ces derniers on a trouvé qu'il fait avec axe des abscisses un angle φ' donné par l'équation (D) du No. 8. quelle devient ici en vertu de la valeur de f^2:

$$\cos^2\varphi' = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{A' - B'}{A' + B'}\right) \text{ et } \operatorname{tang}^2\varphi' = \frac{A'}{B'}.$$

insi l'un de ces axes forme avec l'axe des abscisses un angle dont tangente est $\pm\sqrt{\frac{B'}{A'}}$, et l'autre un angle de tangente $\mp\sqrt{\frac{A'}{B'}}$. ais nos équations de condition doivent être satisfaites aussi indéendamment de la valeur particulière $\alpha'' = 0$ attribuée à α''. L'éuation (3) n'est d'ailleurs qu'une conséquence des deux autres , 2), si l'on ne suppose pas d'avance $\alpha'' = 0$; et il suffira parconquent de poser généralement

$$\alpha A' + f\alpha' = 0, \ \alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 = 1.$$

r si l'on dénote par η l'angle compris entre l'axe Ix' et entre la ojection sur le plan $(x'y')$ de l'axe d'equilibration cherché, et par son inclinaison à ce plan, on pourra faire:

$$\alpha = \cos\vartheta \,.\, \cos\eta, \ \alpha' = \cos\vartheta \,.\, \sin\eta, \ \alpha'' = \sin\vartheta.$$

e là on conclut:

$$A' \cos\vartheta \,.\, \cos\eta + f \cos\vartheta \,.\, \sin\eta = 0,$$

ar la relation perpétuelle devient identique. La dernière équation partage en deux facteurs, l'un $\cos\vartheta = 0$, qui réproduit la soluon de l'axe normal au plan, et l'autre:

$$A' \cos\eta + f \sin\eta = 0$$

onne:

$$\text{tang}\,\eta = -\frac{A'}{f} = \mp\sqrt{\frac{A'}{B'}},$$

et l'angle ϑ restera indéterminé partant arbitraire. Il en est pa
conséquent de même des trois cosinus α, α', α''. Ainsi toutes l
lignes, situées au point donné, d'une manière quelconque, dans
plan normal au plan d'inertie et passant au point donné, sont d
axes d'équilibration. Mais en substituant pour A', B' leurs valeu
dans l'expression de tang η, on peut s'appercevoir que tous l
axes se projettent suivant la normale à la section conique au poi
donné, et que la solution particulière qui provient de $\alpha'' = 0$
comprise dans la solution générale. Nous sommes donc en dr
d'énoncer les propositions suivantes, dont la première n'est qu'u
négation:

1) Dans le plan principal du centre, formé par les axes de m
ments moyen et minimum il n'existe aucun point, aucun lieu gé
métrique de foyers de radiation plane.

2) Dans le plan principal du centre, formé par les axes de m
ments maximum et minimum, il existe toujours une hyperbo
concentrique au solide dont chaque point est un foyer de radiati
plane normale d'axes permanents: c. à. d. que ces axes sont to
distribués dans le plan normal au plan principal, et mené suiva
la normale à la section conique au point donné.

3) Dans le plan principal formé par les axes des moments m
ximum et moyen il existe toujours une ellipse concentrique
solide, dont chaque point est un foyer de radiation plane normal
c. à. d. que tous les axes permanents en ce point sont situés da
un plan, normal au plan principal et mené suivant la normale à
section conique; de plus la tangente en ce même point à la cour
est l'axe permanent isolé.

Si l'on se reporte sur la valeur de tang η, on voit qu'elle
indéterminée pour le cas de $A' = 0$, $f = 0$; c. à. d. pour $ST =$
et $MS^2 + C - A = 0$, équations aux quelles on peut satisfaire
prenant $T = 0$ et $S = \pm\sqrt{\frac{A-C}{M}}$. Cette circonstance semble a
noncer que les sommets du grand axe de l'ellipse soient des foye
de radiation absolûe et universelle: mais il n'en est pas ainsi, parc
qu'en écrivant: $-\frac{A'}{f} = -\frac{A'}{\sqrt{A'B'}}$, on obtient tang $\eta = \mp\sqrt{\frac{A'}{B'}}$,
l'hypothèse de $A' = 0$, $T = 0$ donnant $B' = C - B$, il en résul
tang $\eta = \mp\sqrt{\frac{0}{C-B}} = 0$, ce qui est conforme à l'énoncé génér
établi plus haut. Mais pour la classe de solides, qui auraient de
moments d'inertie égaux C, B, et dont le troisième A serait
plus grand, la quantité tang η devient en effet indéterminée: ain
pour cette espèce de solides les deux points de l'axe du maximu
situés à la distance $\mp\sqrt{\frac{A-C}{M}}$ du centre sont des foyers de r
diation absolus et universels d'axes permanents. Cette dernière pr
priété, et celles relatives aux deux sections coniques de radiation o
été découvertes pour la premiere fois par M. Binet (Journ. de l'Éc
polytechn.). Plus tard Ampère y est parvenu de son côté (No
veaux Mémoires de l'Institut). Nous les avons également trouvé

avant que d'avoir pris une connaissance approfondie du mémoire de M. Binet. Quant à la propriété des deux foyers de radiation absolus démontrée, son analogue se trouve aussi démontrée dans la note p. 496. 1ère édition de la mécanique de Poisson: mais nous prions le lecteur de revoir ce passage et le memoire de M. Binet; il pourra se convaincre que la question s'y trouve envisagée sous un point de vûe différent de ce que nous venons de présenter; c'est ce qu'on concevra d'autant mieux, si l'on a égard à ce que nous dirons sur les moments d'inertie égaux entr'eux.

10.

On voit par les valeurs des coëfficients A_1, B_1, C_1, D_1, que pour tous les solides ayant leurs moments d'inertie principaux du centre égaux entr'eux, les racines de l'équation en ζ restent indéterminées ou inconnûes: mais il y a ici ou du moins il peut y avoir un dégré d'indétermination plus ou moins considérable et avant que de rien prononcer, il faudra soumettre encore ce cas particulier à un examen spécial. On sait déjà que quand les moments principaux du centre sont égaux, tous les moments relatifs à des lignes centrales quelconques du solide sont égaux entr'eux. De là il est aisé de conclure que de tous les axes en un point quelconque (O) d'un tel solide la ligne droite OI, menée du point donné par le centre d'inertie, est pour le point (O) l'axe du moment d'inertie minimum; cette droite est aussi manifestement une l'igne d'inertie centrale, et de plus tous les axes en (O) situés dans un plan normal à OI correspondent à des moments d'inertie égaux. Enfin tous les axes en (O) situés en dehors de ce plan, mais distribués sur une même surface conique, concentrique à OI, ont encore des moments d'inertie égaux dont la valeur commune est:

$$A + M \,.\, OI^2 \,.\, \sin^2 a,$$

A désignant le moment central, et a l'inclinaison de la génératrice à la ligne OI, considérée comme axe conique. De là on est conduit à penser que si pour le point (O) il existe une multiplicité d'axes d'équilibration, ils doivent au moins se trouver tous dans un plan normal en (O) à OI. Or cette propriété peut être en effet démontrée d'une manière rigoureuse à l'aide des équations de conditions générales (I', II', III', No. 4.); car de quelque manière que le point fixe (O) se trouve placé, on peut dire qu'il est placé sur un axe principal du centre Ix', et faire en conséquence $T=0$, $U=0$: ce qui donne $f=0$, $g=0$, $h=0$, partant:

$$B'=0,\ \alpha'\alpha''B'=0,\ \alpha\alpha''A'=0,\ \alpha\alpha'(A'-B')=0\ \ldots.\ (g)$$

et à cause de $B'=0$, il restera simplement:

$$\alpha\alpha''A'=0,\ \alpha\alpha'A'=0.$$

...ditions sont satisfaites 1) par $\alpha''=0$, $\alpha'=0$ à la fois: ce ...ne $\alpha=1$, et fait voir que l'un des axes cherchés coïncide ...I ou $x'I$; ce qui est évident. Mais elles sont encore satis... par $\alpha=0$; et comme on a dèslors $\alpha'^2+\alpha''^2=1$, il s'ensuit

que les autres axes cherchés sont dans un plan normal en O à OI, et qu'ils s'y trouvent en nombre infini, puisque les quantités α', α'', quoique liées par la relation $\alpha'^2 + \alpha''^2 = 1$, restent arbitraires ou indéterminées. — Ainsi en nommant avec Euler solides de 1ère classe ceux des solides qui ont leurs trois moments principaux du centre égaux, nous pouvons établir dans notre langage, que tout point fixe d'un solide de 1ère classe est un centre de radiation plane normale d'axes permanents, tandisque le centre d'inertie est un foyer de radiation absolûe et universelle.

Remarque. On nous objectera peut-être que notre raisonnement est insuffisant, en ce que nous admettons à la fois les trois équations .... (g), tandis qu'ailleurs nous avons remarqué que l'une d'entr'elles n'est qu'une conséquence des deux autres. Mais il convient d'observer que dans le cas particulier actuel la 1ère condition $\alpha'\alpha''B' = 0$ est satisfaite d'elle-même à cause de $B' = 0$; si donc on la supprime ou qu'on la néglige, il faudra tenir compte des deux autres à la fois, car on doit dans tous les cas exprimer complètement la nature mécanique de la question qui veut que l'énergie totale des forces centrifuges à tourner l'essieu de rotation du solide autour de deux axes au moins, situés dans un plan normal, soit nulle. Notre raisonnement ne nous paraît donc pour le moment susceptible d'aucune objection fondée.

11.

En examinant avec quelqu'attention la loi de composition des coëfficients A^1, B^1, C^1, D_1 de l'équation du 3ème dégré en ζ, on reconnaît qu'ils ne changent pas de valeurs quand on change à la fois les signes des coordonnées S, T, U, sans altérer leurs valeurs. Donc en joignant un point quelconque (O) de l'espace au centre d'inertie d'un système rigide, et prolongeant la droite OI d'une quantité $IO' = IO$, on obtient un point (O'), pour lequel les axes permanents de rotation du solide sont respectivement parallèles à ceux du point (O). Cette propriété a été aussi reconnûe par Mr. Binet, mais par sa marche plus savante et plus laborieuse.

12.

Les racines de l'équation du 3ème dégré en ζ ne sauraient devenir indéterminées que quand on suppose à la fois $A_1 = 0$, $B_1 = 0$, $C_1 = 0$, $D_1 = 0$. Si donc on se reporte de nouveau à la décomposition de ces coëfficients, on s'apperçoit que dans des solides quelconques il ne saurait exister aucun foyer de radiation, qui ne soit situé dans l'un des trois plans principaux du centre du solide, et comme ces plans ne renferment que des centres de radiation plane normale, il s'ensuit que les solides en général n'admettent aucun centre de rayonnement absolu et universel. Le cas exceptionel à cet égard a été signalé plus haut.

13.

Pour déterminer les axes permanents de rotation d'un système matériel plan, relatifs à un point fixe (O) du plan, on fera passer par ce point deux axes rectangles (Ox, Oy) parallèles aux axes prin-

cipaux (Ix', Iy'), et en désignant par φ l'angle inconnu de l'axe cherché avec Ox, et par S, T les coordonnées de (O) relatives à Ix', Iy', ou ce qui revient au même ici, celles de I relatives à Ox, Oy, on aura:

$$\text{tang } 2\varphi = \frac{2MST}{(A-B)+M(T^2-S^2)}.$$

Pour avoir tang $2\varphi = \frac{0}{0}$, il faudra donc poser à la fois:

$$MST = 0, \ A - B + M(T^2 - S^2) = 0.$$

Soit $A > B$, et posons en conséquence $T = 0$; d'où l'on tire:

$$S = \pm\sqrt{\frac{A-B}{M}}.$$

Il s'ensuit de là que pour tout système matériel plan il existe sur l'axe du moment d'inertie maximum central du plan deux foyers de radiation plane conjugués. Il est bien entendu que le 3ème axe permanent est unique ou isolé et normal au plan. L'exemple de la surface elliptique homogène est bien remarquable ici. En effet nommant ϱ sa densité, a, b les demi-axes principaux du centre, on obtient:

$$A = \tfrac{1}{4}\pi\varrho a^3 b, \ B = \tfrac{1}{4}\pi\varrho a b^3; \ M = \pi\varrho a b$$

ce qui donne:

$$S = \pm\sqrt{a^2 - b^2}.$$

Ainsi **les foyers mécaniques**, ou les centres de radiation plane de la surface elliptique, se trouvent placés sur le petit axe de la figure, de la même manière dont les foyers géometriques ou optiques de la courbe sont rangés sur le grand axe.

On peut encore démontrer facilement que pour un point fixe (O) pris sur l'un des deux axes d'inertie d'une surface plane matérielle les trois axes permanents sont constamment parallèles à eux mêmes et à ceux du centre; qu'enfin le lieu des centres de parallélisme d'axes permanents dans le plan est une hyperbole.

14.

Sur le plan d'inertie central, comprenant les axes des moments maximum et moyen, décrivons l'ellipse, lieu des foyers de radiation:

$$(B - C)S^2 + (A - C)T^2 = \frac{(A-C)(B-C)}{M},$$

et concevons en un point quelconque du périmètre curviligne un système d'axes rectangulaires, l'un Ox tangent à la courbe, l'autre normal, et le 3ème Oz parallèle à Ix'. Si l'on dénote par α, les trois angles d'une droite quelconque OK avec ces axes donnés et par $\int p^2 dm$ ou par $\Sigma.mp^2$ le moment d'inertie du so- par rapport à OK, on aura en nommant A'_1, B'_1, C'_1 les trois

moments d'inertie du solide, relatifs aux axes perma
Oy, Oz:

$$\Sigma . mp^2 = A'_1 \cos^2 a + B'_1 \cos^2 b + C'_1 \cos^2$$

Si l'on appelle η' l'angle de l'axe Ox avec l'axe Ix', o

$$\tang^2 \eta' = \frac{B'}{A'},\ \cos^2 \eta' = \frac{A'}{A'+B'};$$

et si η exprime l'angle de la normale Oy avec Ix', il v

$$\tang^2 \eta = \frac{A'}{B'},\ \cos^2 \eta = \frac{B'}{A'+B'}.$$

Or en concevant par le centre I deux axes Iu, Iv p
Ox, Oy, respectivement, on aura le moment d'inertie r
égal à:

$$A \cos^2 \eta' + B \cos^2 \eta,\ \text{car}\ \cos(uIz) = 0;$$

et celui relatif à Iv égal à:

$$A \cos^2 \eta + B \sin^2 \eta;$$

et par substitution ces quantités deviendront:

$$\frac{AA' + BB'}{A'+B'}\ \text{pour}\ Iu,$$

$$\frac{AB' + A'B}{A'+B'}\ \text{pour}\ Iv.$$

Pour obtenir maintenant les valeurs de A'_1, B'_1, o
ajouter aux précédentes le produit de la masse par le q
distance p entre Iu, Ox, et par celui de la distance
et Oy. Mais on a:

$$p^2 = \frac{(A-C)(B-C)}{M[(A-C)^2T^2 + (B-C)^2S^2]},\ q^2 = S^2 + T^2$$

d'où l'on tire:

$$A'_1 = \frac{AA' + BB'}{A'+B'} + Mp^2 \ldots . (Ox),$$

$$B'_1 = \frac{AB' + A'B}{A'+B'} + M(S^2 + T^2 - p^2) \ldots . (Oy$$

et l'on aura ensuite pour C'_1:

$$C'_1 = C + M(S^2 + T^2).$$

Il n'y aura plus qu'à substituer ces valeurs de A'_1, B'_1, C'
quation première pour avoir le moment $\Sigma . mp^2$.

Si l'on tient compte de la relation entre S et T, o
aisément:

$$Mp^2 = -\frac{(A-C)(B-C)}{A'+B'},$$

d'où :

$$A'_1 = \frac{AA'+BB'-(A-C)(B-C)}{A'+B'},$$

$$B'_1 = \frac{AB'+A'B+(A-C)(B-C)}{A'+B'} + M(S^2+T^2);$$

de là on conclut aussi:

$$A'_1 + B'_1 + C'_1 = C + 2M(S^2+T^2),$$

ce qui exprime une propriété facile à énoncer en langage ordinaire.

Pour avoir le moment d'inertie, relatif à une droite OK, située dans le plan de rayonnement normal à la conique, on fera:

$$\cos a = \cos \vartheta \,.\, \cos \eta, \ \cos b = \cos \vartheta \,.\, \sin \eta, \ \cos c = \sin \vartheta,$$

ce qui donne:

$$\cos a = \cos \vartheta \,.\, \sqrt{\frac{B'}{A'+B'}}, \ \cos b = \cos \vartheta \,.\, \sqrt{\frac{A'}{A'+B'}}$$

et

$$\Sigma \,.\, mp^2 = (A'_1 B' + B'_1 A') \frac{\cos^2 \vartheta}{A'+B'} + C'_1 \,.\, \sin^2 \vartheta.$$

Donc le moment d'inertie relatif à cette position particulière de OK change avec son inclinaison sur le plan principal $(x'y')$, et cependant toutes les lignes en (O) situées dans le plan normal sont des axes permanents de rotation. Il n'est donc pas exact de supposer, comme on le fait dans la théorie ordinaire, que les lignes droites, pour être axes permanents de rotation en un point quelconque, doivent correspondre à des moments d'inertie égaux entr'eux. L'hypothèse réciproque serait également erronnée, puisque l'on a déjà reconnu plus haut des axes à moments égaux qui ne sont point des axes permanents.

Si l'on considère l'un des sommets du grand axe de la courbe, on aura: $MS^2 = A - C$, $T = 0$, $A' = 0$, $B' = C - B$; partant $A' + B' = C - B$, et $A'_1 = B + A - C$, $B'_1 = A$, $C'_1 = A$; ce qui est évident aussi par la transformation directe, parcequ'alors Oy coïncide avec Ix'. Par rapport à la droite en ce sommet, situé dans le plan (x', z'), le moment d'inertie devient:

$$\Sigma \,.\, mp^2 = A + (B - C)\cos^2 \vartheta.$$

Au contraire pour une droite en ce sommet, dirigée d'une manière quelconque, on doit avoir:

$$\Sigma \,.\, mp^2 = (B + A - C)\cos^2 a + A \cos^2 b + A \cos^2 c = A + (B - C)\cos^2 a.$$

Ainsi toutes les génératrices d'une surface conique concentrique à

la tangente à la courbe parallèle à Iy', et ayant son so
des sommets du grand axe répondent à des moments d'ine
et cependant aucune de ces génératrices n'est douée de
d'un axe permanent. Pour chaque sommet du petit axe d
on a:

$$\Sigma . mp'^2 = B + (A - C) \cos^2 \alpha,$$

ce qui répond à une propriété analogue. Pour les tan
quatre sommets la valeur commune du moment d'inertie s
$- C$. On pourra répéter les calculs précédents pour l'h
radiation, et pour tout axe de l'espace, passant par un
la courbe, on trouvera:

$$\Sigma . mp^2 = B \cos^2 \alpha + A \sin^2 \alpha,$$

ce qui suppose le plan des axes maximum et mini
celui des $(x'y')$. De là on déduit encore l'analogue d'une
déja établie.

15.

Supposons que le point fixe (O) soit situé d'une ma
conque sur l'un des trois axes principaux du centre,
exemple. On aura donc:

$$\alpha'\alpha''(\Sigma . my'^2 - \Sigma . mz'^2) = 0,$$
$$\alpha\alpha''(\Sigma . mx'^2 - \Sigma . mz'^2) = 0,$$
$$\alpha\alpha'(\Sigma . mx'^2 - \Sigma . my'^2) = 0;$$

et comme pour des formes quelconques de solides on n'a
entre les quantités $\Sigma . mx'^2$, $\Sigma . my'^2$, $\Sigma . mz'^2$, on devra p
ment:

$$\alpha\alpha' = 0, \ \alpha\alpha'' = 0, \ \alpha'\alpha'' = 0.$$

Ces équations de condition ne sauraient être remplies qu
pothèse de l'égalité à zéro de deux quelconques des tro
$\alpha, \alpha', \alpha''$. On conclut de la, conformément a ce que Po
connu par une autre voie, que pour tout point situé s
trois axes d'inertie d'un solide, l'un des trois axes perma
cide toujours avec cet axe même. Mais contrairement à
tion, les deux autres axes permanents en ce point son
respectivement aux deux autres axes d'inertie, car e
l'axe Ox suivant Ix' qui renferme (O), et faisant Oy,
lèles à Iy, Iz, on aura pour un point matériel quelcon
et $z = z'$: partant $\Sigma . myz = \Sigma . my'z' = 0$; et comme on
permanent, il s'ensuit à la fois $\Sigma . myz = 0$, $\Sigma . mxz = 0$, Σ
c'est ce qu'on pourrait aussi démontrer encore par d'autr

16.

Continuons à placer le point fixe (O) sur l'un des
d'inertie, sur Ix' par exemple, et admettons que le sol
révolution, partant qu'il ait ses deux moments d'inertie,

axes Iy', Iz', égaux entr'eux: dèslors tous les axes dans le plan $(y'Iz')$ seront des axes d'inertie. Donc puisque les deux lignes Oy, Oz parallèles à ces axes sont permanents, et que dans le plan $(y'Iz')$ chaque axe d'inertie Iy' reste arbitraire de direction, il en est de même de la direction de Oy, Oz dans le plan (y, z). On conclut de là, que quand un solide a deux moments d'inertie principaux du centre égaux, un point quelconque de l'axe d'inertie à moment inégal est un foyer de radiation plane d'axes permanents, tous situés dans un plan normal en ce point à l'axe, ou pour le dire plus abréviativement, c'est un foyer de radiation plane normale d'axes permanents. Cette propriété reproduit celle du No. 10. relative aux solides de première classe.

Remarque. Nous terminerons cette dissertation, en supprimant quelques développements et détails qui ne nous paraissent pas d'un intérêt capital; mais il nous reste à faire une dernière observation, et à réparer une omission. Les deux sommets de l'ellipse de radiation, relative aux extrémités de son grand axe, son situés sur l'axe du moment d'inertie maximum, aux distances du centre $\pm\sqrt{\frac{A-B}{M}}$; mais ce même axe renferme les deux sommets de l'hyperbole, distants du centre des quantités $\pm\sqrt{\frac{A-C}{M}}$: les deux extrémités du petit axe de l'ellipse se trouvent au contraire sur l'axe du moment moyen. Concluons de là que dans tout solide l'axe central du moment d'inertie maximum renferme deux couples de foyers conjugués de radiation plane normale, exprimés par les distances $\delta = \pm\sqrt{\frac{A-B}{M}}$, $\delta' = \pm\sqrt{\frac{A-C}{M}}$, tandisque l'axe moyen ne renferme qu'un système unique de foyers conjugués, donné par la distance:

$$\Delta = \pm\sqrt{\frac{B-C}{M}}.$$

17.

Notice historique. Segner a le premier reconnu l'existence des axes principaux et des axes permanents de rotation, qui fut ensuite démontrée par l'immortel Euler. Sa demonstration analytique se trouve reproduite avec plus ou moins de modifications par les géomètres mécaniciens plus récents, Laplace, Prony, Poisson, etc. La méthode de Laplace nous paraît plus rigoureuse que celle de Poisson, en ce qu'il fait voir d'abord l'existence des trois axes principaux, pour en conclure ensuite la réalité des trois racines de l'équation du 3ème dégré; tandisque Poisson admet par une espèce de réduction à l'absurde la réalité des trois racines pour en conclure l'existence des axes principaux, ce qui nous semble laisser quelque chose à désirer. D'ailleurs cette dernière manière de procéder n'est pas entièrement conforme à l'esprit de l'analyse, en ce que l'on admet d'abord l'existence de ces axes, pour la vérifier ensuite par le calcul; ensuite elle offre l'inconvénient de rendre solidaires entr'eux ces trois axes et de ne pouvoir les définir que par les expressions analytiques $\Sigma.mxy = 0$, $\Sigma.mxz = 0$, $\Sigma.myz = 0$. D'un autre côté nous faisons contre cette méthode une objection que

nous reproduisons ici, sans prétendre toutefois qu'elle soit fondée. Il nous paraît que la réalité des trois racines de l'équation du 3ème dégré à la quelle on parvient dans toutes les méthodes est impossible à prouver; et il se peut même dans de certains cas qu'il n'y ait qu'une racine réelle. En effet les coëfficients des termes de l'équation dépendent des constantes a, b, c, f, g, h les quelles dépendent elles-mêmes des dimensions, de la forme et de la masse du système et de la disposition des axes coordonnés fixes aux quels il est rapporté: il se peut donc que ces axes se trouvent disposés de façon que l'équation de condition entre constantes qui doit être remplie pour rendre deux racines imaginaires soit en effet satisfaite, mais dèslors on aurait un axe principal seulement, ce qui dans la définition purement analytique est absolument dépourvu de signification. Dans sa mécanique analytique Lagrange traite aussi la question des axes principaux; mais loin de les rendre solidaires entr'eux il démontre d'abord par ses formules générales du mouvement de rotation des solides l'existence d'un axe de libre rotation, et déduit ensuite facilement les deux autres de la même analyse.

Dans un mémoire inséré dans le journal de l'école polytechnique M. Binet traite la question par une méthode fort générale dont nous ne saurions ici donner l'idée; et le premier il a découvert cette belle propriété de l'ellipse et de l'hyperbole de radiation que l'on a établie ci-dessus. Plus tard Ampère s'est occupé de la même question dans les nouveaux mémoires de l'institut de France; et ses résultats sont pour la plupart identiques à ceux de M. Binet; sa méthode est plus géométrique, mais l'énoncé des propriétés qu'il établit devient embarrassant et quelque fois même fort difficile à bien saisir. De plus aucun de ces illustres maîtres ne s'était occupé de la détermination des axes permanents par rapport aux axes principaux déjà censés connus. Ainsi donc dans notre manière de voir il y avait encore des difficultés à vaincre et des conclusions nouvelles à établir, conclusions qui devaient résulter de cette détermination. En commençant notre tâche nous avions pour but de faire une théorie générale complète des axes principaux et permanents, une théorie susceptible de comprendre toutes les propriétés connues et nouvelles de ces axes, et de figurer en même temps dans l'enseignement ordinaire de la mécanique. Nous allions oublier de parler de M. Cauchy qui a traité la question des axes principaux par une méthode géométrique remarquable de simplicité et que dans l'enseignement on pourrait préférer à toute autre marche, quand on aurait peu de temps à consacrer à cette matière: en outre plus récemment dans le journal mathém. de M. Liouville, M. Gascheau a montré le moyen de déduire de là les deux sections coniques de radiation; de sorte qu'il serait maintenant facile de faire de cela un tout bien homogène qui suppose toutefois l'existence des diamètres conjugués rectangles des surfaces du second ordre. Mais nous ne croyons pas que notre travail devienne par là inutile, et c'est ce qui nous a décidé à le livrer à la publicité.

XII.

eber Euler's Princip der Differenzialrechnung, n Zusatz zu des Herrn Dr. Gerhardt Aufsatz im II. Band, 2. Heft des Archivs für Mathematik und Physik.

Von

Herrn Doctor Ludwig Felix Ofterdinger

zu Tübingen.

Die Derivations-Methode fand bei den Deutschen solchen An-
lang, dass sie in fast allen Lehrbüchern der Differenzialrechnung
u Grunde gelegt wurde, und gilt jetzt noch bei manchem Mathe-
atiker als die wahre Grundlage des höheren Calculs. Es ist dies
m so auffallender, als Euler*) schon vor Jahren gezeigt hat, wie
nes Princip nicht die Grundlage eines wissenschaftlichen Gebäudes
in kann, als ferner Lagrange selbst in seiner Mécanique analy-
ique jenes Princip nicht weiter anwenden wollte, als endlich Cau-
ny das wahre Princip mit einer Wissenschaftlichkeit und Eleganz
stellte, welche ihm den Beifall aller wissenschaftlichen Mathe-
atiker verschaffte. Es war daher von Herrn Dr. Gerhardt sehr
rdienstlich, dass er die Sache in dem Archiv für Mathematik und
ysik (II. 2. 200.) zur Sprache gebracht hat und das wahre, ein-
ig wissenschaftliche Princip der Differenzialrechnung klar aus ein-
der setzte**); aber eben wegen der Wichtigkeit der Sache möchte
erlaubt sein, einen Vorwurf zu beseitigen, welcher einem der

---

*) Euler institutiones calculi differentialis.

**) An der Tübinger Universität wurde noch im Jahre 1842 folgende Preisr
ufgabe gegeben: „die Erfahrung lehrt, dass die Methode des Un-
endlichkleinen, selbstständig vorgetragen, für den Anfänger etwas seh-
Mysteriöses hat, und dass ihm, wenn auch dieses durch Gründung
derselben auf die Ableitungsmethode vermieden wird, die Sicherheit der
Anwendung in allen Fällen zweifelhaft erscheint, in welchen er nicht
im Stande ist, die Ableitungsmethode der Methode des Unendlichklei-
nen zu substituiren. Da nun die letztere, ihrer Kürze wegen, in den
Schriften über angewandte Mathematik die herrschende ist, ihre Ueber-
tragung in die Ableitungsmethode aber noch in manchen Fällen Schwie-
rigkeiten darbietet, so würde die Beseitigung dieser Schwierig-
keiten ein verdienstliches Werk sein. Die Fakultät macht daher das-
selbe zur Aufgabe mit dem Wunsche, dass bei Lösung derselben das
Lehrbuch der Mechanik von Poisson besonders berücksichtigt werde."
Diese Aufgabe, in einer Stadt gegeben, in der L'Huilier seine prin-
cipiorum calculi differentialis et integralis expositio ele-

grössten Mathematiker gemacht wird. Herr Dr. Gerhardt sagt nämlich pag. 202:

„Ohngeachtet dieser Vorgänge entbehrte doch noch das um diese „Zeit im Jahre 1755 abgefasste Lehrgebäude der Differenzialrechnung unseres unsterblichen **Euler** die feste Begründung durch „die Grenzmethode, aber er setzte, in der Ueberzeugung, dass vor „allen Dingen die so vagen unendlich kleinen Grössen aus der Differenzialrechnung entfernt werden müssten, mittelst eines **kühnen** „**Gewaltstreiches** dieselben $= 0$ und legte diesen Nullen einen „intensiven Werth bei. Nach seiner Meinung müsse man auf ihre „Entstehung Rücksicht nehmen, dann dürften sie auch, je nachdem „sie aus einer grössern oder kleinern Grösse entstanden wären, „einen **verschiedenen Werth** unter einander haben, obgleich „sie durch dasselbe Zeichen dargestellt würden. Diese **Annahme** „veranlasste aber bei der Bestimmung der Differenziale **vielfache** „**Schwierigkeiten**, zumal da Euler durch die Differenzenrechnung und mittelst der Entwickelung der Functionen in Reihen „dahin gelangen wollte, und in der That ist die **Dunkelheit** und „**Unverständlichkeit**, die in den ersten Capiteln der Euler'schen „Differenzialrechnung herrscht, eine **merkwürdige Erscheinung** für jeden, der mit der äusserst lichtvollen Darstellung „Eulers vertraut ist."

Es ist diese Ansicht über Eulers Differenzialrechnung nicht neu, denn schon im Jahre 1786 hat sich W. J. G. **Karsten** in seinen **mathematischen Abhandlungen**. Halle 1786. pag. 92 seq. veranlasst gesehen, gegen dieselbe zu schreiben. Wäre das Werk von Karsten der jetzigen Generation so bekannt als das Archiv, so könnte man einfach darauf verweisen, so aber wird es nicht unnöthig sein, an der Hand des Euler'schen Werkes das Irrige obiger Behauptung zu zeigen.

Euler eröffnet die Vorrede mit der Frage: quid sit calculus differentialis, atque in genere analysis infinitorum? Er beantworte diese Frage dahin: dass eine Antwort nicht möglich sei, so lange nicht bestimmte Begriffe vorher festgestellt seien, daher er zuerst die Begriffe von Function aus einander setzt. Ferner sei $y = x^2$ und x wachse um ω, so muss y um z wachsen, und es ist also $z = 2x\omega + \omega^2$, also $z : \omega = 2x + \omega : 1$. Ebenso kann man in allen andern Fällen beide Incremente vergleichen, ja sogar wenn w, also auch z wieder verschwinden, wo $z : w = 2x : 1$ sich verhalte. Jetzt erst gab Euler eine Antwort auf obige Frage; er sagt, die Differenzialrechnung, qui est methodus determinandi rationem incrementorum evanescentium, quae functiones quaecunque accipiunt, dum quantitati variabili, cujus sunt functiones, incrementum evanescens tribuitur. — Calculus igitur differentialis non tam in his ipsis incrementis evanescentibus, quippe quae sunt nulla, exquirendis, quam in eorum ratione ac proportione mutua scrutanda occupatur; et cum hae rationes finitis quantitatibus exprimantur, etiam

---

mentaris vor 49 Jahren und Bohnenberger seine **Anfangsgründe** der **höheren Analysis** vor 33 Jahren geschrieben hat, und welche den jetzigen Stand der Wissenschaft völlig ignorirt, daher vor 30 Jahren, aber nicht jetzt, an der Zeit gewesen wäre, konnte natürlich keine befriedigende Lösung erhalten, und der Verf., der sich mit der Lösung dieser Aufgabe abmühte, konnte nicht einmal eines Lobes theilhaftig werden

hic calculus circa quantitates finitas versari est censendus. Quamvis enim praecepta, uti vulgo tradi solent, ad ista incrementa evanescentia definienda videantur accomodata; nunquam tamen ex iis absolute spectatis, sed potius semper ex eorum ratione conclusiones deducuntur*). Die verschwindenden Incremente, fährt Euler fort, heissen Differenziale, auch unendlich kleine Grössen, die der Natur der Sache nach gleich 0 gesetzt werden müssen, was in einem Beispiel gezeigt wird, wobei aber Euler bemerkt, dass man ja nicht glauben müsse, die Differenzialrechnung gebe Regeln, die Differenziale zu finden, sondern nur ihre Verhältnisse, welche endliche Grössen seien. Cum autem hoc modo, qui solus est rationi consentaneus, principia calculi differentialis stabiliuntur, omnes obtrectationes, quae contra hunc calculum proferri sunt solitae, sponte corruunt; quae tamen summam vim retinerent, si differentialia seu infinite parva non plane annihilarentur. Pluribus autem, qui calculi differentialis praecepta tradidere, visum est differentialia a nihilo absoluto secernere, peculiaremque ordinem quantitatum infinite parvarum, quae non penitus evanescant, sed quantitatem quandam, quae quidem esset omni assignabili minor, retineant, constituere: his igitur jure est objectum, rigorem geometricum negligi et conclusiones inde deductas, propterea quod hujusmodi infinite parva negligerentur, merito esse suspectas: quantumvis enim exigua haec infinite parva concipiantur, tamen non solum singulis, sed etiam pluribus atque adeo innumerabilibus simul rejiciendis, errorem tandem inde enormem resultare posse**). Es zeigt nun Euler, dass der Sache durchaus nicht geholfen sei, wenn man die Uebereinstimmung der Resultate mit denen anführe, welche durch scharfe geometrische Schlüsse gefunden worden seien, denn ein Irrthum könne den andern nicht aufheben, vielmehr werde die Sache nur noch verdächtiger. Wenn die Differenzial- oder unendlich kleinen Grössen wirkliche Nullen seien, so entstehe allerdings die Frage, wie sie mit einander verglichen werden können, worüber Euler sagt: incrementum quantitatis x, quod in genere indicavimus per ω, ad incrementum quadrati x^2, quod est $2x\omega + \omega^2$, rationem habet ut 1 ad $2x + \omega$, quae semper differt a ratione 1 ad $2x$, nisi sit $\omega = 0$; at si statuamus esse $\omega = 0$, tum demum vere affirmare possumus hanc rationem fieri exacte ut 1 ad $2x$. Interim tamen perspicitur, quo minus illud incrementum ω accipiatur, eo propius ad hanc rationem accedi; unde non solum licet, sed etiam naturae rei convenit, haec incrementa primum ut finita considerare, atque etiam in figuris, si quibus opus est ad rem illustrandam, finite repraesentare; deinde vero haec incrementa cogitatione continuo minora fieri concipiantur, sicque eorum ratio continuo magis ad certum quendam limitem appropinquare reperietur, quem autem tum demum attingant, cum plane in nihilum abierint. Hic autem limes, qui quasi rationem ultimam incrementorum illorum constituit, verum est objectum calculi differentialis; cujus igitur prima fundamenta is jecisse existimandus est cui primum in mentem venit, has rationes ultimas, ad quas quantitatum variabilium incrementa, dum continuo magis diminuuntur, appropinquant, et cum evanescunt, tum demum attingunt, contemplari***).

---

*) Pag. VIII. und IX.
**) Pag. XI.
***) Pag. XIV.

Diese Sätze, welche Euler noch weiter ausführt, sind ebe
lichtvoll geschrieben als alles andere, was aus der Euler'schen
der geflossen ist; sie geben dem III. Cap. der inst. calcul diff.
ganz anderes Aussehen, als es ohne dieselben hat; denn wenn je
Euler die Differentiale $= 0$ setzt, wenn er denselben verschied
Werthe beilegt, so hat er deutlich gesagt, auf welche Art diess
verstehen sei, nirgends ist ein „Gewaltstreich"; die Dunk
heiten und Unverständlichkeiten in dem ersten Capitel
Eulerschen Werkes verschwinden, so wie die Vorrede genau s
dirt ist. Der einzige Vorwurf möchte Euler gemacht werden k
nen, dass er das, was er in der Vorrede gesagt hat, nicht
den Anfang des III. Cap. gesetzt hat; denn die Vorrede wird häu
entweder gar nicht oder nur oberflächlich gelesen, und desweg
wurde Euler von so vielen missverstanden und manches für dun
und unverständlich gehalten, was klar ist, so wie man die in
Vorrede erklärten Begriffe mitbringt.

XIII.

Ueber einige merkwürdige bestimmte Integral

Von

Herrn Doctor O. Schlömilch,

Privatdocenten an der Universität zu Jena.

Von dem berühmten Fourier'schen Theoreme:

$$\int_0^\infty \cos \alpha u du \int_0^\infty f(t) \cos ut dt = \frac{\pi}{2} f(\alpha), \quad \alpha \geqq 0 \quad (1)$$

$$\int_0^\infty \sin \alpha u du \int_0^\infty f(t) \sin ut dt = \frac{\pi}{2} f(\alpha), \quad \alpha > 0 \quad (2)$$

lässt sich bekanntlich eine wichtige Anwendung zur Entdeckun
bestimmter Integrale machen. Wählt man nämlich die Function
so, dass sich die jedesmalige erste Integration nach t, nämlich

$$\int_0^\infty f(t) \cos ut dt \quad \text{oder} \int_0^\infty f(t) \sin ut dt,$$

in welcher u als Constante figurirt, ausführen lässt, so bleibt no
eine zweite Integration übrig, für welche α als constant, u als ve
änderlich angesehen wird. Diese lässt sich sehr oft nicht bewer

gen, aber man kennt schon ihren Werth, nämlich $\frac{\pi}{2}f(\alpha)$, und iese Weise gelangt man zur Kenntniss eines bestimmten Inles, das man nicht leicht auf anderem Wege finden würde. der einfachsten und bekanntesten Annahmen dieser Art ist $f(\alpha) = \overset{-\alpha}{e}$. Man hat dann

$$\int_0^\infty f(t)\cos ut\,dt = \int_0^\infty \overset{-t}{e}\cos ut\,dt = \frac{1}{1+u^2},$$

$$\int_0^\infty f(t)\sin ut\,dt = \int_0^\infty \overset{-t}{e}\sin ut\,dt = \frac{u}{1+u^2};$$

durch Substitution in die Gleichungen (1) und (2):

$$\int_0^\infty \frac{\cos \alpha u}{1+u^2}du = \frac{\pi}{2}\overset{-\alpha}{e}, \quad \alpha \geqq 0 \quad (3)$$

$$\int_0^\infty \frac{u\sin \alpha u}{1+u^2}du = \frac{\pi}{2}\overset{-\alpha}{e}, \quad \alpha > 0 \quad (4)$$

wenn man $\alpha\beta$ für α setzt und $u = \frac{x}{\beta}$ nimmt:

$$\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{\beta^2+x^2}dx = \frac{\pi}{2\beta}\overset{-\alpha\beta}{e}, \quad \alpha \geqq 0 \quad (5)$$

$$\int_0^\infty \frac{x\sin \alpha x}{\beta^2+x^2}dx = \frac{\pi}{2}\overset{-\alpha\beta}{e}, \quad \alpha > 0. \quad (6)$$

leicht man hier zu diesen wichtigen Integralen gelangt ist, so wer schien es, die Werthe der ähnlich gebildeten Integrale

$$\int_0^\infty \frac{u\cos \alpha u}{1+u^2}du \text{ und } \int_0^\infty \frac{\sin \alpha u}{1+u^2}du$$

fzufinden, wenigstens ist dieses Problem bisher ungelöst geblie-. Es kommt offenbar bloss darauf an, eine Function f zu fin-, welche die Eigenschaft hat, dass

$$\int_0^\infty f(t)\cos ut\,dt = \frac{ku}{1+u^2} \quad (7)$$

r auch

$$\int_0^\infty f(t)\sin ut\,dt = \frac{k}{1+u^2} \quad (8)$$

wobei k einen constanten Factor bedeutet. Dergleichen Funcn nun sind folgende:

$$f(t) = e^{+t}\,\mathrm{li}(e^{-t}) + e^{-t}\,\mathrm{li}(e^{+t}), \text{ für Gleichung (7)}$$

$$f(t) = e^{+t}\,\mathrm{li}(e^{-t}) - e^{-t}\,\mathrm{li}(e^{+t}), \text{ für Gleichung (8)}$$

i das Zeichen li den Integrallogarithmus bezeichnen soll. Da Definition dieser Transscendenten selbst durch ein bestimmtes

Integral gegeben ist, so werden obige Substitutionen für $f(t)$ in den Gleichungen (7) und (8) eine doppelte Integration nöthig machen. Diese würde unter Anwendung der gewöhnlichen Formel für den Integrallogarithmus besondere Schwierigkeiten darbieten, die sich aber gänzlich vermeiden lassen, wenn man den Integrallogarithmus in eine andere Form bringt.

I.

Die Definition des Integrallogarithmus liegt bekanntlich in der Gleichung:

$$li.x = \int_0^x \frac{dx}{lx} \text{ oder } li.p = \int_0^p \frac{dx}{lx}.$$

Nimmt man hier $x = py$, so wird $y = 1$, $y = 0$, wenn $x = p$ und $x = 0$ geworden ist. Ferner ist dann $dx = pdy$, $lx = lp + lx$, folglich

$$li.p = p \int_0^1 \frac{dy}{lp + ly}.$$

Für $y = \overset{-z}{e}$ wird ferner $z = 0$ und $z = \infty$, sobald y die Werthe 1 und 0 angenommen hat, mithin

$$li.p = -p \int_\infty^0 \frac{dz}{lp - z} \overset{-z}{e} = +p \int_0^\infty \frac{dz}{lp - z} \overset{-z}{e}.$$

Für $p = e^{-t}$, $p = e^{+t}$ wird hieraus

$$li(e^{-t}) = -e^{-t} \int_0^\infty \frac{dz}{t + z} e^{-z},$$

$$li(e^{+t}) = +e^{+t} \int_0^\infty \frac{dz}{t - z} e^{-z}.$$

Setzt man endlich $z = tx$, so ist

$$e^{+t}\, li(e^{-t}) = -\int_0^\infty \frac{dx}{1 + x} e^{-tx} \quad (9)$$

$$e^{-t}\, li(e^{+t}) = +\int_0^\infty \frac{dx}{1 - x} e^{-tx} \quad (10).$$

Mit Hülfe dieser Formeln wollen wir uns nun an die Untersuchung der Integrale

$$\int_0^\infty [e^{+t}\, li(e^{-t}) + e^{-t}\, li(e^{+t})] \cos ut\, dt$$

und

$$\int_0^\infty [e^{+t}\, li(e^{-t}) - e^{t}\ \ li(e^{+t})] \sin ut\, dt$$

machen.

II.

Aus Formel (9) folgt durch Multiplication mit $\cos utdt$ und Integration zwischen den Gränzen $t=0$, $t=\infty$:

$$\int_0^\infty e^{+t}\, li(e^{-t}) \cos utdt = -\int_0^\infty \cos utdt \int_0^\infty \frac{dx}{1+x} e^{-tx}.$$

Da es aber in einem bestimmten Doppelintegrale mit zwei Veränderlichen gleichgültig ist, nach welcher Veränderlichen zuerst integrirt wird, so können wir im vorliegenden Falle die Integrationen in umgekehrter Ordnung verrichten und zuerst nach t integriren. Es wird dann

$$\int_0^\infty e^{+t}\, li(e^{-t}) \cos utdt = -\int_0^\infty \frac{dx}{1+x} \int_0^\infty e^{-xt} \cos utdt$$

$$= -\int_0^\infty \frac{dx}{1+x} \cdot \frac{x}{u^2+x^2}. \quad (11)$$

Die noch übrige Integration nach x hat nicht die mindeste Schwierigkeit. Es ist nämlich

$$\frac{1}{1+x} \cdot \frac{x}{u^2+x^2}$$

$$= \frac{1}{1+u^2} \left[-\frac{1}{1+x} + \frac{x}{u^2+x^2} + \frac{u^2}{u^2+x^2} \right],$$

folglich

$$\int \frac{dx}{1+x} \cdot \frac{x}{u^2+x^2}$$

$$= \frac{1}{1+u^2} \left[-l(1+x) + \tfrac{1}{2} l(u^2+x^2) + u \operatorname{Arctan} \frac{x}{u} \right] + \text{Const.}$$

Bemerkt man, dass

$$-l(1+x) + \tfrac{1}{2} l(u^2+x^2) = l \frac{\sqrt{u^2+x^2}}{1+x} = l \frac{\sqrt{\frac{u^2}{x^2}+1}}{\frac{1}{x}+1}$$

ist, folglich für $x=\infty$:

$$-l(1+x) + \tfrac{1}{2} l(u^2+x^2) = l(1) = 0$$

und

$$\operatorname{Arctan} \frac{x}{u} = \frac{\pi}{2}$$

wird, so ergiebt sich für $x=\infty$, $x=0$:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x} \cdot \frac{x}{u^2+x^2} = \frac{1}{1+u^2} \left[u\frac{\pi}{2} - lu \right]$$

und die Substitution in die Gleichung (11)

$$\int_0^\infty e^{+t}\, li(e^{-t}) \cos ut\,dt = -\frac{\pi}{2}\cdot\frac{u}{1+u^2} + \frac{lu}{1+u^2}. \quad (12)$$

Etwas Aehnliches erhält man aus Formel (10) durch Multiplicatio mit $\cos ut dt$ und Integration zwischen den Gränzen $t=0$, $t=\infty$ nämlich

$$\int_0^\infty e^{-t}\, li(e^{+t}) \cos ut\,dt = \int_0^\infty \cos ut\,dt \int_0^\infty \frac{dx}{1-x} e^{-tx}$$
$$= \int_0^\infty \frac{dx}{1-x} \int_0^\infty e^{-xt} \cos ut\,dt$$
$$= \int_0^\infty \frac{dx}{1-x}\cdot\frac{x}{u^2+x^2}. \quad (13)$$

Es ist aber

$$\frac{1}{1-x}\cdot\frac{x}{u^2+x^2}$$
$$= \frac{1}{1+u^2}\left[\frac{1}{1-x} + \frac{x}{u^2+x^2} - \frac{u^2}{u^2+x^2}\right],$$

folglich

$$\int \frac{dx}{1-x}\cdot\frac{x}{u^2+x^2}$$
$$= \frac{1}{1+u^2}\left[\int\frac{dx}{1-x} + \tfrac{1}{2}l(u^2+x^2) - u \text{ Arctan } \frac{x}{u}\right] + \text{Const.}$$

Die erste Integration ist noch nicht ausgeführt, weil sie zwei verschiedene Werthe giebt. Es wird nämlich für $x > 1$

$$\int\frac{dx}{1-x} = -\int\frac{dx}{x-1} = -l(x-1),$$

folglich

$$\int \frac{dx}{1-x}\cdot\frac{x}{u^2+x^2}$$
$$= \frac{1}{1+u^2}\left[l\frac{\sqrt{u^2+x^2}}{x-1} - u \text{ Arctan } \frac{x}{u}\right] + \text{Const.}$$

und für $x < 1$

$$\int\frac{dx}{1-x} = -l(1-x),$$

folglich

$$\int \frac{dx}{1-x}\cdot\frac{x}{u^2+x^2}$$
$$= \frac{1}{1+u^2}\left[l\frac{\sqrt{u^2+x^2}}{1-x} - u \text{ Arctan } \frac{x}{u}\right] + \text{Const.}$$

Der ersten Form bedienen wir uns für $x=\infty$, der zweiten für x Wir bekommen dann

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1-x}\cdot\frac{x}{u^2+x^2}=\frac{1}{1+u^2}\left(-u\frac{\pi}{2}-lu\right),$$

lglich durch Substitution in die Gleichung (13):

$$\int_0^\infty e^{-t}\,li(e^{+t})\cos ut\,dt=-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{u}{1+u^2}-\frac{lu}{1+u^2}. \quad (14)$$

ırch Addition und Subtraction der Gleichungen (12) und (14) ergebt sich jetzt:

$$\int_0^\infty [e^{+t}\,li(e^{-t})+e^{-t}\,li(e^{+t})]\cos ut\,dt=-\frac{\pi u}{1+u^2} \quad (15)$$

$$\int_0^\infty [e^{+t}\,li(e^{-t})-e^{-t}\,li(e^{+t})]\cos ut\,dt=+\frac{2lu}{1+u^2}. \quad (16)$$

immt man jetzt in der Gleichung (1)

$$f(t)=e^{+t}\,li(e^{-t})+e^{-t}\,li(e^{+t})$$

nd auch

$$f(t)=e^{+t}\,li(e^{-t})-e^{-t}\,li(e^{+t})$$

nd substituirt die Integrale (15) und (16), so erhält man auf der Stelle:

$$\int_0^\infty \frac{u\cos\alpha u}{1+u^2}du=-\tfrac{1}{2}[e^{\alpha}\,li(e^{-\alpha})+e^{-\alpha}\,li(e^{+\alpha})] \quad (17)$$

$$\int_0^\infty \frac{lu.\cos\alpha u}{1+u^2}du=\frac{\pi}{4}[e^{\alpha}\,li(e^{-\alpha})-e^{-\alpha}\,li(e^{-\alpha})]. \quad (18)$$

III.

Durch Multiplication der Gleichung (9) mit $\sin ut\,dt$ und Integration zwischen den Gränzen $t=0$ und $t=\infty$ ergiebt sich

$$\int_0^\infty e^{+t}\,li(e^{-t})\sin ut\,dt=-\int_0^\infty \sin ut\,dt\int_0^\infty\frac{dx}{1+x}e^{-tx}$$

$$=-\int_0^\infty\frac{dx}{1+x}\int_0^\infty e^{-xt}\sin ut\,dt$$

$$=-u\int_0^\infty\frac{dx}{1+x}\cdot\frac{1}{u^2+x^2}. \quad (19)$$

ist aber

$$\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{u^2+x^2}$$

$$=\frac{1}{1+u^2}\left[\frac{1}{1+x}-\frac{x}{u^2+x^2}+\frac{1}{u^2+x^2}\right],$$

hin

$$\int \frac{dx}{1+x} \cdot \frac{1}{u^2+x^2}$$

$$= \frac{1}{1+u^2} [l(1+x) - \tfrac{1}{2}l(u^2+x^2) + \frac{1}{u} \text{ Arctan } \frac{x}{u}] + \text{Const.},$$

woraus sich für $x = \infty$, $x = 0$ leicht findet:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x} \cdot \frac{1}{u^2+x^2} = \frac{1}{1+u^2} [\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{u} + lu],$$

folglich aus Gleichung (19)

$$\int_0^\infty e^{+t} \text{li}(e^{-t}) \sin ut dt = -\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{1+u^2} - \frac{ulu}{1+u^2}. \quad (20)$$

Aus der Gleichung (10) folgt ferner durch Multiplication mit $\sin ut dt$ und Integration zwischen den Gränzen $t = 0$, $t = \infty$:

$$\int_0^\infty e^{-t}\, li(e^{+t}) \sin ut\, dt = \int_0^\infty \sin ut dt \int_0^\infty \frac{dx}{1-x} e^{-tx}$$

$$= \int_0^\infty \frac{dx}{1-x} \int_0^\infty e^{-xt} \sin ut dt$$

$$= u \int_0^\infty \frac{dx}{1-x} \cdot \frac{1}{u^2+x^2}. \quad (21)$$

Es ist aber

$$\frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{u^2+x^2}$$

$$= \frac{1}{1+u^2} \left[\frac{1}{1-x} + \frac{x}{u^2+x^2} + \frac{1}{u^2+x^2}\right],$$

mithin durch Integration:

$$\int \frac{dx}{1-x} \cdot \frac{1}{u^2+x^2}$$

$$= \frac{1}{1+u^2} [-l(x-1) + \tfrac{1}{2}l(u^2+x^2) + \frac{1}{u} \text{ Arctan } \frac{x}{u}], \text{ für } x > 1$$

$$= \frac{1}{1+u^2} [-l(1-x) + \tfrac{1}{2}l(u^2+x^2) + \frac{1}{u} \text{ Arctan } \frac{x}{u}], \text{ für } x < 1.$$

Bedient man sich der ersten Formel für $x = \infty$, der zweiten für $x = 0$, so erhält man leicht

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1-x} \cdot \frac{1}{u^2+x^2} = \frac{1}{1+u^2} [\frac{1}{u} \cdot \frac{\pi}{2} - lu],$$

mithin nach Gleichung (21)

$$\int_0^\infty e^{-t}\, li(e^{+t}) \sin ut dt = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{1+u^2} - \frac{ulu}{1+u^2}. \quad (22)$$

Durch Subtraction und Addition der Gleichungen (20) und (22) ergeben sich jetzt folgende Integrale:

$$\int_0^\infty [e^{+t}\,li(e^{-t}) - e^{-t}\,li(e^{+t})] \sin ut\,dt = -\frac{\pi}{1+u^2} \quad (23)$$

$$\int_0^\infty [e^{+t}\,li(e^{-t}) + e^{-t}\,li(e^{+t})] \sin ut\,dt = -\frac{2ulu}{1+u^2}. \quad (24)$$

hmen wir nun in der Gleichung (2) einmal

$$f(t) = e^{+t}\,li(e^{-t}) - e^{-t}\,li(e^{+t})$$

d dann

$$f(t) = e^{+t}\,li(e^{-t}) + e^{-t}\,li(e^{+t}),$$

erhält man auf der Stelle:

$$\int_0^\infty \frac{\sin\,\alpha u}{1+u^2}\,du = -\tfrac{1}{2}[e^{+\alpha}\,li(e^{-\alpha}) - e^{-\alpha}\,li(e^{+\alpha})] \quad (25)$$

$$\int_0^\infty \frac{u\,lu\,\sin\,\alpha u}{1+u^2}\,du = -\frac{\pi}{4}[e^{+\alpha}\,li(e^{-\alpha}) + e^{-\alpha}\,li(e^{+\alpha})]. \quad (26)$$

se Formeln entsprechen ganz den unter (17) und (18) darge-llten. Man kann auch (17) aus (25) dadurch ableiten, dass man letztere Gleichung partiell nach α differenziirt und auf gleiche se die Formel (26) aus der in (18).

Setzt man nun in den Integralen (17) und (26) $u = \frac{x}{\beta}$ und ibt $\alpha\beta$ für α, so ergeben sich die folgenden:

$$\int_0^\infty \frac{x\,\cos\,\alpha x}{\beta^2+x^2}\,dx = -\tfrac{1}{2}[e^{+\alpha\beta}\,li(e^{-\alpha\beta}) + e^{-\alpha\beta}\,li(e^{+\alpha\beta})] \quad (27)$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin\,\alpha x}{\beta^2+x^2}\,dx = -\frac{1}{2\beta}[e^{+\alpha\beta}\,li(e^{-\alpha\beta}) + e^{-\alpha\beta}\,li(e^{+\alpha\beta})]. \quad (28)$$

man für den Integrallorithmus Tafeln besitzt, wie für die Lo-ithmen und trigonometrischen Functionen, so sind jetzt die obi-Integrale als völlig entwickelt und bekannt anzusehen.

Nimmt man auch in den Gleichungen (18) und (26) $u = \frac{x}{\beta}$, $\alpha\beta$ für α und bemerkt, dass $l\frac{x}{\beta} = lx - l\beta$ ist, so erhält man Anwendung der Formeln (5) und (6) die folgenden Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^\infty \frac{lx\,.\cos\,\alpha x}{\beta^2+x^2}\,dx \\ &= \frac{\pi}{2\beta} l\beta\,.\,e^{-\alpha\beta} + \frac{\pi}{4\beta}[e^{+\alpha\beta}\,li(e^{-\alpha\beta}) - e^{-\alpha\beta}\,li(e^{+\alpha\beta})] \end{aligned}\right\} \quad (29)$$

$$\left.\begin{array}{l}\int_0^\infty \frac{xlx \,.\, \sin \alpha x}{\beta^2 + x^2} dx \\ = \frac{\pi}{2} l\beta \,.\, e^{-\alpha\beta} - \frac{\pi}{4} [e^{+\alpha\beta} li(e^{-\alpha\beta}) + e^{-\alpha\beta} li(e^{+\alpha\beta})]\end{array}\right\} \quad (30)$$

welche ebenso wenig bekannt zu sein scheinen, als die Form (27) und (28).

XIV.

Geodätische Aufgabe.

Von

dem Herausgeber.

Wenn man in drei ihrer Lage nach gegebenen Pun ten A, A_1, A_2 die 180° nicht übersteigenden Winkel ge messen hat, welche die von den Punkten A, A_1, A_2 nach dem seiner Lage nach unbekannten Punkte M gezoge nen Gesichtslinien AM, A_1M, A_2M mit drei von de Punkten A, A_1, A_2 aus nach derselben Seite hin gez genen einander parallelen Linien*) einschliessen: so soll man die Lage dieser Parallelen und die Lage de Punktes M bestimmen.

Man bezeichne die bekannten rechtwinkligen Coordinaten d Punkte A, A_1, A_2 respective durch a, b; a_1, b_1; a_2, b_2; die g suchten rechtwinkligen Coordinaten des Punktes M durch x, y und setze der Kürze wegen $AM = \varrho$, $A_1M = \varrho_1$, $A_2M = \varrho_2$. Ferner bezeichne man die von den Linien AM, A_1M, A_2M u von den aus den Punkten A, A_1, A_2 gezogenen Parallelen mit d Richtung der positiven ersten Coordinaten eingeschlossenen W kel, indem man diese Winkel von der Richtung der positiven e sten Coordinaten an durch den Coordinatenwinkel hindurch von bis 360° zählt, respective durch φ, φ_1, φ_2 und ω; so hat man fenbar die folgenden Gleichungen:

$$x = a + \varrho \cos \varphi, \quad y = b + \varrho \sin \varphi;$$

$$x = a_1 + \varrho_1 \cos \varphi_1, \quad y = b_1 + \varrho_1 \sin \varphi_1;$$

$$x = a_2 + \varrho_2 \cos \varphi_2, \quad y = b_2 + \varrho_2 \sin \varphi_2;$$

---

*) Etwa mit der einen Hälfte des magnetischen Meridians.

kann, wie sogleich erhellen wird, die Werthe der Differenzen $\varphi-\omega$, $\varphi_1-\omega$, $\varphi_2-\omega$ immer leicht aus den gemessenen Winkeln ...en, weshalb man diese Differenzen als bekannt zu betrachten ...chtigt ist. Bezeichnen wir nun die aus den gemessenen Win... sich ergebenden Werthe der Differenzen $\varphi-\omega$, $\varphi_1-\omega$, $\varphi_2-\omega$ durch α, α_1, α_2, und nehmen an, dass diese Werthe, wie ... u. A. bei Messungen mit der Boussole der Fall sein könnte, ...mtlich mit einem und demselben constanten Fehler Θ behaftet ..., so dass nämlich $\alpha+\Theta$, $\alpha_1+\Theta$, $\alpha_2+\Theta$ die richtigen Wer... der in Rede stehenden Differenzen sind; so ist

$$\varphi-\omega=\alpha+\Theta,\quad \varphi=\alpha+\omega+\Theta;$$
$$\varphi_1-\omega=\alpha_1+\Theta,\quad \varphi_1=\alpha_1+\omega+\Theta;$$
$$\varphi_2-\omega=\alpha_2+\Theta,\quad \varphi_2=\alpha_2+\omega+\Theta;$$

...lich nach dem Obigen

$$=a+\varrho\cos(\alpha+\omega+\Theta),\quad y=b+\varrho\sin(\alpha+\omega+\Theta);$$
$$=a_1+\varrho_1\cos(\alpha_1+\omega+\Theta),\quad y=b_1+\varrho_1\sin(\alpha_1+\omega+\Theta);$$
$$=a_2+\varrho_2\cos(\alpha_2+\omega+\Theta),\quad y=b_2+\varrho_2\sin(\alpha_2+\omega+\Theta);$$

...raus sich

$$\operatorname{tang}(\alpha+\omega+\Theta)=\frac{y-b}{x-a},$$
$$\operatorname{tang}(\alpha_1+\omega+\Theta)=\frac{y-b_1}{x-a_1},$$
$$\operatorname{tang}(\alpha_2+\omega+\Theta)=\frac{y-b_2}{x-a_2}$$

...iebt. Diese Gleichungen bringt man aber leicht auf die Form

$$x\sin(\alpha+\omega+\Theta)\quad-y\cos(\alpha+\omega+\Theta)$$
$$=a\sin(\alpha+\omega+\Theta)\quad-b\cos(\alpha+\omega+\Theta),$$
$$x\sin(\alpha_1+\omega+\Theta)\quad-y\cos(\alpha_1+\omega+\Theta)$$
$$=a_1\sin(\alpha_1+\omega+\Theta)-b_1\cos(\alpha_1+\omega+\Theta),$$
$$x\sin(\alpha_2+\omega+\Theta)\quad-y\cos(\alpha_2+\omega+\Theta)$$
$$=a_2\sin(\alpha_2+\omega+\Theta)-b_2\cos(\alpha_2+\omega+\Theta);$$

...erhält aus denselben durch Elimination von x und y die Glei...ng:

$$\{\sin(\alpha_1+\omega+\Theta)\cos(\alpha_2+\omega+\Theta)-\cos(\alpha_1+\omega+\Theta)\sin(\alpha_2+\omega+\Theta)\}$$
$$\{a\sin(\alpha+\omega+\Theta)-b\cos(\alpha+\omega+\Theta)\}$$
$$+\{\sin(\alpha_2+\omega+\Theta)\cos(\alpha+\omega+\Theta)-\cos(\alpha_2+\omega+\Theta)\sin(\alpha+\omega+\Theta)\}$$
$$\{a_1\sin(\alpha_1+\omega+\Theta)-b_1\cos(\alpha_1+\omega+\Theta)\}$$
$$+\{\sin(\alpha+\omega+\Theta)\cos(\alpha_1+\omega+\Theta)-\cos(\alpha+\omega+\Theta)\sin(\alpha_1+\omega+\Theta)\}$$
$$\{a_2\sin(\alpha_2+\omega+\Theta)-b_2\cos(\alpha_2+\omega+\Theta)\}:$$

d. i.

$$\begin{aligned}0 = \ & \sin(\alpha_1 - \alpha_2)\{a \sin(\alpha + \omega + \Theta) - b \cos(\alpha + \omega + \Theta)\} \\ & + \sin(\alpha_2 - \alpha)\{a_1 \sin(\alpha_1 + \omega + \Theta) - b_1 \cos(\alpha_1 + \omega + \Theta) \\ & + \sin(\alpha - \alpha_1)\{a_2 \sin(\alpha_2 + \omega + \Theta) - b_2 \cos(\alpha_2 + \omega + \Theta)\end{aligned}$$

Setzt man der Kürze wegen

$$\begin{aligned}K = \ & \sin(\alpha_1 - \alpha_2)(a \sin\alpha - b \cos\alpha) \\ & + \sin(\alpha_2 - \alpha)(a_1 \sin\alpha_1 - b_1 \cos\alpha_1) \\ & + \sin(\alpha - \alpha_1)(a_2 \sin\alpha_2 - b_2 \cos\alpha_2),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}L = \ & \sin(\alpha_1 - \alpha_2)(a \cos\alpha + b \sin\alpha) \\ & + \sin(\alpha_2 - \alpha)(a_1 \cos\alpha_1 + b_1 \sin\alpha_1) \\ & + \sin(\alpha - \alpha_1)(a_2 \cos\alpha_2 + b_2 \sin\alpha_2);\end{aligned}$$

so ist, wie sogleich erhellen wird:

$$K \cos(\omega + \Theta) + L \sin(\omega + \Theta) = 0,$$

also

$$\tang(\omega + \Theta) = -\frac{K}{L}.$$

Berechnet man die Hülfsgrössen $\mu, \lambda; \mu_1, \lambda_1; \mu_2, \lambda_2$ auf bekan[nte] Weise mittelst der Formeln

$$\begin{aligned}a &= \mu \cos\lambda, & b &= \mu \sin\lambda; \\ a_1 &= \mu_1 \cos\lambda_1, & b_1 &= \mu_1 \sin\lambda_1; \\ a_2 &= \mu_2 \cos\lambda_2, & b_2 &= \mu_2 \sin\lambda_2;\end{aligned}$$

so ist

$$\begin{aligned}K = \ & \mu \sin(\alpha_1 - \alpha_2)\sin(\alpha - \lambda) \\ & + \mu_1 \sin(\alpha_2 - \alpha)\sin(\alpha_1 - \lambda_1) \\ & + \mu_2 \sin(\alpha - \alpha_1)\sin(\alpha_2 - \lambda_2),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}L = \ & \mu \sin(\alpha_1 - \alpha_2)\cos(\alpha - \lambda) \\ & + \mu_1 \sin(\alpha_2 - \alpha)\cos(\alpha_1 - \lambda_1) \\ & + \mu_2 \sin(\alpha - \alpha_1)\cos(\alpha_2 - \lambda_2);\end{aligned}$$

mittelst welcher Formeln die Grössen K und L ohne Schwierig[keit] berechnet werden können.

Zwischen ϱ und ϱ_1 hat man nach dem Obigen die Gleichun[gen]

$$\begin{aligned}\varrho \cos(\alpha + \omega + \Theta) - \varrho_1 \cos(\alpha_1 + \omega + \Theta) &= a_1 - a, \\ \varrho \sin(\alpha + \omega + \Theta) - \varrho_1 \sin(\alpha_1 + \omega + \Theta) &= b_1 - b;\end{aligned}$$

aus denen sich

$$\varrho = \frac{(a_1 - a)\sin(\alpha_1 + \omega + \Theta) - (b_1 - b)\cos(\alpha_1 + \omega + \Theta)}{\sin(\alpha_1 - \alpha)},$$

oder, wenn man die Hülfsgrössen k und i mittelst der Formeln

$$a_1 - a = k\cos i,\; b_1 - b = k\sin i$$

berechnet:

$$\varrho = k\frac{\sin(\alpha_1 - i + \omega + \Theta)}{\sin(\alpha_1 - \alpha)}$$

ergiebt. Hat man aber auf diese Weise ϱ gefunden, so erhält man die Coordinaten x und y leicht mittelst der Formeln

$$x = a + \varrho\cos(\alpha + \omega + \Theta),\; y = b + \varrho\sin(\alpha + \omega + \Theta);$$

und dann ϱ_1 und ϱ_2 mittelst der Formeln

$$\varrho_1 = \frac{x - a_1}{\cos(\alpha_1 + \omega + \Theta)} = \frac{y - b_1}{\sin(\alpha_1 + \omega + \Theta)},$$

$$\varrho_2 = \frac{x - a_2}{\cos(\alpha_2 + \omega + \Theta)} = \frac{y - b_2}{\sin(\alpha_2 + \omega + \Theta)}.$$

Auch hat man nach dem Obigen zur Bestimmung von x und y die Gleichungen

$$x\sin(\alpha + \omega + \Theta) - y\cos(\alpha + \omega + \Theta) = \mu\sin(\alpha - \lambda + \omega + \Theta),$$

$$x\sin(\alpha_1 + \omega + \Theta) - y\cos(\alpha_1 + \omega + \Theta) = \mu_1\sin(\alpha_1 - \lambda_1 + \omega + \Theta),$$

$$x\sin(\alpha_2 + \omega + \Theta) - y\cos(\alpha_2 + \omega + \Theta) = \mu_2\sin(\alpha_2 - \lambda_2 + \omega + \Theta);$$

aus denen sich u. A.

$$x = \frac{\mu\sin(\alpha - \lambda + \omega + \Theta)\cos(\alpha_1 + \omega + \Theta) - \mu_1\sin(\alpha_1 - \lambda_1 + \omega + \Theta)\cos(\alpha + \omega + \Theta)}{\sin(\alpha - \alpha_1)},$$

$$y = \frac{\mu\sin(\alpha - \lambda + \omega + \Theta)\sin(\alpha_1 + \omega + \Theta) - \mu_1\sin(\alpha_1 - \lambda_1 + \omega + \Theta)\sin(\alpha + \omega + \Theta)}{\sin(\alpha - \alpha_1)}$$

ergiebt.

Da ϱ immer eine positive Grösse sein muss, so kann, wie leicht erhellen wird, nie ein Zweifel bleiben, wie man den Winkel $\omega + \Theta$ zu nehmen hat, wenn man denselben mittelst der Formel

$$\tan(\omega + \Theta) = -\frac{K}{L}$$

berechnet. Weitere Bemerkungen über die obige Auflösung können wir füglich dem Leser überlassen.

XV.

Remarques faites à l'occasion du No. XIII. T. IV. p. 113. de ce journal.

Par
Monsieur Ubbo H. Meyer
de Groningue.

Dans l'article cité M. le rédacteur a communiqué une équation générale de M. Bertrand qui sert à trouver la valeur de l'intégrale défini

$$\int_0^x \frac{l(1+x\omega)}{1+\omega^2} d\omega.$$

Cette équation est la suivante

$$(1) \quad \int_a^x f(\omega,x)d\omega = \int_a^x \varphi(x)dx + \int_a^x \varphi_2(x)dx$$

dans laquelle $\varphi(x)$ signifie ce que devient $f(x,\omega)$ lorsqu'on écrit x au lieu de ω, et $\varphi_2(\omega)$ ce que devient $\int_a^x \frac{d.f(x,\omega)}{d\omega} dx$ en mettant x au lieu de ω après la differentiation et l'intégration. Sans ce long avertissement la formule (1) n'a aucune signification et ce serait donc un grave inconvénient si cette équation ne pourrait s'exprimer d'une manière plus simple. Or on verra avec peu d'attention qu'elle n'est autre chose qu'un cas particulier du principe de la différentiation sous le signe intégral.

En effet, soient a et b des fonctions de x et en désignant pour plus de commodité la dérivée $\frac{d.F(x)}{dx}$ d'une fonction quelconque $F(x)$ par $d_x F(x)$, on a en général

$$(2) \quad d_x \int_a^b f(\omega,x)d\omega = f(b,x)d_x b - f(a,x)d_x a + \int_a^b d_x f(\omega,x)d\omega$$

d'où l'on tire en particulier, en faisant $b = x$ et a indépendant de x:

$$(3) \quad d_x \int_a^x f(\omega,x)d\omega = f(x,x) + \int_a^x d_x f(\omega,x)d\omega.$$

Maintenant si l'on fait

$$d_x f(\omega,x) = f'(\omega,x)$$

n aura

$$(4)\quad d_\omega f(x,\omega) = f'(x,\omega)$$

t

$$(5)\quad \int_a^x d_x f(\omega,x) d\omega = \int_a^x f'(\omega,x) d\omega.$$

ais on voit sans peine que l'on aura

$$(6)\quad \int_a^x f'(\omega,x) d\omega = \left[\int_a^x f'(x,\omega)\, dx\right]_{\omega=x}$$

n admettant que le dernier membre signifie qu'il faut changer ω n x dans l'expression $\int_a^x f'(x,\omega)dx$ après l'intégration.

Il suit donc de (5) et (6)

$$\int_a^x d_x f(\omega,x) d\omega = \left[\int_a^x f'(x,\omega)\, dx\right]_{\omega=x}$$

u d'après (4)

$$\int_a^x d_x f(\omega,x) d\omega = \left[\int_a^x d_\omega f(x,\omega) dx\right]_{\omega=x}$$

ce qui change (3) en

$$(7)\quad d_x \int_a^x f(\omega,x) d\omega = f(x,x) + \left[\int_a^x d_\omega f(x,\omega)\, dx\right]_{\omega=x}.$$

Or $f(x,x)$ est le même que ce qu'on a exprimé par $\varphi(x)$ dans la formule (1) et $\left[\int_a^x d_\omega f(x,\omega) dx\right]_{\omega=x}$ est le même que $\varphi_2(x)$ dans cette formule. Donc d'après cette notation la formule (4) ou (7) se réduit à

$$d_x \int_a^x f(\omega,x)\, d\omega = \varphi(x) + \varphi_2(x),$$

et en intégrant par rapport à x entre les limites $x = a$ et $x = x$ il s'ensuit

$$\int_a^x f(\omega,x) d\omega - \int_a^a f(\omega,a) d\omega = \int_a^x \varphi(x) dx + \int_a^x \varphi_2(x) dx,$$

et puisque $\int_a^a f(\omega,a) d\omega$ est évidemment égal à zero

$$\int_a^x f(\omega,x) d\omega = \int_a^x \varphi(x) dx + \int_a^x \varphi_2(x) dx.$$

Il résulte de ce qui précède que l'équation de M. Bertrand n'est qu'un cas particulier de l'intégrale de la formule qui sert à différentier sous le signe intégral les intégrales définies par rapport à une variable dont les limites sont des fonctions, et que par conséquent toutes les conséquences que l'on en peut faire se déduiront

aussi de la formule équivalente (3) et a fortiori de la formule gé-
nérale (2).

Ainsi pour trouver la valeur de l'intégrale définie

$$(8)\quad y=\int_0^x \frac{l(1+x\omega)}{1+\omega^2}d\omega$$

l'on différentie par rapport à x, et la formule (3) donne

$$(9)\ d_xy=\frac{l(1+x^2)}{1+x^2}+\int_0^x d_x\frac{l(1+x\omega)}{1+\omega^2}d\omega=\frac{l(1+x^2)}{1+x^2}+\int_0^x\frac{\omega d\omega}{(1+\omega^2)(1+x\omega)}$$

mais on a

$$\frac{\omega}{(1+\omega^2)(1+x\omega)}=\frac{1}{1+x^2}\left(\frac{x}{1+\omega^2}+\frac{\omega}{1+\omega^2}-\frac{x}{1+x\omega}\right)$$

d'où

$$\int_0^x\frac{\omega d\omega}{(1+\omega^2)(1+x\omega)}=\frac{1}{1+x^2}(x.\text{arctan}.x+\tfrac{1}{2}l(1+x^2)-l(1+x^2))$$

En substituant cette valeur dans (9) on obtient

$$2d_xy=\frac{l(1+x^2)}{1+x^2}+\frac{2x.\text{arctan}.x}{1+x^2}$$

équation que l'on peut écrire sous la forme

$$2d_xy=l(1+x^2)d_x\ \text{arctan}.x+\text{arctan}.xd_xl.(1+x^2)$$
$$=d_x[l(1+x^2).\text{arctan}.x]$$

et en intégrant par rapport à x:

$$2y=l(1+x^2).\text{arctan}.x+C.$$

La quantité C indépendante de x est d'après (8) égale à zéro.
Donc on a

$$\int_0^x\frac{l(1+x\omega)}{1+\omega^2}d\omega=\tfrac{1}{2}l(1+x^2).\text{arctan}.x.$$

Quant à la formule

$$\int_a^x\psi(x)F(x)dx=\psi(x)\int_a^xF(x)dx-\int_a^x(d_x\psi(x)\int_a^xF(x)dx)dx$$

que l'on a déduite de l'équation (1) et la quelle offre une extension
du principe de l'intégration par partie, elle s'obtient de même de l'é-
quation (3), mais l'équation (2) nous donne la formule plus générale

$$(10)\quad \int_u^v \psi(x)F(x)\,dx = \psi(v)\int_a^v F(x)dx - \psi(u)\int_a^u F(x)dx - \int_u^v (d_x\psi x \int_a^x F(x)dx)dx$$

u et v désignant des fonctions quelconques de x et a une constante. Cependant on n'a pas besoin de transformer (2) pour obtenir la formule précédente, parcequ'on y parviendra immédiatement au moyen de la formule connue:

$$d_x[\psi(x)\varphi(x)] = \psi(x)d_x\varphi(x) + d_x\psi(x)\,.\,\varphi(x).$$

Car en intégrant entre les limites u et v par rapport à x, on aura

$$\int_u^v d_x[\psi(x)\varphi(x)]dx = \int_u^v \psi(x)d_x\varphi(x)dx + \int_u^v d_x\psi(x)\,.\,\varphi(x)dx;$$

mais

$$\int_u^v d_x[\psi(x)\varphi(x)]dx = \psi(v)\varphi(v) - \psi(u)\varphi(u),$$

d'où

$$\psi(v)\varphi(v) - \psi(u)\varphi(u) = \int_u^v \psi x d_x\varphi(x)dx + \int_u^v d_x\psi(x)\varphi(x)dx.$$

Posons

$$\varphi(x) = \int_a^x F(x)dx,$$

on aura

$$\varphi(v) = \int_a^v F(x)dx,\ \varphi(u) = \int_a^u F(x)dx \text{ et } d_x\varphi(x) = F(x);$$

par conséquent

$$\psi(v)\int_a^v F(x)dx - \psi(u)\int_a^u F(x)dx = \int_u^v \psi(x)F(x)dx + \int_u^v (d_x\psi(x)\int_a^x F(x)dx)dx.$$

En renversant les termes on obtient la formule (10), par laquelle l'on intègre par parties entre des limites quelconques.

XVI.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Aufgaben aus den Cambridge problems, proposed by the moderators to the candidates for mathematical honors at the general examination 1842—43 und 1843.

Man soll beweisen, dass die Summe eines Bruchs und seines reciproken Werths immer grösser als 2 ist.

Man soll beweisen, dass, wenn Θ den von den Diagonalen eines Parellelogramms, dessen Seiten a, b unter dem Winkel α gegen einander geneigt sind, eingeschlossenen Winkel bezeichnet, jederzeit

$$\tang \Theta = \frac{2ab \sin \alpha}{a^2 - b^2} = \frac{2ab \sin \alpha}{(a+b)(a-b)}$$

ist.

Wenn

$$\cos \Theta^2 = \frac{\cos \alpha}{\cos \beta},\ \cos \Theta_1{}^2 = \frac{\cos \alpha_1}{\cos \beta},\ \frac{\tang \Theta}{\tang \Theta_1} = \frac{\tang \alpha}{\tang \alpha_1}$$

ist, so ist immer

$$\tang \tfrac{1}{2}\alpha \tang \tfrac{1}{2}\alpha_1 = \tang \tfrac{1}{2}\beta.$$

Wenn E und F die Punkte bezeichnen, in denen die Seiten AC und AB eines Dreiecks von den auf sie von den gegenüberstehenden Spitzen B und C gefällten Perpendikeln getroffen werden, so ist immer

$$BC^2 = AB.BF + AC.CE.$$

Wenn a, b, c die Seiten und A, B, C die gegenüberstehenden Winkel eines ebenen Dreiecks sind, und r den Halbmesser des um dieses Dreieck beschriebenen Kreises bezeichnet, so ist immer

$$a \cos A + b \cos B + c \cos C = 4r \sin A \sin B \sin C.$$

Wenn die Sinus der Winkel eines ebenen Dreiecks eine arithmetische Progression bilden, so bilden auch jederzeit die Cotangenten der halben Winkel dieses Dreiecks eine arithmetische Progression.

Wenn A, B, C und A', B', C' Punkte in der Peripherie eines Kreises, und die Linien AB, AC den Linien $A'B'$, $A'C'$ beziehungsweise parallel sind, so sind auch jederzeit die Linien BC' und $B'C$ einander parallel.

Ein rechtwinkliges Dreieck durch eine auf seiner Hypotenuse senkrecht stehende Linie zu halbiren.

Wenn zwei Kreise, deren Halbmesser a und b sind, sich von Aussen berühren, und Θ den von zwei gemeinschaftlichen Berührungslinien dieser beiden Kreise eingeschlossenen Winkel bezeichnet, so ist immer

$$\sin\Theta = \frac{4(a-b)\sqrt{ab}}{(a+b)^2}.$$

Wenn die Zahl n sich in q Quadrate zerlegen lässt, so lässt die Zahl $2(q-1)n$ sich immer in $q(q-1)$ Quadrate zerlegen.

Die stereographische Projection eines Cubus auf einer auf seiner Diagonale senkrecht stehenden Ebene ist, wenn das Auge sich in der verlängerten Diagonale befindet, ein gleichseitiges Sechseck. Befindet sich das Auge in einer der Diagonale gleichen Entfernung von dem Cubus, so verhalten sich die Sinus zweier einander benachbarten Winkel dieses Sechsecks wie 8 : 5 zu einander.

Ein leuchtender Punkt befindet sich in der grossen Axe einer Ellipse in der Entfernung u vom Mittelpunkte; man soll beweisen, dass die Entfernung u_x des Bildes nach der $x$ten Reflexion vom Mittelpunkte durch die Gleichung

$$\frac{ae-(-1)^x u_x}{ae+(-1)^x u_x} = \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^{\pm 2x} \cdot \frac{ae-u}{ae+u}$$

gefunden wird.

Sätze von den Kegelschnitten, welche zu beweisen sind.

Von Herrn Fr. Seydewitz, Oberlehrer am Gymnasium zu Heiligenstadt.

Nennt man eine jede Sehne eines Kegelschnittes, welche durch einen Brennpunkt geht, eine Brennsehne, und je zwei solche zu einander rechtwinklige Sehnen zwei zugeordnete Brennsehnen desselben, so hat man die Sätze:

1. In jeder Ellipse und Parabel ist die Summe, und in jeder Hyperbel ist die Summe oder der Unterschied der reciproken Werthe der Stücke, in welche eine Brennsehne durch den Brennpunkt zerlegt wird, jenachdem letztere innerhalb oder ausserhalb der Hyperbel liegt, constant, und zwar viermal so gross als der reciproke Werth des Parameters.

2. In jeder Parabel ist die Summe der reciproken Werthe je zweier zugeordneter Brennsehnen gleich dem reciproken Werthe des Parameters, in jede'r Ellipse gleich der Summe der reciproken Werthe des Parameters und der Hauptachse, und in jeder Hyperbel ist, wenn beide Brennsehnen innerhalb oder beide ausserhalb derselben liegen, die Summe; dagegen, wenn die eine innerhalb, die andere ausserhalb liegt, der Unterschied ihrer re-

ciproken Werthe gleich dem Unterschiede der reciproken Werthe des Parameters und der Hauptachse.

3. In jeder Parabel ist die Summe der reciproken Werthe der Rechtecke zwischen den durch den Brennpunkt bestimmten Abschnitten je zweier zugeordneter Brennsehnen dem reciproken Werthe des Quadrates des halben Parameters, in jeder Ellipse der Summe der reciproken Werthe der Quadrate des halben Parameters und der halben Nebenachse, und in jeder Hyperbel ist, wenn beide Brennsehnen innerhalb oder beide ausserhalb liegen, die Summe; dagegen, wenn die eine innerhalb, die andere ausserhalb liegt, der Unterschied jener reciproken Werthe dem Unterschiede der reciproken Werthe der Quadrate des halben Parameters und der halben Nebenachse gleich.

4. In jeder gleichseitigen Hyperbel sind je zwei zugeordnete Brennsehnen von gleicher Länge, und die Rechtecke zwischen ihren durch den Brennpunkt bestimmten Abschnitten von gleichem Inhalte.

5. Die Summe der reciproken Werthe der Quadrate über den vier Abschnitten, in welche je zwei zugeordnete Brennsehnen im Brennpunkte getheilt werden, ist für die Parabel 24mal so gross als der reciproke Werth des Quadrates des Parameters, und für die Ellipse oder Hyperbel 24mal so gross als der reciproke Werth des Quadrates des Parameters, weniger oder mehr dem Doppelten des Quadrates der halben Nebenachse.

6. In jeder Ellipse ist die Summe, und in jeder Hyperbel ist der Unterschied der Rechtecke zwischen zwei Paar Zuglinien, welche von beiden Brennpunkten nach den Endpunkten zweier zugeordneter Durchmesser gezogen werden, von unveränderlichem Inhalt, und zwar der Summe oder dem Unterschiede der Quadrate der halben Achsen gleich.

XVII.

Miscellen.

In Schumachers astronomischen Nachrichten No. 491. S. 171. hat Herr Professor Anger zu Danzig die folgende interessante Bemerkung mitgetheilt.

Wenn man unter dem Höhendreieck eines Dreiecks das Dreieck versteht, welches durch Verbindung der Fusspunkte der drei Höhen des gegebenen Dreiecks durch gerade Linien entsteht, so giebt es

rischen dem Radius des um das gegebene Dreieck beschriebenen reises, dem Radius des in dasselbe beschriebenen Kreises, dem adius des in das Höhendreieck beschriebenen Kreises, und den ei Winkeln des gegebenen Dreiecks eine merkwürdige Relation. zeichnet man nämlich den Radius des um ein Dreieck beschrie- n Kreises durch R, den Radius des in dasselbe beschriebenen reises durch r, den Radius des in sein Höhendreieck eingeschrie- enen Kreises durch ϱ, so ergeben sich die Cosinusse der drei Vinkel des gegebenen Dreiecks durch die Auflösung der folgenden ubischen Gleichung:

$$\cos^3\alpha - \left(1 + \frac{r}{R}\right)\cos^2\alpha + \frac{r^2 + 2Rr + R\varrho}{2R^2}\cos\alpha = \frac{\varrho}{R}.$$

Herr Professor Anger bemerkt noch, dass sich viele interessante rigonometrische Sätze aus dieser Gleichung ableiten lassen, die wegen ihrer einfachen Form einige Aufmerksamkeit zu verdienen cheine.

G.

Eine Rechnungsspielerei

zur Sprache gebracht von Herrn Professor Hessel in Marburg.

Bei der bekannten Aufgabe, nach welcher man die Zahlen 1 bis 9 so in ein aus 9 Feldern bestehendes quadratisches Täfel- chen wie $\begin{Bmatrix} abc \\ def \\ ghi \end{Bmatrix}$ einschreiben soll, dass die Summen $a+b+c$, $d+e+f$, $g+h+i$, $a+d+g$, $b+e+h$, $c+f+i$, $a+e+i$, $c+e+g$ gleich gross werden, ist $e=5$, z. B. $\begin{Bmatrix} 438 \\ 951 \\ 276 \end{Bmatrix}$.

Man ändere nun vorstehende Aufgabe dahin ab, dass gefordert wird, es soll $a+b+c=d+e+f=g+h+i=a+d+g$ $=b+e+h=c+f+i=a+e+i$ aber verschieden von $c+e+g$, und e eine von 5 verschiedene Zahl sein.

Auszug aus einem Briefe des Herrn G. D. E. Weyer, Assistenten an der Sternwarte zu Hamburg, an den Herausgeber.

Die von Gerling, Hansen, Clausen, so wie von Euer etc. t bearbeitete geodätische Aufgabe gehört nach meiner Meinung len einfachen und nützlichen Problemen, die beim ersten An-

blick die Auflösung zu fliehen scheinen. So findet sich die leichtere umgekehrte Aufgabe z. B. fast in allen Navigationsbüchern, während die gegenwärtige wohl mit demselben Rechte einen Platz darin verdiente, indem die unsichere Messung einer Standlinie auf dem Wasser dabei wegfällt und zugleich die magnetische Declination des Compasses (mit Einschluss der Lokalattraction) bestimmt wird. Ich sehe solche Aufgaben gerne historisch nachgewiesen. Hier ist ein Beitrag dazu aus William Payne's Elements of Trigonometrie, London 1772:

Having the distance of two objects A and B (Taf. II. Fig. 9.) with the angles observed at the stations C and D; it is required to find the distance between the stations C and D. — Construction. Upon AB describe segments of circles that will contain the given angles ACB, ADB, make the angle $ABE = ADC$, draw AE, upon AE describe a segment of a circle $AFCE$, that will contain the supplement of the angle ACD, cutting the circle ACB in C, draw ECD, and the thing is evidently done. — Calculation. In the triangle CDA are given all the angles, and by taking CD at pleasure (suppose 1000) we may find CA etc.

Noch einige Aufgaben.

1. Wenn die Mittelpunkte A, B, C dreier Kreise in einer geraden Linie liegen, und die Kreise B und C den Kreis A von Innen, sich selbst von Aussen berühren, so ist immer der ausserhalb der Kreise B und C liegende Theil der Area des Kreises A der Area des über der die beiden Kreise B und C berührenden Sehne des Kreises A beschriebenen Halbkreises gleich.

2. Die Seiten eines ebenen Dreiecks seien den Wurzeln der Gleichung

$$x_3 + ax_2 + bx + c = 0$$

proportional: man soll die Summe der Cosinus der Winkel dieses Dreiecks finden.

3. Aus drei gegebenen Punkten als Mittelpunkten drei sich gegenseitig berührende Kreise zu beschreiben.

XVIII.

Theorie der involutorischen Gebilde nebst Anwendungen auf die Kegelschnitte.

Von

Herrn Fr. Seydewitz,

Oberlehrer am Gymnasium zu Heiligenstadt.

(Fortsetzung des Aufsatzes No. XXX. im dritten Hefte des vierten Theils.)

ber das Wesen und die Eigenschaften der einem Sy- me von Kegelschnitten gemeinschaftlichen Sekanten und Tangentendurchschnitte.

§. 5.

wei in einer Ebene beliebig liegende Kegelschnitte.

Steht durch unmittelbare Anschauung fest, dass eine Ellipse d irgend ein anderer Kegelschnitt, welche in einer bene beliebig liegen, wenn sie einen Punkt gemein ben, ohne sich in ihm zu berühren, nothwendig einen eiten, und wenn einen dritten, nothwendig einen erten Punkt gemein haben müssen, so zeigt man das näm- che von zwei beliebigen Kegelschnitten, indem man alle ihre nkte mit einem beliebigen Punkte des Raumes durch Gerade ver- det und die so erhaltenen Kegel mit einer Ebene schneidet, wel- einer durch den gemeinsamen Scheitel gehenden und einen der gelschnitte weder schneidenden noch berührenden Ebene parallel Und hieraus schliesst man dann, dass zwei beliebige Kegel- te, welche eine Tangente gemein haben, ohne sich selbst derselben zu berühren, nothwendig eine zweite u. s. w. ge-

mein haben müssen, weil die Polar-Kegelschnitte derselben in B
zug auf einen beliebigen dritten *) einen Punkt und folglich z
Punkte gemein haben.

Es seien nun in einer Ebene zwei Kegelschnitte K, K_1 v
beliebiger Gestalt und Lage gegeben; es sei A eine beliebige G
rade dieser Ebene, und B, B_1 die harm. Pole von A für K, K
Ferner seien $a, b, c, d \ldots.$ und $a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots.$ der Reihe n
und beziehlich die harm. Polaren der Punkte $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots.$ von
für K, K_1, und die Punkte B, B_1 mit $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots.$ durch
Strahlen $a', b', c', d' \ldots.$; $a'_1, b'_1, c'_1, d'_1 \ldots.$ verbunden; so s
je zwei Strahlen a, a'; $b, b' \ldots.$ für K, und a_1, a'_1; $b_1, b'_1 \ldots$
für K_1 zug. harmonische Polaren. Man hat also nach §. 4. 1.
jeden der Punkte B, B_1 zwei involutorische, a potiori also proj
tivische Strahlbüschel B und B', B_1 und B'_1, von denen überdi
B' und B'_1 perspektivisch sind, nämlich:

$$B(a, b, c, d \ldots.) = B'(a', b', c', d' \ldots.) \equiv A(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots.)$$
$$\equiv B'_1(a'_1, b'_1, c'_1, d'_1 \ldots.) = B_1(a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots.),$$

also ist auch

$$B(a, b, c, d \ldots.) = B_1(a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots.).$$

1. Die harmonischen Polaren aller Punkte einer beliebigen Geraden in Bezug auf zwei in einer Ebene beliebig liegende Kegel-

1. Die harmonischen P aller Strahlen eines bel bigen Punktes in Bezug zwei in einer Ebene bel big liegende Kegelschni

---

*) Sind nämlich K, K_1 zwei beliebige Kegelschnitte, $A, A_1, \alpha, \beta, \gamma, \delta$
Tangenten von K_1, und B, B_1 $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0 \ldots.$ die harmonischen P
derselben für K; sind ferner $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots.$ und $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1 \ldots.$
Durchschnittspunkte von A und A_1 mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots.$, und a, b, c, d
und $a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots.$ die Strahlen, welche beziehlich B und B_1
$\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0 \ldots.$ verbinden, so sind $a, b, c, d \ldots.$ der Reihe nach
harmonischen Polaren von $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots.$, und $a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots.$ die h
monischen Polaren von $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1 \ldots.$ für K; also sind die Pun
$\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}', \mathfrak{d}' \ldots.$, wo A die $a, b, c, d \ldots.$ schneidet, die zugeordneten h
monischen Pole von $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots.$, und die Durchschnittspunkte $\mathfrak{a}'_1$,
$\mathfrak{c}'_1, \mathfrak{d}'_1 \ldots.$ von A_1 mit $a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots.$ sind die zug. harm. Pole
$\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1 \ldots.$ Nun aber ist nach §. 4. 1. und Einleitung 11.

$$B(a, b, c, d \ldots.) \equiv A'(\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}', \mathfrak{d}' \ldots.) = A(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots.) = A_1(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1$$
$$= A'_1(\mathfrak{a}'_1, \mathfrak{b}'_1, \mathfrak{c}'_1, \mathfrak{d}'_1) \equiv B_1(a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots.);$$

also auch $B(a, b, c, d \ldots.) = B_1(a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots.)$, d. h. die harm
schen Pole der Tangenten von K_1 für K liegen auf einem dritten
gelschnitte K_2. Ist nun e_1 die Tangente in B_1, so ist e die Ver
dungslinie von B und B_1, $\mathfrak{e}$ der gegenseitige Durchschnitt von A
A_1, $\mathfrak{e}_1$ der Berührungspunkt von A_1, also sind auch die harmonis
Polaren aller Punkte von K_2 für K Tangenten von K_1. Haben
zwei Kegelschnitte eine Tangente gemein, so ist der harmonische
derselben für K ein gemeinschaftlicher Punkt ihrer Polar-Kegelsch
für K, und die harmonischen Polaren der beiden gemeinschaftli
Punkte der letzteren sind gemeinschaftliche Tangenten der ersteren

..te schneiden sich ...eise auf dem Umfange ... dritten Kegelschnit- ...elcher auch die beiden ...nischen Pole jener ...en enthält.	liegen paarweise auf den Tangenten eines dritten Kegelschnitts, welcher auch die beiden harmonischen Polaren jenes Punktes berührt.*)

... $\mathfrak{a}_1$ der gegenseitige Durchschnitt der harmonischen Polaren ... so ist auch $\mathfrak{a}$ der gegenseitige Durchschnitt der harmoni- ...Polaren von $\mathfrak{a}_1$ für K, K_1; daher nennt Herr Poncelet sol- ...ei Punkte $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1$ reciproke oder Wechselpunkte in Bezug ... K_1, und in demselben Sinne sollen zwei Gerade, deren jede ...monischen Pole der anderen in Bezug auf K, K_1 enthält, ...selstrahlen; ferner soll der Kegelschnitt, dessen sämmtli- ...nkte mit denen einer Geraden A Paare von Wechselpunk- ...len, der Wechselpunkt-Kegelschnitt dieser Geraden, ...ner, dessen sämmtliche Tangenten mit den Strahlen eines ...s Paare von Wechselstrahlen bilden, der Wechselstrah- ...egelschnitt dieses Punktes — in Bezug auf K, K_1 —

...e Wechselpunkt-Kegelschnitte zweier verschiedenen Geraden ... in Bezug auf K, K_1 haben nothwendig einen Punkt $\mathfrak{q}_1$, ... den Wechselpunkt ihres Durchschnittes $\mathfrak{q}$ gemein. a) Be- ...sie sich nun nicht in diesem Punkte $\mathfrak{q}_1$, so haben sie noth- ... einen zweiten Punkt p gemein; die harmonischen Polaren ...Punktes p convergiren sowohl auf A als auf A', ohne durch ...gehen; also fallen sie in eine einzige Gerade P zusammen; ... diese Gerade nun jede Gerade der Ebene in einem Punkte ...let, dessen harmonische Polaren für K, K_1 durch p gehen, ...en die Wechselpunkt-Kegelschnitte aller Geraden für K, K_1 ...nkt p gemein. b) Berühren sie sich in $\mathfrak{q}_1$, so seien R, R' ...rmonischen Polaren von $\mathfrak{q}_1$, die also durch $\mathfrak{q}$ gehen müssen; ... B' der harmonische Pol von R' für K, B_1 der harmonische ...n R für K_1, und es heisse $\mathfrak{q}_1$ als harmonischer Pol von R ... und von R' für K_1 beziehlich B, B_1. Denkt man sich nun ...echselpunkt-Kegelschnitte von R und R', und erwägt, dass ...eraden BB', $B_1B'_1$ die harmonischen Polaren von $\mathfrak{q}$ für K, ...ind, und dass in den projektivischen Strahlbüscheln B, B_1 ...B'_1), welche den Wechselpunkt-Kegelschnitt von $R(R')$ er-...n, die Tangente in $B(B'_1)$ dem gemeinschaftlichen Strahle ...($B'B'_1$) entspricht, so sieht man, dass die Geraden B_1B und ... jede den anderen Kegelschnitt in $\mathfrak{q}_1$ berühren. Bildeten ...n eine gemeinschaftliche Tangente, so hätte der Punkt $\mathfrak{q}$ für ...d K_1 einerlei harmonische Polare; wo aber nicht, so hätte ... neue Paar von Wechselpunkt-Kegelschnitten einen zweiten ... p gemein, welcher für K und K_1 einerlei harmonische Po-...laben und sämmtlichen Wechselpunkt-Kegelschnitten gemein-...lich angehören müsste.

... Sind in einer Ebene zwei Kegelschnitte von be-

---

*) ... die beiderseitigen Betrachtungen dem Wesen nach allemal eins sind, ... wird man die eine jedesmal gern erlassen.

liebiger Gestalt und Lage gegeben, so giebt es in d
Ebene allemal

einen Punkt p, dessen harmonische Polaren in Bezug auf beide Kegelschnitte in eine einzige Gerade P zusammenfallen.

eine Gerade P', deren monische Pole in Bezu beide Kegelschnitte si einem Punkte p verein

Dieser Punkt p liegt nun entweder 1) innerhalb b Kegelschnitte K, K_1, oder 2) innerhalb des einen und serhalb des anderen, oder 3) ausserhalb beider. un sen Fällen entsprechend wird die Gerade P entweder keine beiden, oder nur einen, oder beide durchschneiden. Die Invo nen zug. harmonischer Polaren des Punktes p in Bezug auf K K_1 bestehen nach §. 4. 1. im Falle 1) beide aus gleic genden, im Falle 2) die eine aus gleichliegenden, andere aus ungleichliegenden, im Falle 3) beide au gleichliegenden Gebilden; daher haben sie nach §. 3. Falle 1) und 2) allemal ein Paar zugeordnete Strahlen P_1, P mein, im Falle 3) aber nur dann, wenn die beiden von p a henden Tangentenpaare sich ein- oder ausschliessen. Diese den P_1, P_2 haben die Eigenschaft, dass eine jede die harmoni Pole der anderen für K, K_1 enthält, Pole, welche übrigens auf P liegen müssen; also schneidet eine jede die P in Punkte p_2, p_1, der in Bezug auf K und K_1 der harmonisch der anderen (P_2, P_1) ist. Von den beiden Involutionen zug monischer Pole, welche einer dieser Geraden, z. B. P ange sind zwei jener drei Punkte p, p_1, p_2, also hier p_1, p_2, ein zug. Paar; bedenkt man also, dass p_1, p_2 beide ausserhalb Kegelschnittes $K(K_1)$ liegen müssen, wenn p in demselben dass der eine innerhalb, der andere ausserhalb, wenn p auss desselben liegt, so ergeben sich als die einzigen Lagen, der Punkte p, p_1, p_2 in den genannten drei Fällen fähig sind gende:

1ster und 3ter Fall.

p innerhalb K und innerhalb K_1;
p_1 ausserhalb K und ausserhalb K_1;
p_2 ausserhalb K und ausserhalb K_1;

2ter und 3ter Fall.

p innerhalb K und ausserhalb K_1;
p_1 ausserhalb K und ausserhalb K_1;
p_2 ausserhalb K und innerhalb K_1;

wo jeder der drei Punkte mit den anderen verwechselt w kann.

Offenbar aber muss von zwei beliebigen Kegelschnitten entweder a) der eine ganz innerhalb des anderen oder

jeder ganz ausserhalb des anderen, oder c) zum Theil innerhalb, zum Theil ausserhalb des anderen liegen. Im Falle a) können von den früheren drei Fällen nur 1) und 3) eintreten; denn läge p innerhalb des äusseren und ausserhalb des inneren Kegelschnittes, so würde p_1 oder p_2 ausserhalb des äusseren und innerhalb des inneren liegen müssen, was unmöglich ist. Tritt aber der Fall 3) ein, d. h. liegt der einzelne Punkt p, den zwei Kegelschnitte allemal besitzen, ausserhalb des inneren und des äusseren, so schneidet die Gerade P beide in zwei Punktenpaaren, welche sich einschliessen; also existiren die Punkte p_1, p_2 im Falle a) allemal. Im Falle b) ist der Fall 1) nicht denkbar, und da im Falle 3) die Gerade P die Kegelschnitte in zwei Punktenpaaren schneidet, die sich ausschliessen, so existiren auch im Falle b) die Punkte p_1, p_2 unbedingt. Im Falle c) endlich haben die Kegelschnitte, da Berührungspunkte ausgeschlossen sind, entweder vier oder nur zwei Punkte gemein. Ist das erstere, so bilden die vier Punkte ein vollständiges Viereck, dessen Gegenseiten sich offenbar in drei Punkten p, p_1, p_2 schneiden. Demnach kann der Umstand, dass zwei Kegelschnitte nur einen einzigen Punkt p in ihrer Ebene besitzen, einzig nur dann statt finden, wenn sie bloss zwei Punkte gemein haben. Und zwar findet er dann nothwendig statt; denn sonst könnte man einen jeden der gemeinschaftlichen Punkte a, b, z. B. a, mit einem der Punkte p, p_1, p_2, z. B. mit p_1, durch eine Gerade ap_1 verbinden, welche nicht in die Richtung ab fiele, und die folglich jeden der Kegelschnitte K, K_1 in einem zweiten Punkte c, c_1 schneiden müsste; dann aber würde P_1, als harmonische Polare von p_1 für K, K_1, die ap_1 in einem Punkte schneiden, welcher sowohl zu a, c, p_1 als zu a, c_1, p_1 der vierte harmonische, dem p_1 zugeordnete Punkt wäre, was unmöglich ist, da c und c_1 nicht zusammenfallen sollen.

Ebenso zeigt man, dass zwei Kegelschnitte, welche nur zwei Tangenten gemein haben, auch nur eine Gerade P, und folglich auch nur einen Punkt p besitzen. Hieraus folgt dann, dass sie allemal und nur zwei Punkte gemein haben, und umgekehrt: Haben zwei Kegelschnitte nur zwei Punkte gemein, so haben ihre Polar-Kegelschnitte in Bezug auf irgend einen dritten nur zwei Tangenten, also auch nur zwei Punkte, also die ursprünglichen allemal und nur zwei Tangenten gemein.

3. Haben zwei in einer Ebene beliebig liegende Kegelschnitte

nur zwei Punkte gemein, so haben sie allemal und nur zwei Tangenten gemein.	nur zwei Tangenten gemein, so haben sie allemal und nur zwei Punkte gemein.

4. Zwei in einer Ebene beliebig liegende Kegelschnitte haben allemal drei zugeordnete harmonische Pole und drei zugeordnete harmonische Polaren gemein, wenn sie einerseits entweder keinen oder vier Durchschnittspunkte, oder wenn sie andererseits entweder keine oder vier Tangenten gemein haben, und zwar a) wenn einer der Kegelschnitte ganz innerhalb des anderen liegt, so liegen zwei jener drei Pole ausser-

halb, der dritte innerhalb beider, und zwei jener dre Polaren schneiden beide, die dritte keinen; b) wen ein jeder Kegelschnitt ganz ausserhalb des andere liegt, so liegt einer der drei Pole ausserhalb beide und in jedem der Kegelschnitte liegt einer der beide anderen; eine der drei Polaren schneidet beide, un jede der beiden anderen nur einen, nämlich denjenigen welchen die andere nicht schneidet; und c) wenn si sich in vier Punkten durchdringen, so liegen die dre Pole und Polaren entweder wie im Falle a) oder wie i Falle b). Haben sie endlich nur zwei Durchschnitts punkte oder Tangenten gemein, so giebt es in ihre Ebene nur einen, aber allemal einen Punkt, dessen har monische Polaren in Bezug auf beide zusammenfallen und dieser Punkt liegt ausserhalb beider.

Man sieht leicht voraus, dass die Punkte p, p_1, p_2 und di Geraden P, P_1, P_2 ganz eigenthümliche Eigenschaften in sich ve einigen werden. Denn diese Geraden allein sind es, deren Wech selpunkt-Kegelschnitte sich auf einen Punkt, und jene Punkte a lein sind es, deren Wechselstrahlen-Kegelschnitte sich auf ein Gerade reduciren.

Es sei A ein beliebiger Strahl eines dieser Punkte, z. B. p so liegen seine beiden harmonischen Pole B, B_1 auf P, und di oben betrachteten projektivischen Strahlbüschel B, B_1, deren en sprechende Strahlenpaare $a, b, c, d \dots; a_1, b_1, c_1, d_1 \dots$ sich i den Wechselpunkten von A schneiden, sind jetzt offenbar perspect visch, weil die harmonischen Polaren von p, d. h. zwei entspre chende Strahlen von B, B_1 in eine Gerade BB_1 zusammenfallen.

Der Wechselpunkt-Kegelschnitt von A geht also jetzt in e System zweier Geraden über, deren eine (P) die harmonischen Po von A, die andere die Wechselpunkte von A enthält; und zw ist letztere selbst ein Strahl von p, weil die harmonischen Polare des Durchschnittes von A und P durch p gehen müssen. Aehnl cher Weise geht der Wechselstrahlen-Kegelschnitt eines Punkte von P in ein System zweier Punkte über, deren einer (p) die ha monischen Polaren jenes Punktes, der andere die Wechselstrahle desselben enthält, und dieser liegt auch auf P.

Zwei Strahlen eines Punktes p, p_1, p_2, deren Punkte paa weise Wechselpunkte sind, sollen zwei Wechselpunktstrah len, und zwei Punkte einer Geraden P, P_1, P_2, deren Strahl paarweise Wechselstrahlen bilden zwei Wechselstrahlenpunk heissen.

Aus dem Vorigen ergiebt sich eine lineäre Construktion d Punktes p, wenn K, K_1 und ein beliebiger Strahl von p gegeb sind.

Es sei jetzt A eine beliebige Gerade, und B, B_1 seien i harmonischen Pole für K, K_1; durch p seien die Strahlen a, b, $d \dots$ gezogen, welche A in $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \dots$ schneiden, und du denselben Punkt nach den Wechselpunkten $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1 \dots$ v $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \dots$ die Strahlen $a_1, b_1, c_1, d_1 \dots$; endlich werde ent der B oder B_1 mit $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \dots$ und $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1 \dots$ durch Strahlen $a', b', c', d' \dots$ und $a'_1, b'_1, c'_1, d'_1 \dots$ verbunden; so einmal

$$p(a, b, c, d \dots) \equiv B(a', b', c', d' \dots),$$

odann

$$B(a', b', c', d' \ldots) = B(a'_1, b'_1, c'_1, d'_1 \ldots),$$

veil die Strahlenpaare a', a'_1; b', b'_1 ...., als zugeordnete harmo-ische Polaren für K, eine Involution bilden; endlich ist

$$B(a'_1, b'_1, c'_1, d'_1 \ldots) = p(a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots),$$

veil die Punkte p, B, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$ .... auf dem Wechselpunkt-Kegelschnitte von A liegen. Demnach ist auch

$$p(a, b, c, d \ldots) = p(a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots).$$

ber je zwei Strahlen a, a_1; b, b_1; .... sind Wechselpunktstrahlen; es ind also nicht nur ein Punkt $\mathfrak{a}$, wo a die A, und ein Punkt $\mathfrak{a}_1$, o a_1 den Wechselpunkt-Kegelschnitt schneidet, sondern auch in Punkt, wo a_1 die A, und ein Punkt, wo a den Wechselpunkt-Kegelschnitt schneidet, sind Wechselpunkte von einander, d. h. die trahlen a, a_1 entsprechen sich in doppeltem Sinne; also ist

$$(a, b, c, d \ldots\, a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots) = p(a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots\, a, b, c, d \ldots);$$

. h. die Wechselpunktstrahlen eines Punktes p, p_1, p_2 ir K, K_1 bilden eine Involution von Strahlen; und glei-her Weise bilden die Wechselstrahlenpunkte einer Ge-aden P, P_1, P_2 eine Involution von Punkten.

Die Hauptstrahlen einer Involution von Wechselpunktstrahlen ollen Hauptwechselpunktstrahlen, und die Hauptpunkte einer volution von Wechselstrahlenpunkten sollen Hauptwechsel-trahlenpunkte heissen. In jedem der ersteren fallen zwei Wech-elpunktstrahlen, in jedem der letzteren zwei Wechselstrahlenpunkte usammen; jener besitzt also die charakteristische Eigen-chaft, dass die Wechselpunkte aller seiner Punkte au-hm selber liegen; dieser die, dass alle seine Strahlen ihre Vechselstrahlen in ihm selber schneiden. Man kann da-er als sekundäre Definition der Hauptwechselpunktstrahlen ind der Hauptwechselstrahlenpunkte aufstellen, dass die zugeord-eten harmonischen Pole der einen, und die zugeordneten harmo-ischen Polaren der anderen in Bezug auf den einen Kegelschnitt s zugleich auch in Bezug auf den anderen sind, und insofern önnte man einen jeden Hauptwechselpunktstrahl eine Gerade ereinigter Paare zugeordneter harmonischer Pole bei-er Kegelschnitte, und jeden Hauptwechselstrahlenpunkt einen itelpunkt vereinigter Paare zugeordneter harmoni-her Polaren beider Kegelschnitte nennen. Fasst man dlich die Hauptpunkte der Involution jener Pole, und die Haupt-ahlen der Involution dieser Polaren ins Auge, so begreift man, ss die harmonischen Polaren eines solchen Hauptpunktes (wenn existirt) in Bezug auf K und K_1 durch diesen Punkt selber hen, und dass die harmonischen Pole eines solchen Hauptstrahles f ihm selber liegen müssen, d. h. ersterer ist ein Durchschnitts-nkt, letzterer eine Tangente beider Kegelschnitte. Als rtiäre Definition der Hauptwechselpunktstrahlen und der auptwechselstrahlenpunkte ergiebt sich daher, dass jene gemein-

schaftliche Sekanten, diese gemeinschaftliche Tangentendurchschnitte beider Kegelschnitte sind; und zwar heissen sie reell und ideal, jenachdem jene Hauptpunkte und Hauptstrahlen existiren, oder nicht.

Zu jeder Involution von Wechselpunktstrahlen gehören nicht nur zwei der Geraden P, P_1, P_2, sondern auch die beiden harmonischen Polaren N, N_1; N', N'_1 eines jeden Hauptwechselstrahlenpunktes s, s', welcher der dritten angehört. Denn sind a, a_1 zwei beliebige Wechselstrahlen des Punktes s, deren jeder also die harmonischen Pole des anderen enthält, und schneidet a die N in $\mathfrak{a}$, a_1 die N_1 in $\mathfrak{a}_1$, so ist $\mathfrak{a}_1$ der harmonische Pol von a für K_1, weil dieser Pol auch auf der harmonischen Polare N_1 von s für K_1 liegt; und ebenso ist $\mathfrak{a}$ der harmonische Pol von a_1 für K; also schneiden sich die harmonischen Polaren von $\mathfrak{a}$ für K, K_1 im Punkte $\mathfrak{a}_1$, und somit sind N, N_1, da sie nach zwei Wechselpunkten gehen, Wechselpunktstrahlen des betreffenden Punktes p, p_1, p_2.

Gleicher Weise gehören zu jeder Involution von Wechselstrahlenpunkten einer Geraden P, P_1, P_2 nicht nur zwei der Punkte p, p_1, p_2, sondern auch die beiden harmonischen Pole n, n_1; n', n'_1 eines jeden Hauptwechselpunktstrahles S, S_1, welcher dem dritten angehört.

Jedes Paar Hauptwechselpunktstrahlen eines Punktes p, p_1, p_2 heisst ein Paar zugeordnete gemeinschaftliche Sekanten, und jedes Paar Hauptwechselstrahlenpunkte einer Geraden P, P_1, P_2 heisst ein Paar zugeordnete gemeinschaftliche Tangentendurchschnitte; und wieder heisst ein Paar der ersteren einem Paare der letzteren zugeordnet, wenn jenes einem Punkte p, und dieses einer Geraden P zugehört, welche die harmonische Polare von p für K, K_1 ist.

Es ist nun die Frage, ob zwei Kegelschnitte 1) jedesmal ein Paar zugeordnete gemeinschaftliche Sekanten oder Tangentendurchschnitte, und 2) ob auch jedesmal zwei zugeordnete Paare zugeordnete gemeinschaftliche Sekanten und Tangentendurchschnitte besitzen?

1) Fasst man alle Eigenschaften eines Punktes p, p_1, p_2 zusammen, so erweist er sich als gemeinschaftlicher Mittelpunkt von vier Involutionen von Strahlen: a) der zugeordneten harmonischen Polaren für K; b) der zugeordneten harmonischen Polaren für K_1; c) der Wechselpunktstrahlen für K, K_1; d) derjenigen Strahlenpaare, welche nach den Wechselstrahlenpunkten der entsprechenden Geraden P, P_1, P_2 gehen. Zu jeder von diesen vier Involutionen gehören die beiden Geraden P_1, P_2; P, P_2; P, P_1 als zugeordnetes Paar. Da nun zwei Gerade P_1, P_2 nothwendig existiren, wenn eine oder zwei der Involutionen, denen sie angehören, gleichliegende Gebilde enthält, und nur dann möglicher Weise nicht, wenn alle vier Involutionen aus ungleichliegenden Gebilden bestehen; und da sie in zwei Kegelschnitten, welche nur zwei Punkte und Tangenten gemein haben, in der That nicht vorhanden sind, so müssen in diesem Falle alle jene vier Involutionen aus ungleichliegenden Gebilden bestehen, und demnach eine jede ihre Hauptstrahlen besitzen. Solche Kegelschnitte haben also zwei gemeinschaftliche Sekanten, und aus ähnlichen Gründen zwei denselben zugeordnete gemeinschaftliche Tangentendurchschnitte; doch ist natürlich die eine und der eine reell, die anderen ideal.

Besitzen die Kegelschnitte drei Punkte p, p_1, p_2, und man stellt sich irgend einen innerhalb des Dreiecks pp_1p_2 liegend

Punkt a vor, so liegt sein Wechselpunkt a_1 entweder a) ebenfalls innerhalb desselben, oder doch b) innerhalb eines seiner Winkel. Im Fall a) erhält man drei Paar Wechselpunktstrahlen pa, pa_1; p_1a, p_1a_1; p_2a, p_2a_1, deren jedes das concentrische Strahlenpaar P_1, P_2; P, P_2; P, P_1 ausschliesst; und im Falle b) schliesst allemal eines, aber auch nur eines der drei ersteren eines der drei letzteren aus. Da nun diese ebenfalls Wechselpunktstrahlen sind, so sind im Falle a) alle drei Involutionen der Wechselpunktstrahlen aus ungleichliegenden Gebilden zusammengesetzt, und es giebt also drei Paar zugeordneter gemeinschaftlicher Sekanten, welche sämmtlich reell sind, im Falle b) dagegen giebt es aus demselben Grunde allemal ein Paar zugeordneter gemeinschaftlicher Sekanten, aber nur eines; und da dieser Fall nur solche Kegelschnitte betreffen kann, welche keinen Punkt gemein haben, so ist jede von beiden ideal und geht somit durch einen ausserhalb beider Kegelschnitte gelegenen Punkt p.

Ebenso zeigt man mittels einer beliebigen Geraden α, die alle Seiten des Dreiecks pp_1p_2 ausserhalb desselben schneidet, und ihres Wechselstrahls α_1, welcher nothwendig entweder alle 3 Seiten oder nur eine ausserhalb des Dreiecks schneidet, dass zwei beliebige Kegelschnitte entweder drei Paar zugeordneter gemeinschaftlicher Tangentendurchschnitte, welche sämmtlich reell sind, oder nur ein einziges besitzen, dessen Punkte beide ideal sind und einer beide Kegelschnitte durchschneidenden Geraden P angehören.

2) Diese Frage betrifft nur noch den Fall, wenn drei Punkte p, p_1, p_2 und drei Gerade P, P_1, P_2 vorhanden sind. Geht durch p eine reelle oder ideale gemeinschaftliche Sekante S, und sind pn, pn_1 die zugeordneten harmonischen Polaren von S für K, K_1, so haben die Geraden P_1, P_2, welche ebenfalls zugeordnete harmonische Polaren für K und K_1 sind, a) wenn p innerhalb K und K_1 liegt, sowohl zu S und pn als zu S und pn_1 eine abwechselnde Lage; b) wenn p ausserhalb K und K_1 liegt, so schliessen P_1, P_2 sowohl S und pn als S und pn_1 aus oder ein; c) wenn p innerhalb K und ausserhalb K_1, so liegen P_1, P_2 zu S und pn abwechselnd, zu S und pn_1 aus- oder einschliessend. In den beiden Fällen a) und b) müssen also die Geraden P_1, P_2 die Geraden pn und pn_1, und folglich auch die Punkte p_1, p_2 die harmonischen Pole n, n_1 von S aus- oder einschliessen, im Falle c) dagegen liegen P_1, P_2 zu pn. pn_1, und somit auch p_1, p_2 zu n, n_1 abwechselnd. Aber p_1, p_2 und n, n_1 sind zwei Paar Wechselstrahlenpunkte von P; also giebt es in den Fällen a) und b) allemal, und im Falle c) nie ein der Sekante S zugeordnetes Paar gemeinschaftlicher Tangentendurchschnitte.

Haben also K, K_1 vier Punkte gemein, so besitzen sie entweder drei Paar zugeordnete gemeinschaftliche Tangentendurchschnitte und somit vier gemeinschaftliche Tangenten, oder nur ein Paar und folglich keine gemeinschaftlichen Tangenten, jenachdem zwei der Punkte p, p_1, p_2 ausserhalb und der dritte innerhalb beider Kegelschnitte, oder nur einer ausserhalb beider, ein zweiter nur innerhalb K und ausserhalb K_1, der dritte innerhalb K_1 und ausserhalb K liegt.

Haben sie dagegen keinen Punkt gemein, so besitzen sie nur zwei gemeinschaftliche Sekanten, deren Durchschnitt p ausserhalb beider Kegelschnitte liegt, also jedesmal ein diesen Sekanten zugeordnetes Paar gemeinschaftlicher Tangentendurchschnitte, welche,

wenn die Kegelschnitte ausser einander liegen, beide reell, wenn aber der eine den anderen einschliesst, beide ideal sein müssen.

Andererseits ergiebt sich, dass jedem Paare gemeinschaftlicher Tangentendurchschnitte, deren Verbindungslinie P beide Kegelschnitte durchschneidet oder beide nicht durchschneidet, ein Paar gemeinschaftliche Sekanten zugeordnet sind, dass aber solche nicht existiren, wenn P den einen schneidet, den andern nicht; dass daher zwei Kegelschnitte mit vier gemeinschaftlichen Tangenten entweder drei Paar reelle gemeinschaftliche Sekanten oder nur ein Paar ideale besitzen, jenachdem zwei der Geraden P, P_1, P_2 beide Kegelschnitte durchsetzen und die dritte keinen, oder nur eine beiden begegnet, und jede der beiden anderen nur einem; und dass endlich zwei Kegelschnitte, welche keine gemeinschaftliche Tangente haben, allemal wenigstens ein Paar gemeinschaftliche Sekanten besitzen, welche solchen gemeinschaftlichen Tangentendurchschnitten zugeordnet sind, deren Verbindungslinie beide Kegelschnitte schneidet.

5. **Sind in einer Ebene zwei Kegelschnitte von beliebiger Gestalt und Lage gegeben, so giebt es in dieser Ebene**

a) allemal entweder drei oder wenigstens einen Punkt, dessen Strahlen paarweise Wechselpunktstrahlen bilden, d. h. solche Strahlenpaare, deren jedes lauter Wechselpunkte enthält.	a) allemal entweder drei oder wenigstens eine Gerade, deren Punkte paarweise Wechselstrahlenpunkte bilden, d. h. solche Punktenpaare, deren jedes lauter Wechselstrahlen enthält.
b) Diese Wechselpunktstrahlen bilden eine Involution von Strahlen, und diese besteht, wenn sie die einzige ist, allemal aus ungleichliegenden Gebilden, und wenn ihrer drei vorhanden sind, so besteht entweder eine jede derselben, oder nur eine, deren Mittelpunkt ausserhalb beider Kegelschnitte liegt, aus solchen Gebilden.	b) Diese Wechselstrahlenpunkte bilden eine Involution von Punkten, und diese besteht, wenn sie die einzige ist, allemal aus ungleichliegenden Gebilden, und wenn ihrer drei vorhanden sind, so besteht entweder eine jede derselben oder nur eine, deren Richtungslinie beide Kegelschnitte durchschneidet aus solchen Gebilden.
c) Die Hauptstrahlen einer solchen Involution oder die Hauptwechselpunktstrahlen sind zwei Gerade, von denen eine jede lauter Wechselpunkte enthält. Daher ist ein jeder Hauptwechselpunktstrahl eine Gerade vereinigter Paare zugeordneter harmonischer	c) Die Hauptpunkte eine[r] solchen Involution oder di[e] Hauptwechselstrahlenpunkte sind zwei Punkt[e] von denen ein jeder laut[er] Wechselstrahlen enthä[lt.] Daher ist ein jeder Haup[t]wechselstrahlenpunkt [ein] Mittelpunkt vereinig[ter] Paare zugeordneter har[monischer]

Pole, d. h. deren Punkte paarweise zugeordnete harmonische Pole in Bezug auf beide Kegelschnitte zugleich sind. Endlich ist jeder Hauptpunkt einer Involution vereinigter Paare zugeordneter harmonischer Pole ein beiden Kegelschnitten gemeinschaftlicher Durchschnittspunkt, und insofern ist jeder Hauptwechselpunktstrahl, jenachdem er einem der Kegelschnitte begegnet oder nicht, eine reelle oder ideale gemeinschaftliche Sekante derselben.

nischer Polaren, d. h. dessen Strahlen paarweise zugeordnete harmonische Polaren in Bezug auf beide Kegelschnitte zugleich sind. Endlich ist jeder Hauptstrahl einer Involution vereinigter Paare zugeordneter harmonischer Polaren eine beiden Kegelschnitten gemeinschaftliche Tangente, und insofern ist jeder Hauptwechselstrahlenpunkt, jenachdem er ausserhalb oder innerhalb eines der Kegelschnitte liegt, ein reeller oder idealer gemeinschaftlicher Tangentendurchschnitt derselben.

d) Einer jeden Involution von Wechselpunktstrahlen ist eine Involution von Wechselstrahlenpunkten zugeordnet, deren Richtungslinie die harmonische Polare des Mittelpunktes der ersteren in Bezug auf beide Kegelschnitte ist. Diese letztere besteht aus ungleichliegenden Gebilden, wenn die erstere entweder aus ungleichliegenden besteht, und ihr Mittelpunkt innerhalb oder ausserhalb beider Kegelschnitte liegt; oder wenn die erstere aus gleichliegenden besteht, und ihr Mittelpunkt innerhalb des einen und ausserhalb des anderen Kegelschnittes liegt; in jedem anderen Falle dagegen besteht die letztere aus gleichliegenden Gebilden.

d) Einer jeden Involution von Wechselstrahlenpunkten ist eine Involution von Wechselpunktstrahlen zugeordnet, deren Mittelpunkt der harmonische Pol der Richtungslinie der ersteren in Bezug auf beide Kegelschnitte ist. Diese letztere besteht aus ungleichliegenden Gebilden, wenn die erstere entweder aus ungleichliegenden besteht, und ihre Richtungslinie beide Kegelschnitte durchschneidet oder nicht durchschneidet, oder wenn die erstere aus gleichliegenden besteht, und ihre Richtungslinie den einen Kegelschnitt durchschneidet, den anderen nicht; in jedem anderen Falle dagegen besteht die letztere aus gleichliegenden Gebilden.

e) Zu jeder Involution von Wechselpunktstrahlen gehören als zugeordnete Strahlen die beiden Geraden, welche in Bezug auf beide Kegelschnitte zuge-

e) Zu jeder Involution von Wechselstrahlenpunkten gehören als zugeordnete Punkte die beiden Punkte, welche in Bezug auf beide Kegelschnitte

ordnete harmonische Polaren sind, und ausserdem die beiden harmonischen Polaren eines jeden Hauptwechselstrahlenpunktes der der ersteren zugeordneten Involution in Bezug auf beide Kegelschnitte, wenn er existirt.

zugeordnete harmonische Pole sind, und ausserdem die beiden harmonischen Pole eines jeden Hauptwechselpunktstrahles der der ersteren zugeordneten Involution in Bezug auf beide Kegelschnitte, wenn er existirt.

6. Sind in einer Ebene zwei Kegelschnitte von beliebiger Gestalt und Lage gegeben, so besitzen dieselben:

a) wenn sie vier Punkte gemein haben, drei reelle Paare zugeordneter gemeinschaftlicher Sekanten, und entweder drei reelle Paare zugeordneter gemeinschaftlicher Tangentendurchschnitte, oder nur ein solches und zwar ideales Paar, welches demjenigen der drei ersteren zugeordnet ist, dessen gegenseitiger Durchschnitt ausserhalb beider Kegelschnitte liegt; b) wenn sie bloss zwei Punkte gemein haben, so besitzen sie allemal nur ein einziges Paar gemeinschaftlicher Sekanten, wovon die eine reell, die andere ideal ist, und nur ein einziges und zwar ein dem ersteren zugeordnetes Paar gemeinschaftlicher Tangentendurchschnitte, wovon der eine reell, der andere ideal ist; c) wenn sie keinen Punkt gemein haben, so besitzen sie nur ein einziges und zwar ideales Paar gemeinschaftlicher Sekanten, und entweder drei reelle Paare gemeinschaftlicher Tangentendurchschnitte oder nur ein solches und zwar ideales Paar, welches dem ersteren zugeordnet ist, und dessen Verbindungslinie beide Kegelschnitte durchschneidet,

a) wenn sie vier Tangenten gemein haben, drei reelle Paare zugeordneter gemeinschaftlicher Tangentendurchschnitte, und entweder drei reelle Paare zugeordneter gemeinschaftlicher Sekanten, oder nur ein solches und zwar ideales Paar, welches demjenigen der drei ersteren zugeordnet ist, dessen Verbindungslinie beide Kegelschnitte durchschneidet; b) wenn sie bloss zwei Tangenten gemein haben, so besitzen sie allemal nur ein einziges Paar gemeinschaftlicher Tangentendurchschnitte, wovon der eine reell, der andere ideal ist, und nur ein einziges und zwar ein dem ersteren zugeordnetes Paar gemeinschaftlicher Sekanten, wovon die eine reell, die andere ideal ist; c) wenn sie keine Tangente gemein haben, so besitzen sie nur ein einziges und zwar ideales Paar gemeinschaftlicher Tangentendurchschnitte, und entweder drei reelle Paare gemeinschaftlicher Sekanten, oder nur ein solches und zwar ideales Paar, welches dem ersteren zugeordnet ist, und dessen gegenseitiger Durchschnitt ausserhalb beider Kegel-

jenachdem die Kegelschnitte völlig ausser einander oder ineinander liegen.

schnitte liegt, jenachdem die Kegelschnitte sich durchdringen oder nicht.

Mit Hülfe der gegebenen Sätze wird man nun leicht die Auflösung folgender Aufgabe finden.

7. **Mittels des Lineals und eines festen Kreises die gemeinschaftlichen Sekanten und Tangentendurchschnitte zweier Kegelschnitte, von denen ein jeder durch fünf Punkte oder fünf Tangenten beliebig in einer Ebene gegeben ist, zu finden, wenn**

a) **irgend einer der Punkte** p, p_1, p_2; b) **wenn irgend ein Strahl eines dieser Punkte; c) wenn irgend ein Punkt einer reellen oder idealen gemeinschaftlichen Sekante, der aber kein Durchschnittspunkt beider Kegelschnitte sein darf, bekannt ist.**

a) **irgend eine der Geraden** P, P_1, P_2; b) **wenn irgend ein Punkt einer dieser Geraden; c) wenn irgend ein Strahl eines reellen oder idealen gemeinschaftlichen Tangentendurchschnittes, der aber keine gemeinschaftliche Tangente sein darf, bekannt ist.**

Umgekehrt darf man behaupten, dass jede Gerade, deren sämmtliche Punkte paarweise Wechselpunkte in Bezug auf zwei Kegelschnitte bilden, eine reelle oder ideale gemeinschaftliche Sekante derselben, und dass jeder Punkt, dessen Strahlen paarweise Wechselstrahlen bilden, ein reeller oder idealer gemeinschaftlicher Tangentendurchschnitt derselben sei. Denn jene Gerade S' schneidet zwei zugeordnete gemeinschaftliche Sekanten von K, K_1 entweder im Punkte p, und dann fällt sie, als Vereinigung zweier Wechselpunktstrahlen, nothwendig mit einer von beiden zusammen, oder sie schneidet jede in zwei besondern Punkten, und dann ist jeder dieser Punkte ein gemeinschaftlicher Durchschnitt der Kegelschnitte, also S' eine gemeinschaftliche Sekante; oder fiele einer derselben nicht mit seinem Wechselpunkte zusammen, so würde letzterer sowohl auf S' als auf einer gemeinschaftlichen Sekante liegen, also wiederum S' mit einer gemeinschaftlichen Sekante zusammenfallen.

Besondere Fälle.

Sind je zwei zugeordnete Durchmesser eines Kegelschnittes denen eines anderen parallel, was offenbar der Fall ist, wenn es von zwei Paaren allein gilt (§. 1. e), so ist die unendlich-entfernte Gerade ihrer Ebene eine Gerade vereinigter Paare zugeordneter harmonischer Pole, also eine gemeinschaftliche Sekante der Kegelschnitte, und umgekehrt. Sind aber A, A_1; B, B_1 zwei Paar zugeordnete Durchmesserlängen des einen, und a, a_1; b, b_1 die Längen der ihnen parallelen Durchmesser des anderen, so ist

kraft §. 4.*) $A : A_1 = a : a_1$ und $B : B_1 = b : b_1$, also auch $A . A_1 : a . a_1 = A^2 : a^2$; $B . B_1 : b . b_1 = B^2 : b^2$, und nach §. 4. 6. ist $A . A_1 : B . B_1 = a . a_1 : b . b_1$; also $A : a = B : b = C : c$ u. s. w., d. h. die Kegelschnitte sind ähnliche und ähnlich-liegende Figuren; und umgekehrt.

8. **Je zwei ähnliche und ähnlich-liegende Ellipsen oder Hyperbeln haben beziehlich eine unendlich-entfernte ideale oder reelle Sekante gemein.**

9. **Zwei in einer Ebene beliebig liegende Kreise haben eine unendlich-entfernte ideale Sekante gemein.**

Sind die Achsen zweier Parabeln parallel, so haben sie nicht nur die unendlich-entfernte Tangente, sondern auch deren Berührungspunkt gemein; da nun die harmonische Polare jedes Punktes einer Tangente durch den Berührungspunkt geht, so folgt auch für diese Art Kegelschnitte:

10. **Zwei in einer Ebene beliebig, aber mit parallelen Achsen liegende Parabeln haben eine unendlich-entfernte Sekante gemein, welche zugleich deren gemeinschaftliche Tangente ist.**

Die zugeordneten harmonischen Polaren eines Brennpunktes sind zu einander rechtwinklig, also bildet jedes Paar derselben in zwei Kegelschnitten, welche einen Brennpunkt gemein haben, zwei Wechselstrahlen:

11. **Fällt ein Brennpunkt eines Kegelschnittes mit dem eines andern zusammen, so ist er ein idealer gemeinschaftlicher Tangentendurchschnitt derselben.**

Es möge jetzt eine beliebige Gerade A zwei beliebige Kegelschnitte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ in den Punktenpaaren $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1$; $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}_1$ und zwei zugeordnete gemeinschaftliche Sekanten S, S_1 derselben in den Punkten $\mathfrak{s}, \mathfrak{s}_1$ schneiden; so giebt es, wenn $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}_1$ nicht etwa abwechselnd liegen, allemal zwei Punkte $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$, die sowohl mit $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1$ als mit $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}_1$ harmonisch sind. Solche zwei Punkte $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ sind aber Wechselpunkte für $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, also die Strahlen, welche sie mit dem Durchschnitte p von S, S_1 verbinden, Wechselpunktstrahlen; woraus folgt, dass $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ auch mit $\mathfrak{s}, \mathfrak{s}_1$ harmonisch, folglich die Punktenpaare $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1$; $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}_1$; $\mathfrak{s}, \mathfrak{s}_1$ eine Involution von sechs Punkten bilden. Haben $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ keinen Punkt gemein, so schliessen die Punkte $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1$; $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}_1$ einander ein oder aus, und das nämliche gilt von den Tangenten, welche von einem beliebigen Punkte gezogen werden.

---

*) Denn nach der dortigen Bezeichnung ist

$$A^2{}_1 : B^2{}_1 = M\mathfrak{a}^2 . \frac{\mathfrak{m}\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1} : M\mathfrak{a}^2{}_1 . \frac{\mathfrak{m}\mathfrak{a}}{\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1} = \frac{M\mathfrak{a}^2}{M\mathfrak{m}^2} . \frac{M\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}\mathfrak{a}} : \frac{M\mathfrak{a}^2{}_1}{M\mathfrak{m}^2} . \frac{M\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}\mathfrak{a}_1},$$

also wenn α, α_1 die Winkel sind, welche A_1, B_1 mit der Achse $M\mathfrak{m}$ bilden: $A^2{}_1 : B^2{}_1 = \frac{\cot . \alpha}{\cos^2 . \alpha} : \frac{\cot . \alpha_1}{\cos^2 . \alpha_1} = \sin \alpha_1 . \cos \alpha_1 : \sin \alpha . \cos \alpha = \sin 2\alpha_1 : \sin 2\alpha$ (und ebenso ist rechts $\text{tng}^2 . \alpha : \text{tng}^2 . \alpha_1 = M\mathfrak{a}_1 : M\mathfrak{a}$). Nach der jetzigen Bezeichnung also ist $A^2 : A^2{}_1 = \sin . 2\alpha_1 : \sin . 2\alpha = a^2 : a^2{}_1$.

Der Fall, dass diese Punkte oder Tangenten abwechselnd liegen, kann also nur dann eintreten, wenn 𝔄, 𝔅 vier oder nur zwei Punkte gemein haben.

Es seien B, B_1 irgend zwei den Kegelschnitten 𝔄, 𝔅 gemeinschaftliche Punkte; durch B sei eine beliebige Gerade gelegt, welche 𝔄, 𝔅 zum andernmal in B_2, B_3 schneidet, und durch B_1 die Strahlen $a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots$, welche 𝔄 in 𝔞, 𝔟, 𝔠, 𝔡 .... und 𝔅 in $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1 \ldots$ schneiden; endlich gehen von B_2 nach 𝔞, 𝔟, 𝔠, 𝔡.... die Strahlen $a_2, b_2, c_2, d_2 \ldots$, und von B_3 nach $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1 \ldots$ die Strahlen $a_3, b_3, c_3, d_3 \ldots$; diess vorausgesetzut, so ist

$$B_2(a_2, b_2, c_2, d_2 \ldots) = B_1(a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots) = B_3(a_3, b_3, c_3, d_3 \ldots),$$

also

$$B_2(a_2, b_2, c_2, d_2 \ldots) = B_3(a_3, b_3, c_3, d_3 \ldots).$$

Aber derjenige Strahl e_1 von B_1, welcher mit BB_1 zusammenfällt, schneidet 𝔄 und 𝔅 in zwei Punkten 𝔢, $\mathfrak{e}_1$, welche sich in B vereinigen; also fallen auch die Strahlen e_2, e_3 mit B_2B_3 zusammen. Die Strahlbüschel B_2, B_3 sind also perspektivisch, d. h. je zwei Strahlen a_2, a_3; $b_2, b_3 \ldots$ schneiden sich auf einer Geraden S_1.

Ist nun A eine beliebige Gerade, welche 𝔄 in B_2, 𝔞 und 𝔅 in $\mathfrak{b}^0$, $\mathfrak{b}^0{}_1$, ferner BB_1 oder S in 𝔰 und $B_3\mathfrak{a}_1$ in $\mathfrak{s}_1$ schneidet, so bilden die drei Punktenpaare B_2, 𝔞; $\mathfrak{b}^0$, $\mathfrak{b}^0{}_1$; 𝔰, $\mathfrak{s}_1$, als Durchschnitte von A mit 𝔅 und den Gegenseiten des dem 𝔅 eingeschriebenen Vierecks $BB_1\mathfrak{a}_1B_3$, eine Involution von sechs Punkten *).

---

*) Ist nämlich B_2 ein beliebiger Punkt in der Ebene eines Kegelschnittes K, und sind (BB') und B_1 zwei beliebige Punkte von K; sind ferner α, α_1; β, β_1; γ, γ_1; $\delta, \delta_1 \ldots$ die Durchschnitte von K mit beliebigen Geraden, welche von B_2 ausgehen, und haben diese Punkte mit (BB') die Strahlenpaare a, a'; b, b'; c, c'; $d, d' \ldots$, und insbesondere die Punkte $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1 \ldots$ mit B_1 die Strahlen $a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots$ gemein, so hat man nach §. 3. 3. und Einl. 11.

$$B(a, b, c, d \ldots) = B'(a', b', c', d' \ldots) = B_1(a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots).$$

Wird nun eine beliebige, durch B_2 gehende Gerade (AA_1) von $a, b, c, d \ldots$; $a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots$ beziehlich in 𝔞, 𝔟, 𝔠, 𝔡 ....; $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1 \ldots$ geschnitten, so hat man

$$A(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots) = A_1(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1 \ldots).$$

Aber auf A entspricht dem Punkte 𝔣, welcher mit B einerlei ist, ein Punkt $\mathfrak{f}_1$ auf A_1, welcher der Linie BB_1 angehört, und dem Punkte φ auf A, welcher mit $\mathfrak{f}_1$ zusammenliegt, entspricht auf A_1 ein mit 𝔣 zusammenliegender Punkt φ_1; also ist

$$A(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots \mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1 \ldots) = A_1(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1 \ldots \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots),$$

woraus obiger Satz sich sofort ergiebt. Aber noch mehr. Sieht man z. B. den Punkt $\mathfrak{a}_1$ als der A zugehörig an, zieht $B\mathfrak{a}_1$ oder a^0, welcher Strahl K in α^0 schneidet, sofort die Gerade $B_2\alpha^0$, welche K wieder in $\alpha^0{}_1$ schneidet, endlich den Strahl $B_1\alpha^0{}_1$ oder $a^0{}_1$, so muss $a^0{}_1$

Aber der Punkt $\mathfrak{s}_1$ gehört auch der Geraden S_1 an, welche durch Drehung der Geraden $B_2\mathfrak{a}$ und $B_3\mathfrak{a}_1$ um die Punkte B_2, B_3 erzeugt wird; und offenbar lassen sich immer durch B_2 zwei Gerade A so legen, dass die Punkte B_2, $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{s}_1$ sich ein- oder ausschliessen, und zugleich die Punkte $\mathfrak{b}^0$, $\mathfrak{b}^0_1$ existiren — es braucht nur B_2 innerhalb $\mathfrak{B}$ zu liegen — also würden für diese zwei Geraden A die Punkte $\mathfrak{s}_1$ sowohl auf S_1 als auf der zugeordneten gemeinschaftlichen Sekante von BB_1 liegen müssen, und demnach diese letztere mit S_1 identisch sein.

Ebenso behandelt man andrerseits den Fall, wenn $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ vier oder zwei Tangenten gemein haben; und was denjenigen betrifft, wenn $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ vier Punkte, aber keine Tangente gemein haben, so überzeugt man sich leicht, dass die zwei Tangentenpaare, welche von einem beliebigen Punkte an solche zwei Kegelschnitte gelegt werden, sich ein- oder ausschliessen müssen. Denn denkt man sich den Polar-Kegelschnitt $\mathfrak{B}_1$ von $\mathfrak{B}$ in Bezug auf $\mathfrak{A}$, so können $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}_1$ keinen Punkt gemein haben, weil $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ keine gemeinschaftliche Tangente besitzen; heissen nun jene zwei Tangentenpaare a, a_1; b, b_1, und sind $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$; $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}_1$ deren harmonische Pole für $\mathfrak{A}$, so liegen diese in einer Geraden, und zwar $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$ auf $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}_1$ auf $\mathfrak{B}_1$; folglich schliessen sich diese Punktenpaare ein oder aus, und demnach gilt dasselbe auch von a, a_1; b, b_1, weil die harmonischen Polaren aller Punkte einer Geraden für $\mathfrak{A}$ einen mit dieser Geraden projektivischen Strahlbüschel bilden.

12. Die drei Punktenpaare, in welchen zwei Kegelschnitte von beliebiger Gestalt und Lage und zwei zugeordnete gemeinschaftliche Sekanten derselben von einer beliebigen Geraden geschnitten werden, bilden eine Involution von sechs Punkten.

12. Die drei Strahlenpaare, welche von einem beliebigen Punkte an zwei Kegelschnitte von beliebiger Gestalt und Lage, als Tangenten, und nach zwei zugeordneten gemeinschaftlichen Tangentendurchschnitten derselben gezogen werden, bilden eine Involution von sechs Strahlen.

Ich übergehe die Corollare dieses Satzes.

13. Haben zwei Kegelschnitte zwei Punkte gemein, und man legt durch jeden dieser Punkte eine beliebige Gerade, so schneiden sich die durch diese zwei Geraden bestimmten Sehnen der Kegelschnitte

13. Haben zwei Kegelschnitte zwei Tangenten gemein, und man zieht von einem beliebigen Punkte einer jeden an jeden Kegelschnitt eine neue Tangente, so liegen die gegenseitigen Durchschnitte je zweier

---

durch den Punkt $\mathfrak{a}$ gehen. Die Punkte α, B, α^0, α^0_1, B_1, α_1 bilden ein dem K eingeschriebenes Sechseck $\alpha B\alpha^0\alpha^0_1B_1\alpha_1$, dessen Hauptgegenseiten sich paarweise in drei Punkten B_2, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$ einer Geraden schneiden, und offenbar ist dieses Sechseck beliebig.

auf einer gemeinschaftlichen Sekante derselben, welche der durch jene Punkte gehenden zugeordnet ist.

Tangenten desselben Kegelschnitts mit einem gemeinschaftlichen Tangentendurchschnitte derselben, welcher dem der beiden ersten Tangenten zugeordnet ist, in gerader Linie.

---

§. 6.

Construction und Eigenschaften eines Systems von beliebig vielen Kegelschnitten, welche zwei zugeordnete Sekanten oder Tangentendurchschnitte gemein haben. System der zugehörigen Wechselpunkt- oder Wechselstrahlen-Kegelschnitte. Drei Wechsel-Systeme von Kegelschnitten mit zwei zugeordneten gemeinschaftlichen Sekanten oder Tangentendurchschnitten.

1. Sind in einer Ebene ein Kegelschnitt, zwei Gerade und ein Punkt beliebig gegeben, einen zweiten Kegelschnitt zu finden, welcher mit dem ersteren die beiden Geraden als (reelle oder ideale) Sekanten gemein habe und durch den gegebenen Punkt gehe.

1. Sind in einer Ebene ein Kegelschnitt, zwei Punkte und eine Gerade beliebig gegeben, einen zweiten Kegelschnitt zu finden, welcher mit dem ersteren die beiden Punkte als (reelle oder ideale) Tangentendurchschnitte gemein habe und die gegebene Gerade berühre.

Erste Auflösung (links). Es sei $\mathfrak{B}$ der gegebene Kegelschnitt, S, S_1 die gegebenen Geraden, $\mathfrak{a}$ der gegebene Punkt des gesuchten Kegelschnittes $\mathfrak{A}$. Man verbinde den Durchschnitt p von S, S_1 mit $\mathfrak{a}$ durch eine Gerade a, suche die harmonische Polare P von p für $\mathfrak{B}$, welche die a in p' schneide, und zu p, p', $\mathfrak{a}$ den vierten harmonischen, dem $\mathfrak{a}$ zug. Punkt $\mathfrak{a}_1$; suche zu S, S_1, a den vierten harmonischen, dem a zugeordneten Strahl a', und noch die harmonischen Polaren von $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1$ für $\mathfrak{B}$, welche a in α, α_1 schneiden. Jetzt verbinde man die Punkte $\mathfrak{a}$ und $\alpha, \mathfrak{a}_1$ und α_1 durch die Geraden A, A_1, lege durch $\mathfrak{a}$ eine beliebige Gerade, welche $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}_1$ und S, S_1 in $\mathfrak{s}, \mathfrak{s}_1$ schneide, suche einen Punkt $\mathfrak{a}_2$, welcher mit $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}_1$; $\mathfrak{s}, \mathfrak{s}_1$ eine Involution von sechs Punkten bildet, und suche einen Kegelschnitt, welcher durch die Punkte $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ gehe und die Geraden A, A_1 berühre; so ist diess der verlangte Kegelschnitt $\mathfrak{A}$.

Beweis. Da A, als Tangente in $\mathfrak{a}$, die harmonische Polare von $\mathfrak{a}$ für $\mathfrak{A}$ ist, und von der harmonischen Polare desselben Punktes für $\mathfrak{B}$ in α geschnitten wird, so sind $\mathfrak{a}, \alpha$, und aus demselben Grunde $\mathfrak{a}_1, \alpha_1$ Wechselpunkte für $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$, und da p, p' harmonisch $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1$, und p' auf der harm. Polare von p für $\mathfrak{B}$ liegt, so sind ebenfalls Wechselpunkte für $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$. Es liegen also drei Paar [Wec]hselpunkte $\mathfrak{a}, \alpha$; $\mathfrak{a}_1, \alpha_1$; p, p' auf denselben zwei Geraden a, a'; [folgl]ich sind a, a' zwei Wechselpunktstrahlen für $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$, und p ist

ein Punkt, dessen harmonische Polaren für $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ sich vereinigen. Die Gerade $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_2$, da sie beliebig ist, konnte jedenfalls so gewählt werden, dass die Punktenpaare $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{s}_1$ einander und folglich auch $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_2$ ein- oder ausschliessen; also giebt es auf ihr zwei Punkte $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, welche sowohl mit $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_2$ als mit $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}_1$ (und $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{s}_1$) harmonisch, also Wechselpunkte für $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ sind. Somit sind auch die Strahlen g, h, welche p mit $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ verbinden, Wechselpunktstrahlen, und da nun S, S_1 sowohl mit a, a' als mit g, h harmonisch sind, so sind sie zwei zugeordnete gemeinschaftliche Sekanten von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$.

Zweite Auflösung (links). Man lege durch den gegebenen Punkt $\mathfrak{a}$ beliebig viele Strahlen a_1, a_2, a_3 ...., und suche auf jedem derselben, z. B. auf a_1, einen Punkt $\mathfrak{a}_1$, welcher mit $\mathfrak{a}$ und den Punktenpaaren $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}_1$; $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{s}_1$, wo a_1 den gegebenen Kegelschnitt $\mathfrak{B}$ und die Geraden S, S_1 schneidet, eine Involution von sechs Punkten bildet; so gehören alle diese Punkte $\mathfrak{a}_1$ u. s. f. dem verlangten Kegelschnitte $\mathfrak{A}$ an.

Beweis. Da durch die erste Auflösung bewiesen, dass der Kegelschnitt $\mathfrak{A}$ existirt, so sind, wenn $\mathfrak{A}$ den Strahl a_1 zum zweitenmal in $\mathfrak{a}_{,,}$ schneidet, sowohl $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_{,,}$; $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}_1$; $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{s}_1$ als auch $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$; $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}_1$; $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{s}_1$ in Involution, also $\mathfrak{a}_{,,}$ mit $\mathfrak{a}_1$ identisch u. s. w. Zugleich sieht man, dass nur ein einziger Kegelschnitt $\mathfrak{A}$ existirt.

2. **Wird ein ebener Strahlbüschel von einem beliebigen Kegelschnitte und von zwei festen Geraden geschnitten, so gehören alle Punkte, welche mit dem Mittelpunkte des Strahlbüschels, als zugeordnetem Punkte, und mit den jedesmaligen zwei Punktenpaaren des Kegelschnittes und der festen Geraden Involutionen von sechs Punkten bilden, dem Umfange eines zweiten Kegelschnittes an, welcher mit ersterem die beiden festen Geraden als reelle oder ideale Sekanten gemein hat und durch den Mittelpunkt des Strahlbüschels geht.**

2. **Alle Geraden, welche mit einer beliebig gegebenen Geraden, als zugeordnetem Strahle, mit zwei Tangenten eines beliebig gegebenen Kegelschnittes und mit zwei nach zwei festen Punkten gehenden Geraden Involutionen von sechs Strahlen bilden, umhüllen einen zweiten Kegelschnitt, welcher mit ersterem die zwei festen Punkte als reelle oder ideale Tangentendurchschnitte gemein hat und die gegebene Gerade berührt.**

Aus §. 5. 12. folgt nun ohne Weiteres:

3. **Hat eine Schaar von Kegelschnitten mit einem und demselben Kegelschnitte dieselben zwei zugeordneten reellen oder idealen Sekanten gemein, so bilden sämmtliche Punktenpaare, in denen diese**

3. **Hat eine Schaar vo Kegelschnitten mit eine und demselben Kege schnitte dieselben zwei z geordneten reellen od idealen Tangentendurc schnitte gemein, so bild sämmtliche Tangente**

schnitte und Sekan-
ne beliebige Gerade
den, eine Involution
unkten, deren Haupt-
e allemal zweien die
e berührenden Kegel-
ten angehören; und
lb hat jeder Kegel-
t dieser Schaar mit
jene zwei Sekanten
n.

paare, welche von einem beliebigen Punkte an dieselben, nebst den Geraden, welche nach den gemeinschaftlichen Tangentendurchschnitten gehen, eine Involution von Strahlen, deren Hauptstrahlen allemal zwei durch jenen Punkt gehende Kegelschnitte berühren; und desshalb hat jeder Kegelschnitt dieser Schaar mit jedem jene zwei Tangentendurchschnitte gemein.

diesem Satze wieder ergiebt sich sehr leicht:

ie harmonischen Po-
eines beliebigen
es in Bezug auf eine
r von Kegelschnitten,
mit einander diesel-
vei zugeordneten Se-
gemein haben,
den sich alle in ei-
d demselben Punkte,
her gehen auch alle
nesser derselben, de-
ugeordnete parallel
, durch einerlei Punkt.

4. Die harmonischen Pole einer beliebigen Geraden in Bezug auf eine Schaar von Kegelschnitten, welche mit einander dieselben zwei zugeordneten Tangentendurchschnitte gemein haben, liegen alle auf einer und derselben Geraden; und daher liegen die Mittelpunkte aller dieser Kegelschnitte in einer und derselben geraden Linie.

in der Ebene der (links) in Rede stehenden Kegelschnitte
𝔈, 𝔇 .... und K eine Gerade A beliebig gegeben, so giebt
al unzählige unter ihnen, welche diese Gerade in Punkten-
$\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1$; $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}_1$; $\mathfrak{c}, \mathfrak{c}_1$; $\mathfrak{d}, \mathfrak{d}_1$ .... schneiden; denn jeder Punkt
bestimmt einen solchen. Es werde nun 1) K ebenfalls von
wei Punkten $\mathfrak{f}, \mathfrak{f}_1$ geschnitten (oder in einem Punkte be-
von einem beliebigen Punkte B des K gehen nach $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1$;
.. $\mathfrak{f}, \mathfrak{f}_1$ die Strahlenpaare a, a_1; b, b_1 .... k, k_1, welche K
veitenmal in α, α_1; β, β_1 .... $\mathfrak{f}, \mathfrak{f}_1$ schneiden; so bilden diese
npaare eine Involution von Strahlen; folglich gehen sämmt-
ehnen $\alpha\alpha_1$, $\beta\beta_1$ .... und A durch einerlei Punkt q (§. 3. 4.).
un jene Punktenpaare ungleichliegend, so schneidet die har-
he Polare von q für K diesen Kegelschnitt in zwei Punkten
und die Strahlen e, f des Strahlbüschels B, welche nach ε,
en, sind mit je zwei Strahlen a, a_1; b, b_1 ...., also auch die
$\mathfrak{e}, \mathfrak{f}$, wo dieselben der A begegnen, mit je zwei Punkten
$\mathfrak{b}, \mathfrak{b}_1$ .... harmonisch, d. h. $\mathfrak{e}, \mathfrak{f}$ sind zwei Wechselpunkte auf
sämmtliche Kegelschnitte. Wird aber 2) K von A weder
itten noch berührt, so sind die zugeordneten harmonischen
von A für K nothwendig gleichliegend, folglich hat die In-
n dieser Pole mit derjenigen für irgend einen andern der
chnitte 𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇 .... allemal zwei zugeordnete Punkte $\mathfrak{e}, \mathfrak{f}$

gemein (§. 3. 5.), und diese sind dann zwei der Geraden A zugehörige Wechselpunkte für sämmtliche Kegelschnitte. Demnach sind auch jetzt die Strahlen e, f, welche B mit $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$ verbinden, mit je zwei Strahlen a, a_1; b, b_1 .... harmonisch, und sofort die Gerade $\varepsilon\varphi$ die harmonische Polare eines Punktes q, in welchem sich auch jetzt die Sehnen $\alpha\alpha_1$, $\beta\beta_1$ .... schneiden müssen. Weil aber die Punkte $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$ zwei zugeordnete harmonische Pole von A für K sind, so ergiebt sich durch Umkehrung des Satzes (§. 4. 2.), dass q als harmonischer Pol von $\varepsilon\varphi$ auf A liegen muss.

5. **Hat eine Schaar von Kegelschnitten dieselben zwei zugeordneten reellen oder idealen**

Sekanten gemein, und werden alle oder ein Theil derselben von einer Geraden geschnitten, und man zieht von einem beliebigen Punkte eines der Kegelschnitte Strahlenpaare nach je zwei Durchschnittspunkten, so geben die Sehnen dieses letzteren, welche durch diese Strahlenpaare bestimmt werden, alle durch einen und denselben Punkt, welcher allemal auf jener Geraden liegt, es mag nun diese letztere diesen einen Kegelschnitt durchschneiden, berühren oder gänzlich ausserhalb desselben liegen.

Tangentendurchschnitte gemein, und man zieht von einem beliebigen Punkte an alle oder einen Theil derselben Tangentenpaare und ausserdem an einen der Kegelschnitte eine beliebige Tangente, endlich wieder von je zwei Durchschnittspunkten dieser Tangente mit jenen Tangentenpaaren an den letzteren zwei neue Tangenten, so liegen die Durchschnitte dieser letzteren alle auf einer und derselben Geraden, welche allemal durch jenen Punkt geht, es mag nun dieser Punkt ausserhalb, auf oder innerhalb dieses einen Kegelschnittes liegen.

Aus §. 5. 1. und §. 6. 4. folgert man:

6. **Die harmonischen Pole jeder Geraden in Bezug auf eine Schaar von Kegelschnitten, welche dieselben zwei zugeordneten reellen oder idealen Sekanten gemein haben, liegen auf dem Umfange eines einzigen Kegelschnittes.**

6. **Die harmonischen Polaren eines jeden Punktes in Bezug auf eine Schaar von Kegelschnitten, welche dieselben zwei zugeordneten reellen oder idealen Tangentendurchschnitte gemein haben, umhüllen einen einzigen Kegelschnitt.**

7. **Die Mittelpunkte aller Kegelschnitte, welche zwei zugeordnete reelle oder ideale Sekanten gemein haben, liegen auf dem Umfange eines einzigen Kegelschnittes.**

7. **In einer Schaar von Kegelschnitten, welche zwei zugeordnete reelle oder ideale Tangentendurchschnitte gemein haben, umhüllen alle Durchmesser, deren zugeordnete parallel laufen, einen einzigen Kegelschnitt.**

Eine beliebige Gerade A schneide die zugeordneten gemein-
ıaftlichen Sekanten S, S_1 von 𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇...., welche letztere
emal besitzen, in den Punkten 𝔤, $𝔤_1$; so liegen die Wechselpunkte
B_1 von 𝔤, $𝔤_1$ ebenfalls auf S, S_1, und die harmonischen Pola-
ı a, a_1 von 𝔤, $𝔤_1$ in Bezug auf irgend einen 𝔄 jener Kegel-
ınitte gehen, die eine a durch B und den harmonischen Pol α
n S, die andere a_1 durch B_1 und den harmonischen Pol α_1 von
für 𝔄; zugleich aber liegt der Durchschnitt 𝔞 von a, a_1 als
·monischer Pol von A für 𝔄, auf dem Wechselpunkt-Kegel-
ınitte A_1 der Geraden A. Die Punkte α, α_1 und alle ähnlichen
β_1; γ, γ_1; δ, δ_1...., welche den Kegelschnitten 𝔅, ℭ, 𝔇....
sprechen, liegen auf der Geraden P, und jedem Punkte 𝔰 dieser
raden, als harmonischen Pol von S oder S_1 gedacht, entspricht
jenem System ein Kegelschnitt 𝔖 oder $𝔖_1$, in Bezug auf wel-
ɜn er es ist. Ist nun 𝔰 der Durchschnitt von A mit P und zwar
· harmonische Pol von S für 𝔖, so ist B der harmonische Pol
ı A für 𝔖, weil die harmonischen Polaren S, s, s_1 von 𝔰, 𝔤, $𝔤_1$
·ch einerlei Punkt 𝔰 gehen müssen, der auf A_1 liegt; also ist $𝔰_1$
BB_1, und s mit $B𝔰$ identisch, und daher $B𝔰$ Tangente an A_1
B. Denkt man sich dagegen denselben Punkt 𝔰 als harmoni-
en Pol von S_1 für $𝔖_1$, so ist B_1 der harmonische Pol von A
$𝔖_1$, also jetzt $B_1𝔰$ Tangente an A_1 in B_1. Demnach liegt
· harmonische Pol 𝔰 von BB_1 in Bezug auf A_1 auf der Gera-
ı P; und hieraus folgt nach §. 4. 2. wegen der dem A_1 einge-
ıriebenen Dreiecke $B𝔞B_1$, $B𝔟B_1$.... $B𝔰B_1$...., dass die Punk-
ıpaare α, α_1; β, β_1; γ, γ_1; δ, δ_1.... zugeordnete harmonische
le der Geraden P in Bezug auf A_1, und sofort, weil diese
ınkte nur von 𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇.... abhängen und mit A_1 sich nicht
dern, es auch in Bezug auf alle anderen Wechselpunkt-Kegel-
hnitte sein müssen.

S. Hat eine Schaar von ɛgelschnitten zwei zuge-dnete reelle oder ideale kanten gemein, so bilden die harmonischen Pole ɛser zwei Sekanten in zug auf je einen dieser gelschnitte eine Involu-n von Punkten, welche dann aus gleichliegen-ı Gebilden besteht, wenn e der gemeinschaftlichen ɛanten reell, die andere al ist; b) jedes Paar die-Pole sind zwei zugeord-e harmonische Pole der raden P in Bezug auf alle ·chselpunkt - Kegel-ınitte, welche zu jener haar gehören, und daher ɔen c) alle diese Wech-punkt - Kegelschnitte sser dem Punkte p, wo	8. Hat eine Schar von Kegelschnitten zwei zuge-ordnete reelle oder ideale Tangentendurchschnitte gemein, so bilden a) die harmonischen Polaren die-ser zwei Tangentendurch-schnitte in Bezug auf je einen dieser Kegelschnitte eine Involution von Strah-len, welche nur dann aus gleichliegenden Gebilden besteht, wenn einer der ge-meinschaftlichen Tangen-tendurchschnitte reell, der andere ideal ist; b) jedes Paar dieser Polaren sind zwei zugeordnete harmo-nische Polaren des Punk-tes p in Bezug auf alle Wechselstrahlen - Kegel-schnitte, welche zu jener Schaar gehören, und daher

die gemeinschaftlichen Sekanten sich schneiden, noch die ihm entsprechende Gerade P als reelle oder ideale Sekante gemein, jenachdem jene erstere Schaar vier, keinen oder nur zwei gemeinschaftliche Durchschnitte besitzt.

haben c) alle diese Wechse strahlen-Kegelschnitte au ser einer Tangente P, we che die gemeinschaftliche Tangentendurchschnitte verbindet, noch den diese Geraden entsprechende Punkt p als reellen od idealen Tangentendurc schnitt gemein, jenachde jene erstere Schaar vie keine oder nur zwei ge meinschaftliche Tangente besitzt.

Der 3te Satz veranlasst jetzt zu fragen: **Welchem Gesetz sind die Hauptpunkte aller Involutionen von Punkte von denen dort die Rede war, unterworfen, wenn ih Richtungslinien durch einerlei Punkt gehen?** und ähnli andrerseits. Aber, so allgemein gestellt, lässt sich diese Fra nicht erledigen, ohne die Betrachtung auf Curven von höherer der zweiten Ordnung auszudehnen. Nur in einem besonderen Fall wenn nämlich jene Linien von einem Punkte einer gemeinschaft chen Sekante ausgehen, erscheint jenes Gesetz in der einfacher Gestalt von Kegelschnitten; und wir stossen hier auf eine höc eigenthümliche Wechselbeziehung zwischen mehreren Systemen v Kegelschnitten, welche zwar bereits in den Eigenschaften der s genannten **Orthogonal-Kreise**, aber noch nicht in allen ihr Momenten hervortritt.

Durch einen beliebigen Punkt $\mathfrak{s}$ der Sekante S, welche ei Schaar von Kegelschnitten $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D} \ldots$ nebst einer ihr zugeo neten S_1 gemein haben, mögen beliebig viele Gerade A, B, $D \ldots$ gehen, welche der Reihe nach die Wechselpunkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}$ $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}_1$; $\mathfrak{c}, \mathfrak{c}_1$; $\mathfrak{d}, \mathfrak{d}_1 \ldots$ enthalten. **Da jede dieser Geraden v zweien jener Kegelschnitte in diesen Punkten berüh wird,** so kann man allemal vom Punkte $\mathfrak{s}$ an einen derselbe z. B. $\mathfrak{A}$, zwei Tangenten legen, deren Berührungspunkte B, heissen mögen. Man denke sich von B (oder B_1) nach $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}$ $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}_1$; $\mathfrak{c}, \mathfrak{c}_1$; $\mathfrak{d}, \mathfrak{d}_1 \ldots$ die Strahlenpaare a, a'; b, b'; c, c'; $d, d' \ldots$ gezogen, welche $\mathfrak{A}$ in α, α_1; β, β_1; γ, γ_1; $\delta, \delta_1 \ldots$ schneiden, u sofort diese Punkte mit B_1 durch die Strahlen a'_1, a_1; b'_1, b c'_1, c_1; d'_1, d_1 verbunden. Da nun z. B. $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1$ zugeordnete harm nische Pole von A für $\mathfrak{A}$ sind, so muss die Sehne $\alpha\alpha_1$ durch d harmonischen Pol $\mathfrak{a}'$ von A für $\mathfrak{A}$ gehen, welcher übrigens au auf BB_1, der harmonischen Polare von $\mathfrak{s}$, liegt; also ist $\mathfrak{a}$ d Durchschnitt von a, a_1, so wie $\mathfrak{a}_1$ der von a', a'_1. Aus demselb Grunde geht ferner auch die Gerade A durch den harmonisch Pol $\mathfrak{a}''$ der Sehne $\alpha\alpha_1$ für $\mathfrak{A}$; und zieht man nun $B\mathfrak{a}''$, so s (nach einem Zusatze zu §. 3. 3.) die Strahlen $B\mathfrak{s}$, $B\mathfrak{a}''$ mit B $B\alpha_1$, also auch die Punkte $\mathfrak{s}, \mathfrak{a}''$ mit $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1$ harmonisch.

Nun aber sind je zwei Wechselpunkte $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1$ mit den, den g meinschaftlichen Sekanten S, S_1 angehörigen Punkten jedes harmonisch; also liegt der Punkt $\mathfrak{a}''$ auf S_1, und auf derselben nie ebenso auch alle ähnlichen Punkte $\mathfrak{b}'', \mathfrak{c}'', \mathfrak{d}'' \ldots$ Demna

gehen alle Sehnen $\alpha\alpha_1, \beta\beta_1, \gamma\gamma_1, \delta\delta_1 \ldots.$ durch einen festen Punkt, nämlich den harmonischen Pol $\mathfrak{a}'_0$ von S_1 für $\mathfrak{A}$; also bilden die Strahlenpaare a, a'; b, b'; c, c_1; d, $d_1 \ldots.$ eine Involution von Strahlen, und weil auch

$$B(a', b', c', d' \ldots.) = B_1(a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots.)$$

ist, so ist

$$B(a, b, c, d \ldots.) = B_1(a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots.)$$

oder vielmehr

$$B(a, b, c, d \ldots. a', b', c', d' \ldots.) = B_1(a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots. a'_1, b'_1, c'_1, d'_1 \ldots.);$$

dies heisst: alle Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$; $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}_1$; $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}_1$; $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{d}_1 \ldots.$ liegen sammt B, B_1 auf dem Umfange eines einzigen Kegelschnittes K.

Da die Sehnen $\alpha\alpha_1, \beta\beta_1, \gamma\gamma_1, \delta\delta_1 \ldots.$ durch den harmonischen Pol $\mathfrak{a}'_0$ der gemeinschaftlichen Sekante S_1 gehen, so wird S_1 von jedem Strahlenpaare a, a'; b, $b' \ldots.$ in zwei zugeordneten harmonischen Polen für $\mathfrak{A}$ und zugleich auch für $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D} \ldots.$ geschnitten; aber auch die Sehnen $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}\mathfrak{d}_1 \ldots.$ von K gehen durch einen festen Punkt $\mathfrak{s}$, und dieser ist offenbar der harmonische Pol von S_1 für K, indem je zwei Punkte $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{a}''$; $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{b}''$; $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{c}'' \ldots.$ resp. mit $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$; $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}_1$; $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}_1 \ldots.$ harmonisch sind; also wird S_1 von denselben Strahlenpaaren a, a'; b, b'; c, c'; d, $d' \ldots.$ auch in Bezug auf K in zugeordneten harmonischen Polen geschnitten.

Wählt man nun statt $\mathfrak{s}$ irgend einen anderen Punkt $\mathfrak{s}_1$, $\mathfrak{s}_2 \ldots.$ der gemeinschaftlichen Sekante S, so erhält man statt K einen ähnlichen Kegelschnitt K_1, $K_2 \ldots.$, in Bezug auf welchen das Gesagte ebenfalls gilt; also ist S_1 eine Gerade vereinigter Paare zugeordneter harmonischer Pole für sämmtliche Kegelschnitte $K, K_1, K_2 \ldots.$, d. h. eine gemeinschaftliche Sekante derselben, und zwar haben sie dieselbe zugleich mit jedem der Kegelschnitte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D} \ldots.$ gemein.

In den projektivischen Strahlbüscheln B, B_1 entsprechen dem gemeinschaftlichen Strahle BB_1 wechselseitig die Geraden $B_1\mathfrak{a}'_0$, $B\mathfrak{a}'_0$, welche nach dem harmonischen Pole $\mathfrak{a}'_0$ von S_1 für $\mathfrak{A}$ gehen, also sind diese Geraden Tangenten an K, und es ist BB_1 die harmonische Polare von $\mathfrak{a}'_0$ für K. Aber BB_1 geht, als harmonische Polare von $\mathfrak{s}$ für $\mathfrak{A}$, durch den harmonischen Pol $\mathfrak{a}_0$ von S für $\mathfrak{A}$, welcher mit $\mathfrak{a}'_0$ zugleich auf der den Sekanten S, S_1 zugeordneten Geraden P liegt; also sind diese Punkte ebensosehr zwei zugeordnete harmonische Pole von P für K, als für sämmtliche Wechselpunkt-Kegelschnitte des Systemes $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D} \ldots.$ (8); und da diese Punkte nur mit $\mathfrak{A}$ sich ändern, so sind sie es auch für K_1, $K_2 \ldots.$ Vertauscht man aber $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D} \ldots.$, so erhält man ähnliche Punktenpaare $\mathfrak{b}_0$, $\mathfrak{b}'_0$; $\mathfrak{c}_0$, $\mathfrak{c}'_0$; $\mathfrak{d}_0$, $\mathfrak{d}'_0 \ldots.$, von welchen in Bezug auf K, K_1, $K_2 \ldots.$, welche dieselben geblieben sind, Gleiches als von $\mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{a}'_0$ gelten muss; also ist auch P eine Gerade vereinigter Paare zugeordneter harmonischer Pole für K, K_1, $K_2 \ldots.$ d. h. eine Sekante, welche sie unter sich und mit jedem der Wechselpunkt-Kegelschnitte des Systemes $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D} \ldots.$ gemein haben.

Da endlich die Punkte $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{s}_1$, $\mathfrak{s}_2$ .... der Reihe nach die h monischen Pole von S_1 für K, K_1, K_2 .... sind, S_1 aber eine meinschaftliche Sekante dieser Kegelschnitte ist, so spielt die rade S für diese dieselbe Rolle, als P für $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$.... da je zwei zugeordnete harmonische Pole von S für $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$.... W selpunkte, und als solche die Durchschnitte von S mit je einem Kegelschnitte K, K_1, K_2 .... sind, so ist die Involution di Paare von Durchschnittspunkten mit der Involution der vereini Paare zugeordneter harmonischer Pole von S für $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ ...., f lich auch die Hauptpunkte der ersteren, d. h. die Punkte p, für K, K_1, K_2 ...., mit denen der letzteren, d. h. den gem schaftlichen Durchschnitten von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ .... identisch.

Nimmt man in der Ebene von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ .... einen Punkt a be an und verbindet ihn mit seinem Wechselpunkte a_1 durch ein rade A, welche S im Punkte $\mathfrak{s}$ schneidet, so erzeugt dieser $\mathfrak{s}$ einen Kegelschnitt K, welcher zur Schaar von K_1, K_2 und durch a geht. Also gehören alle Kegelschnitte, welc dieser Schaar einerlei gemeinschaftliche Sekanten haben, au sichtlich der übrigen Eigenschaften zu derselben.

Nimmt man endlich die Punkte $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{s}_1$, $\mathfrak{s}_2$ ...., statt auf der zugeordneten gemeinschaftlichen Sekante S_1 an, so erh ein von dem vorigen verschiedenes, aber in Bezug auf $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ mit denselben Eigenschaften als K, K_1, K_2 .... ausgestatt stem von Kegelschnitten K', K'_1, K'_2 ....; dieses hat mit die Sekante S und mit deren Wechselpunkt-Kegelschnitte kante P gemein. Bezeichnet man der Kürze wegen die steme von Kegelschnitten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ ....; K, K_1, K_2 ....; K' K'_2 .... durch $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}_1$ und schreibt S_2 statt P, so Reihe nach S und S_1, S_1 und S_2, S_2 und S zugeordnete gem schaftliche Sekanten des Systemes $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}_1$; jedes dieser Syste hat mit jedem der beiden anderen $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}_1$; $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$; $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}$ ein Sekante S_1, S; S_2, S_1; S, S_2 und mit dessen Wechselpunkt-Ke gelschnitten eine Sekante S, S_1; S_1, S_2; S_2, S gemein, und die Wechselpunkt-Kegelschnitte eines jeden haben die Gerade S_2, S, S_1 zur gemeinschaftlichen Sekante. Zieht man von einem beliebigen Punkte $\mathfrak{s}$ der Geraden S an sämmtliche Kegelschnitte des Systemes $\mathfrak{S}_2$ Tangenten, so liegen die Berührungspunkte auf einem Kegelschnitte des Systemes $\mathfrak{S}$, und die Tangenten, welche von einem beliebigen Punkte $\mathfrak{s}_2$ der S_2 an die Kegelschnitte von $\mathfrak{S}$ gelegt werden, berühren sie in Punkten, welche auf einem des Systems $\mathfrak{S}_2$ liegen u. s. w.

9. Hat eine Schaar von Kegelschnitten zwei zugeordnete reelle oder ideale Sekanten gemein, so liegen a) die Berührungspunkte aller Tangenten, die von einem beliebigen Punkte einer dieser Sekanten an jene Kegelschnitte gelegt werden, auf dem Umfange eines neuen Kegelschnittes, welcher mit ersteren	9. Hat eine Schaar von Kegelschnitten zwei zugeordnete reelle oder ideale Tangentendurchschnitte gemein, so umhüllen a) alle Tangenten derselben, deren Berührungspunkte mit einem dieser gemeinschaftlichen Tangentendurchschnitte in gerader Linie liegen, einen neuen Kegelschnitt, welcher mit erste

andere Sekante und mit en Wechselpunkt-Kegelnitten die Gerade P als ante gemein hat. b) Alle els der einzelnen Punkte r jener gemeinschaftli- Sekanten so erzeug- Kegelschnitte bilden zweite Schaar, welche rseits ebenfalls zwei ordnete reelle oder e Sekanten gemein han nämlich die eine, wel- sie mit jedem der ersten aar, und die andere, he sie mit jedem Wech- unkt-Kegelschnitte der en Schaar gemein haund ebenso haben auch Kegelschnitte der ern Schaar mit den Wech- punkt - Kegelschnitten zweiten jene Sekante mein, mittels deren letze erzeugt wurde.

c) Berücksichtigt man ch einander beide der eren Schaar gemeinschaftche Sekanten, so erhält an im Ganzen drei Schaan von Kegelschnitten, elche in vollkommener echselbeziehung zu einnder stehen, nämlich je wei dieser Schaaren haben llemal unter sich und mit en Wechselpunkt - Kegelchnitten der dritten Schaar ine von drei bestimmten eraden zur gemeinschaftichen Sekante; jeder Keelschnitt der einen schneiet alle Kegelschnitte der weiten oder der dritten chaar in den Berührungsunkten solcher Tangenten er beiden letzteren, welhe in zwei Punkten der en Wechselpunkt - Kegelchnitten der ersten Schaar emeinschaftlichen Sekante onvergiren; und es kann lso eine jede dieser drei chaaren als diejenige anren den anderen Tangentendurchschnitt und mit deren Wechselstrahlen - Kegelschnitten den Tangentendurchschnitt p gemein hat. b) Alle mittels der einzelnen Strahlen eines jener gemeinschaftlichen Tangentendurchschnitte so erzeugten Kegelschnitte bilden eine zweite Schaar, welche ihrerseits ebenfalls zwei zugeordnete reelle oder ideale Tangentendurchschnitte gemein haben, nämlich den einen mit jedem Kegelschnitte der ersten Schaar und den anderen mit jedem Wechselstrahlen-Kegelschnitte dieser Schaar zugleich; und ebenso haben auch die Kegelschnitte der ersten Schaar mit den Wechselstrahlen-Kegelschnitten der zweiten jenen Tangentendurchschnitt gemein, mittels dessen Strahlen letztere erzeugt wurde.

c) Berücksichtigt man nacheinander beide der ersten Schaar gemeinschaftliche Tangentendurchschnitte, so erhält man im Ganzen drei Schaaren von Kegelschnitten, welche in vollkommener Wechselbeziehung zu einander stehen, nämlich: je zwei dieser Schaaren haben allemal unter sich und mit den Wechselstrahlen-Kegelschnitten der dritten Schaar einen von drei bestimmten Punkten zum gemeinschaftlichen Tangentendurchschnitt; jeder Kegelschnitt der einen hat mit sämmtlichen Kegelschnitten der zweiten oder der dritten Schaar solche Tangenten gemein, deren Berührungspunkte auf zwei Strahlen des den Wechselstrahlen-Kegelschnitten der

gesehen werden, aus welcher die beiden anderen entsprungen sind.

ersten Schaar gen lichen Tange schnittes liegen kann also eine j drei Schaaren al angesehen werde cher die beide entsprungen sind.

Diese drei Schaar sollen drei Wechsel-System gelschnitten mit zwei zugeordneten gemeinsc Sekanten oder Tangentendurchschnitten, und einzelne ein Wechsel-System der beiden ande werden.

Sind die Kegelschnitte der oben zu Grunde gele $\mathfrak{S}_2$ (links) ähnlich und ähnlichliegend, so haben sie und mit denen der Schaar $\mathfrak{S}$ (oder $\mathfrak{S}_1$) eine unendli Sekante S_1 gemein; folglich gehen die harmonischen P beliebigen Punktes von S_1 für sämmtliche Kegelschn und $\mathfrak{S}$, d. h. alle Durchmesser derselben, deren zugeo jenem Punkte gerichtet sind, nach einem und demsel Punkte von S_1, sind also unter sich, sowie jene unter lel. Demnach sind auch alle Kegelschnitte von $\mathfrak{S}$ u und mit denen von $\mathfrak{S}_2$ ähnlich und ähnlichliegend (§ kehrung).

Die dritte Schaar $\mathfrak{S}_1$ dagegen besitzt keine sol S_1; weil aber die harmonischen Pole ihrer gemeinscha kanten S und S_2 in Bezug auf alle ihre Kegelschnitte lich-entfernten Geraden S_1 angehören, so sind S und messer aller dieser Kegelschnitte, welche demnach sein müssen.

10. **Hat eine Schaar ähnlicher und ähnlic der Kegelschnitte ausser der unendlich-entfer eine zweite Sekante gemein, so besteht das Wechsel-Systeme ebenfalls aus ähnlichen und liegenden Kegelschnitten, und zwar sind sie d nur unter sich, sondern auch mit ersteren zug gegen besteht das andere aus lauter concentri gelschnitten, deren gemeinschaftliche Sekan Durchmesser sind.**

11. **Die beiden Wechsel-Systeme einer Sc Kegelschnitten, welche zwei Durchmesser zu neten gemeinschaftlichen Sekanten haben, bes jedes für sich und beide unter einander aus la lichen und ähnlich-liegenden Kegelschnitten.**

Jenachdem die unendlich-entfernte gemeinschaftlic S_1 von $\mathfrak{S}_2$ und $\mathfrak{S}$ reell oder ideal ist, ist es auch die selpunkt-Kegelschnitte von $\mathfrak{S}_1$, und es besitzen folglic teren im ersten Falle entweder zwei reelle oder zwei zweiten aber allemal eine reelle und eine ideale gemein Sekante S, S_2. Besteht also $\mathfrak{S}_2$ und folglich auch $\mathfrak{S}$ Ellipsen, wo S_1 ideal sein muss, so besteht $\mathfrak{S}_1$ aus lau beln, indem der gemeinschaftliche Mittelpunkt jetzt auss Kegelschnitte von $\mathfrak{S}_1$ liegen muss. Da nun jede Gera

stem von Kegelschnitten mit zwei zugeordneten gemeinschaftlichen Sekanten in solchen Punktenpaaren schneidet, welche eine Involution von Punkten bilden, und hierzu auch die Durchschnittspunkte der gemeinschaftlichen Sekanten als zugeordnete gehören; da ferner die Berührungspunkte der Tangenten, welche von einem Punkte p an ein solches System gezogen werden, in einer Geraden P liegen, also auch diese Tangentenpaare sammt den gemeinschaftlichen Sekanten eine Involution von Strahlen bilden, diese Tangentenpaare aber im Falle des Systemes $\mathfrak{S}_1$ die Asymptoten der betreffenden Kegelschnitte sind, so bilden die Asymptotenpaare dieser Schaar $\mathfrak{S}_1$ eine Involution von Strahlen, und zwar besteht diese nothwendig aus gleichliegenden Gebilden, wenn es keine Gerade P_1, P_2 giebt, d. h. wenn $\mathfrak{S}_1$ eine reelle und eine ideale gemeinschaftliche Sekante besitzt.

Besteht nun die Schaar $\mathfrak{S}_2$ aus lauter Kreisen, so stehen S und S_2 senkrecht auf einander; denn in diesem Falle ist S_2 die harmonische Polare des unendlich-entfernten Punktes von S für alle jene Kreise, und je zwei zugeordnete Durchmesser eines Kreises sind rechtwinklig zu einander. Also bilden die Asymptotenpaare der Kegelschnitte von $\mathfrak{S}_1$ eine Involution der rechten Winkel, indem ausser S und S_2 auch noch die Achsen dieser Involution zu einander rechtwinklig sind.

12. Hat eine Schaar von Kreisen ausser der unendlich-entfernten noch eine zweite Sekante gemein, so liegen a) die Berührungspunkte aller Tangenten, welche von einem beliebigen Punkte dieser zweiten Sekante an dieselben gezogen werden, auf einem neuen Kreise, dessen Mittelpunkt jener beliebige Punkt ist; und alle diese Kreise, welche den verschiedenen Punkten der zweiten gemeinschaftlichen Sekante entsprechen, haben die Centrallinie der ersteren zur gemeinschaftlichen Sekante, welche reell oder ideal ist, jenachdem die der ersteren ideal oder reell ist, und sowie erstere von jedem der letzteren, so werden auch letztere von jedem der ersteren in den Berührungspunkten solcher Tangenten geschnitten, welche im Mittelpunkte desselben convergiren. b) Die Berührungspunkte aller Tangenten jener ersteren Kreise, welche eine und dieselbe parallele Richtung haben, liegen auf einer gleichseitigen Hyperbel, und alle diese gleichseitigen Hyperbeln, welche den verschiedenen Richtungen der Ebene entsprechen, sind concentrisch und haben mit jenen Kreisen die zweite Sekante und mit der zweiten Schaar von Kreisen die Centrallinie der ersteren als Sekante, und zwar beide als Durchmesser, gemein. c) Diese Schaar gleichseitiger Hyperbeln bleibt dieselbe, sie mag nun aus der ersten oder aus der zweiten Schaar von Kreisen abgeleitet werden u. s. w.

§. 7.

Construction und Eigenschaften eines Systems von Kegelschnitten, welche nur eine Sekante und nur einen ihr zugeordneten Tangentendurchschnitt gemein haben.

1. Wenn eine Gerade als Richtungslinie einer Involution von Punkten, und ein Punkt als Mittelpunkt einer Involution von Strahlen beliebig gegeben sind, einen Kegelschnitt zu finden, für welchen die eine jener beiden Involutionen eine Involution zugeordneter harmonischer Pole, die andere eine Involution zugeordneter harmonischer Polaren sei,

und für welchen die harmonische Polare jenes Punktes durch einen zweiten beliebig gegebenen Punkt gehe.	**und für welchen der harmonische Pol jener Geraden auf einer zweiten beliebig gegebenen Geraden liege.**

Auflösung (links). Sind auf der gegebenen Geraden S die involutorischen Punktenpaare $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1; \mathfrak{b}, \mathfrak{b}_1 \ldots.$, und um den gegebenen Punkt s die involutorischen Strahlenpaare $a, a_1; b, b_1 \ldots.$ beliebig gegeben, und schneiden letztere die Gerade S in den Punkten $\mathfrak{a}', \mathfrak{a}'_1; \mathfrak{b}', \mathfrak{b}'_1 \ldots.$, so suche man das gemeinschaftliche Paar zugeordneter Punkte p, q der Involutionen von $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1; \mathfrak{b}, \mathfrak{b}_1 \ldots.$ und von $\mathfrak{a}', \mathfrak{a}'_1; \mathfrak{b}', \mathfrak{b}'_1 \ldots.$, verbinde **einen beliebigen** dieser Punkte, z. B. p, mit dem zweiten gegebenen Punkte $\mathfrak{i}$ durch eine Gerade N, und den anderen, q, mit s durch eine Gerade P. Jetzt wähle man ein beliebiges Paar der Strahlen $a, a_1; b, b_1 \ldots.$, z. B. a, a_1, und verbinde den Punkt α_1, wo z. B. a_1 die N schneidet, mit dem Punkte α_2, der in der Involution von $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1; \mathfrak{b}, \mathfrak{b}_1 \ldots.$ dem Durchschnitte $\mathfrak{a}'$ von a und S zugeordnet ist, durch eine Gerade a_2, welche P in α schneide.

Besteht nun a) die gegebene Involution von Strahlen aus ungleichliegenden Gebilden, so suche man deren Hauptstrahlen g, h, welche die N in $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ schneiden mögen; verbinde einen dieser Punkte $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$, z. B. $\mathfrak{g}$, mit α durch eine Gerade, welche S in $\mathfrak{s}$ schneide, suche zu $\mathfrak{s}, \alpha, \mathfrak{g}$ den vierten harmonischen, dem $\mathfrak{g}$ zugeordneten Punkt $\mathfrak{g}_1$ und construire einen Kegelschnitt $\mathfrak{A}$, welcher g und h in $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ berührt und durch $\mathfrak{g}_1$ geht; so ist $\mathfrak{A}$ der gesuchte, und zwar N harmonische Polare von s für $\mathfrak{A}$.

Besteht aber b) jene Involution aus gleichliegenden Gebilden, so suche man, wenn s_1 der Durchschnitt von P und N ist, zwei Punkte B, B_1, welche sowohl mit s, s_1 als mit q, α harmonisch sind, und verbinde einen jeden derselben mit den Punktenpaaren $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1; \mathfrak{b}, \mathfrak{b}_1 \ldots.$ durch die Strahlen a', a'' und $a'_1, a''_1; b', b''$ und $b'_1, b''_1 \ldots.$, so gehören die Punkte B, B_1 und die Durchschnitte je zweier Strahlen a' und a''_1; a'' und a'_1; b' und b''_1; b'' und $b'_1 \ldots.$ dem Umfange des gesuchten Kegelschnittes $\mathfrak{A}$ an. Liegen s, s_1 abwechselnd zu q, α, so existiren keine Punkte B, B_1 und kein Kegelschnitt $\mathfrak{A}$.

Beweis. a) Da $\mathfrak{A}$ die g, h in $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ berührt, so ist N harmo-

nische Polare von s, und da g, h die Hauptstrahlen der gegebenen Involution sind, so ist diese eine Involution zugeordneter harmonischer Polaren für $\mathfrak{A}$. Ferner ist, weil sp, sq ein zugeordnetes Paar dieser Involution, P die harmonische Polare von p, also auch p, q zugeordnete harmonische Pole von S. Da ferner $\mathfrak{s}$, α mit $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_1$ harmonisch, so geht die harmonische Polare von $\mathfrak{s}$ durch α; durch denselben Punkt geht aber auch die harmonische Polare von p; also ist α der harmonische Pol von S. Demnach geht auch die harmonische Polare von $\mathfrak{a}'$ durch α, zugleich aber auch durch den harmonischen Pol α_1 von α, welcher im Durchschnitte von α_1 und N liegen muss, fällt also mit α_2 zusammen. Nun sind zwei zugeordnete Punktenpaare p, q und $\mathfrak{a}'$, α_2 der gegebenen Involution zugeordnete harmonische Pole von S für $\mathfrak{A}$; also gilt dasselbe von allen solchen Paaren.

b) Giebt es unter den jetzigen Bedingungen einen Kegelschnitt $\mathfrak{A}$, so geht die harmonische Polare von p durch q, aber auch durch den harmonischen Pol von sp, welcher auf sq liegt, fällt also mit P zusammen. Ferner geht die harmonische Polare von $\mathfrak{a}'$ durch α_2, aber auch durch den harmonischen Pol von α, welcher im Durchschnitte von α_1 und N liegt, — denn die harmonische Polare von s geht durch $\mathfrak{i}$ und p — fällt also mit α_2 zusammen. Folglich ist α der harmonische Pol von S, und da nun α, q und s, s_1 zugeordnete harmonische Pole von P sind, und die Gerade P den Kegelschnitt durchschneiden muss, weil die gegebene Involution von Strahlen aus gleichliegenden Gebilden besteht, folglich s innerhalb $\mathfrak{A}$ liegt, so giebt es nothwendig zwei Punkte B, B_1. Giebt es also keine Punkte B, B_1, so giebt es auch keinen Kegelschnitt $\mathfrak{A}$. Doch sieht man in diesem Falle, wo s, s_1 mit q, α abwechseln, dass dies nicht stattfinden würde, wenn man nur den Punkt $\mathfrak{i}$ auf die andere Seite von S verlegte.

Da nun $B(a', b', c', d' \ldots . a'', b'', c'', d'' \ldots .) \equiv S(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots . \mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1 \ldots .) = S(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1 \ldots . \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots .) \equiv B_1(a''_1, b''_1, c''_1, d''_1 \ldots . a'_1, b'_1, c'_1, d'_1 \ldots .)$, so ist $B(a', b', c', d' \ldots . a'', b'', c'', d'' \ldots .) = B_1(a''_1, b''_1, c''_1, d''_1 \ldots . a'_1, b'_1, c'_1, d'_1 \ldots .)$, also liegen die Durchschnitte von a', $a''_1 \ldots .$ und B, B_1 auf einem Kegelschnitte, und da auch p, q zu $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$; $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}_1 \ldots .$ gehören, so sind Bp, B_1p Tangenten desselben, und P harmonische Polare von p. Daher geht die harmonische Polare von s durch p und, weil s, s_1 mit B, B_1 harmonisch, auch durch s_1, fällt also mit N zusammen. Ebenso geht die harmonische Polare von α durch p und, weil q, α mit B, B_1 harmonisch, durch q, fällt also mit S zusammen. Und da nun BB_1 durch den harmonischen Pol von S geht, so schneiden je zwei Strahlen a', a''_1; b', $b''_1 \ldots .$ die S in zugeordneten harmonischen Polen.

Die harmonische Polare von $\mathfrak{a}'$ geht also durch α_2 und auch durch den harmonischen Pol α von S, fällt also mit α_2 zusammen; sie geht aber auch durch den harmonischen Pol von α, der auf N liegt; also ist α_1 dieser Pol, und α_1 zugeordnete harmonische Polare von α. Es haben also die gegebene Involution von Strahlen und die der zugeordneten harmonischen Polaren von s zwei zugeordnete Paare α, α_1 und sp, sq gemein, sind also identisch; w. z. w.

Man denke sich nun die Involutionen auf S und um s mittels eines beliebigen Kegelschnittes gegeben, den Punkt $\mathfrak{i}$ aber verän-

derlich, und zwar jedesmal sowohl mit q als mit p verbunden, so überzeugt man sich ganz streng von folgendem Satze:

2. **Ist ein Kegelschnitt, eine Gerade und ein Punkt beliebig gegeben, so giebt es allemal unzählige Kegelschnitte, welche mit ersterem jene Gerade als Sekante und diesen Punkt als Tangentendurchschnitt gemein haben; es bilden aber diese Kegelschnitte zwei besondere Gruppen, welche sich dadurch von einander unterscheiden, dass die harmonischen Polaren des gemeinschaftlichen Tangentendurchschnittes in Bezug auf die Kegelschnitte der einen Gruppe in einem und demselben Punkte der gemeinschaftlichen Sekante, und die harmonischen Polaren desselben Punktes in Bezug auf die der anderen Gruppe in einem anderen Punkte dieser Sekante convergiren, und dass zu gleicher Zeit die harmonischen Pole der gemeinschaftlichen Sekante in Bezug auf die der ersten oder zweiten Gruppe zwei verschiedenen Geraden angehören, welche den gemeinschaftlichen Tangentendurchschnitt beziehlich mit dem zweiten oder ersten jener Punkte verbinden.**

Denkt man sich zur Construction dieser Kegelschnitte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$.... immer dasselbe Strahlenpaar α, α_1 gebraucht, so bleiben ausser dem Punkte p auch noch die Punkte $\mathfrak{a}'$ und α_2 unverändert, und es erscheint α_1 als der perspektivische Durchschnitt zweier Strahlbüschel, deren einer von den harmonischen Polaren A, B, C, D.... des Punktes s, der andere von den harmonischen Polaren a_2, b_2, c_2, d_2.... des Punktes $\mathfrak{a}'$ für $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$.... gebildet wird. Nun aber gehen a_2, b_2, c_2, d_2.... durch die harmonischen Pole $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.... von S, und diese liegen in einer Geraden P; also lässt sich behaupten:

3. **Hat eine Schaar von Kegelschnitten eine Sekante und einen ihr zugeordneten Tangentendurchschnitt gemein, so bilden in Bezug auf alle diese Kegelschnitte die harmonischen Polaren dieses Punktes und die harmonischen Pole jener Geraden zwei projektivische Gebilde, in welchen allemal zwei demselben Kegelschnitte zugehörige Elemente sich entsprechen, und insbesondere entspricht der gemeinschaftlichen Sekante ein auf ihr selbst enthaltener Punkt, und dem gemeinschaftlichen Tangentendurchschnitt ein nach ihm selbst gerichteter Strahl.**

Eine beliebige Gerade A werde von der gemeinschaftlichen Sekante S von $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$.... im Punkte $\mathfrak{s}$ und von den harmonischen Polaren a', b', c', d'.... ihres gemeinschaftlichen Tangentendurchschnittes s in den Punkten $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$.... geschnitten, wobei vorausgesetzt wird, dass a', b', c'.... durch einerlei Punkt p gehen; es seien a, b, c, d.... die harmonischen Polaren der Punkte $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$.... für $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$...., welche also sämmtlich durch t gehen müssen; und a_1, b_1, c_1, d_1.... seien die Strahlen, welche von s nach $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$.... gehen; endlich seien a'', b'', c'', d''.... die harmonischen Polaren des Punktes $\mathfrak{s}$ für $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$...., welche also sämmtlich durch einerlei Punkt B'' von S und einzeln durch die harmonischen Pole $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.... von S für $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$.... gehen müssen. Diess vorausgesetzt, so schneiden sich je zwei Strah-

den $a, a''; b, b''; c, c''; d, d'' \ldots$ im harmonischen Pole von A für $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D} \ldots$; aber die Strahlen $a, b, c, d \ldots$ bilden einen Strahlbüschel s oder B, welcher mit dem von $a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots$ gebildeten B_1 involutorisch ist — denn je zwei Strahlen $a, a_1 \ldots$ sind zugeordnete harmonische Polaren von s —, der letztere wieder ist mit dem von $a', b', c', d' \ldots$ gebildeten p oder B' perspektivisch, und dieser dem vorigen Satze zufolge mit dem von $a'', b'', c'', d'' \ldots$ gebildeten B'' projektivisch; also ist auch $B(a, b, c, d \ldots) = B''(a'', b'', c'', d'' \ldots)$. Bedenkt man nun, dass in den Strahlbüscheln B, B_1, B', B'' der Reihe nach sich die Strahlen sB'', $s\mathfrak{S}$, S und wieder sq (oder P), sp, sp, $B''s$ entsprechen, so erhält man links, und ähnlicher Weise rechts, den Satz:

4. Hat eine Schaar von Kegelschnitten eine reelle oder ideale Sekante und einen reellen oder idealen Tangentendurchschnitt gemein,

so liegen die harmonischen Pole einer beliebigen Geraden ihrer Ebene in Bezug auf alle diese Kegelschnitte auf zwei Kegelschnitten, deren jeder die gemeinschaftliche Sekante in demjenigen Punkte berührt, dessen harmonische Polaren auf jener Geraden convergiren, und denen jeder im gemeinschaftlichen Tangentendurchschnitte diejenige Gerade berührt, welche die harmonischen Pole der gemeinschaftlichen Sekante für die betreffende Gruppe von Kegelschnitten enthält; so dass also sämmtliche Kegelschnitte, welche den verschiedenen Geraden der Ebene entsprechen, die gemeinschaftliche Sekante der ersten Schaar paarweise in einem und demselben Punkte, und ausserdem im gemeinschaftlichen Tangentendurchschnitte, in zwei besondere Gruppen getrennt, zwei besondere Geraden berühren.

so umhüllen die harmonischen Polaren eines beliebigen Punktes ihrer Ebene in Bezug auf alle diese Kegelschnitte zwei Kegelschnitte, deren jeder im gemeinschaftlichen Tangentendurchschnitte diejenige Gerade berührt, deren harmonische Pole mit jenem Punkte in gerader Linie liegen, und deren jeder die gemeinschaftliche Sekante in demjenigen Punkte berührt, welcher die harmonischen Polaren des gemeinschaftlichen Tangentendurchschnittes für die betreffende Gruppe von Kegelschnitten vereinigt; so dass also sämmtliche Kegelschnitte, welche den verschiedenen Punkten der Ebene entsprechen, im gemeinschaftlichen Tangentendurchschnitte paarweise einerlei Gerade, und ausserdem die gemeinschaftliche Sekante, in zwei besondere Gruppen getrennt, in zwei besonderen Punkten berühren.

Rückt man die Gerade A (links) und den Punkt (rechts) ins Unendliche hinaus, so erhält man die besonderen Aussagen:

5. Hat eine Schaar von Kegelschnitten eine reelle oder ideale Sekante und einen reellen oder idealen Tangentendurchschnitt gemein,

so sind die Mittelpunkte aller dieser Kegelschnitte auf die Umfänge zweier Kegelschnitte vertheilt, deren jeder die gemeinschaftliche Sekante im Mittelpunkte ihrer Involution zugeordneter harmonischer Pole, und ausserdem im gemeinschaftlichen Tangentendurchschnitte diejenige Gerade berührt, welche die harmonischen Pole der gemeinschaftlichen Sekante für die betreffende Gruppe von Kegelschnitten enthält*).

so umhüllen die Durchm
ser aller dieser Keg
schnitte, deren zugeordn
einander parallel sind, zv
Kegelschnitte, deren je
im gemeinschaftlichen T
gentendurchschnitte die
nige Gerade berührt, de
harmonische Pole in ei
mit jenen Durchmessern
rallelen Geraden lieg
und ausserdem die geme
schaftliche Sekante in de
jenigen Punkte, welc
die harmonischen Pola
des gemeinschaftlich
Tangentendurchschnitt
für die betreffende Gru
von Kegelschnitten ver
nigt.

Es seien S, S_1 zwei zugeordnete gemeinschaftliche Sekan
zweier Kegelschnitte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, und s ein denselben zugeordneter
meinschaftlicher Tangentendurchschnitt; ferner seien a, b die h
monischen Polaren von s für $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$; durch s gehe ein beliebi
Strahl, welcher $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}_1$ schneide; endlich seien
a'_1; b', b'_1 die Tangenten in $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$; $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}_1$, deren erstere sich in
letztere in β_1 schneiden; so sind die Geraden a, b mit S, S_1 h
monisch (§. 5. 5. e.), und die auf a, b liegenden Punkte α_1,
gehören einerlei Strahle von s an, nämlich der zugeordneten har
nischen Polare von $s\mathfrak{a}$ für $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zugleich. Es werde nun e
beliebige von jenen vier Tangenten, z. B. a', von S, S_1 in $\mathfrak{s}$,
von b', b'_1 in σ, σ_1 und von b in β_2 geschnitten, so sind 1)
Punkte $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{s}_1$ mit α_1, β_2 harmonisch, weil S, S_1 mit a, b harr
nisch, und 2) wenn $\mathfrak{a}_2$ derjenige Punkt ist, in welchem die h
monische Polare von $\mathfrak{a}$ für $\mathfrak{B}$ die Tangente a' schneidet, so s
$\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_2$ Wechselpunkte für $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, also die Punkte $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{s}_1$ auch mi
$\mathfrak{a}_2$ harmonisch (Corollar zu §. 5. 12.). Ebenso aber auch sind
Punkte σ, σ_1 1) mit den Punkten α_1, β_2 harmonisch, weil die
raden b', b'_1 mit $s\beta_1$, b es sind, und 2) auch mit den Punkten $\mathfrak{a}$,
weil die harmonische Polare von $\mathfrak{a}$ für $\mathfrak{B}$ durch β_1, den harm
schen Pol von sb für $\mathfrak{B}$, und durch $\mathfrak{a}_2$ geht, also die Gera
b', b'_1 mit $\beta_1\mathfrak{a}$, $\beta_1\mathfrak{a}_2$ harmonisch sind. Hieraus folgt, dass die Pu
tenpaare $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{s}_1$ und σ, σ_1 identisch sind, d. h. dass die Tangen
a' und b' auf S, und die anderen a' und b'_1 auf S_1 convergi
u. s. w.

6. Legt man durch einen reellen oder idealen gemeinschaftlichen Tangentendurchschnitt zweier be-

6. Zieht man von irge
einem Punkte einer reel
oder idealen gemeinscha
lichen Sekante zweier

*) Hiernach sind die im 3ten Theil des Archivs S. 232. und 235. ste
den Sätze zu verallgemeinern und noch ferner zu berichtigen.

iebiger Kegelschnitte irgend eine Gerade, welche eden derselben in zwei unkten schneidet, so bilen die Tangenten in dieen Punkten ein vollständies Vierseit, dessen eine iagonale mit dem Wechelstrahle jener Geraden, ie beiden anderen mit den nem Tangentendurchchnitte zugeordneten geeinschaftlichen Sekanten eider Kegelschnitte zuammenfallen.

liebiger Kegelschnitte an dieselben zwei Paar Tangenten, so bilden deren Berührungspunkte ein vollständiges Viereck, von dessen Gegenseiten das eine Paar im Wechselpunkte jenes Punktes, die beiden anderen in den jener Sekante zugeordneten gemeinschaftlichen Tangentendurchschnitten beider Kegelschnitte convergiren.

7. **Hat eine Schaar von Kegelschnitten eine reelle der ideale Sekante und einen ihr zugeordneten reellen der idealen Tangentendurchschnitt gemein,**

o bilden die Tangenten aller dieser Kegelschnitte, eren Berührungspunkte mit dem gemeinschaftlichen Tangentendurchschnitte n gerader Linie liegen, wei Strahlbüschel, deren Mittelpunkte auf der geeinschaftlichen Sekante liegen.

so bilden die Berührungspunkte der Tangenten, welche von einem beliebigen Punkte der gemeinschaftlichen Sekante an alle diese Kegelschnitte gelegt werden, zwei Gerade, welche nach dem gemeinschaftlichen Tangentendurchschnitte gerichtet sind.

Da nun von allen diesen Tangenten (links) je zwei demselben Kegelschnitte angehörige sich auf dem Wechselstrahle der Geraden, welche ihre Berührungspunkte enthält, schneiden, und allemal die eine dem einen, die andere dem anderen der erwähnten zwei Strahlbüschel angehört, so folgt zunächst:

8. **In jedem Strahle des gemeinschaftlichen Tangentendurchschnittes der erwähnten Schaar von Kegelschnitten fallen zwei projektivische Gerade zusammen, deren entsprechende Punktenpaare allemal einerlei Kegelschnitte auf bestimmte Weise angehören, und zwar sind sowohl im gemeinschaftlichen Tangentendurchnitte als auf der geinschaftlichen Sekante sprechende Punkte verigt.**

8. **Jeder Punkt der gemeinschaftlichen Sekante der genannten Schaar von Kegelschnitten ist der Mittelpunkt zweier projektivischen Strahlbüschel, deren entsprechende Strahlenpaare allemal zwei Tangenten eines und desselben Kegelschnittes sind; und zwar sind sowohl auf der gemeinschaftlichen Sekante als im gemeinschaftlichen Tangentendurchschnitte entsprechende Strahlen vereinigt.**

Und da aus dem zuletzt Bemerkten zugleich folgt, dass
der der beiden Strahlbüschel (links) mit dem von den harmoni
Polaren des gemeinschaftlichen Tangentendurchschnittes gebi
perspektivisch ist, und da dasselbe von allen anderen dergl
Strahlbüscheln gilt; da diese also alle mit einem und dem
Strahlbüschel p, also auch unter einander projektivisch, und
weil im gemeinschaftlichen Strahle entsprechende sich verei
perspektivisch sind, so folgt weiter:

9. Alle Strahlen des gemeinschaftlichen Tangentendurchschnittes sind auf vierfache Weise in Ansehung der Punkte, in welchen sie die genannten Kegelschnitte schneiden, perspektivisch, und zwar liegen bei je zwei Strahlen die vier Projektionspunkte auf der gemeinschaftlichen Sekante.

9. Je zwei Punkte de meinschaftlichen Sek sind die Mittelpunkte Strahlbüscheln, welch vierfache Weise in A hung der an die genan Kegelschnitte gehe Tangenten perspekti sind, und zwar gehen vier perspektivis Durchschnitte durch gemeinschaftlichen gentendurchschnitt.

Hieran würden sich nun noch eine grosse Menge von S
über Systeme von Kegelschnitten mit einer gemeinschaftl
Sekante oder mit einem gemeinschaftlichen Tangentendurchsc
und über die dieselben berührenden Kegelschnitte, über Oscul
und doppelte Berührung, durch welche letztere erst die bishe
wickelten Eigenschaften in ihrer grössten Allgemeinheit und in
eigentlichen Wesen sich darstellen, endlich Constructionen de
gelschnitte mittels sogenannter imaginärer Bedingungselemen
anschliessen. Indessen das hier Mitgetheilte scheint dem im
gange angegebenen Zwecke zu genügen. Der berühmte Entd
der Gesetze, welche hier angewandt worden, hat dieselben di
nere Natur der Sache genannt; dass sie dieses sind, d. h.
sie in Einem zugleich Princip, Methode und Gegens
der fortschreitenden Betrachtung sind, dafür dürften die Eigens
ten der involutorischen Gebilde, so unvollkommen sie hier
immer dargestellt worden, als ein Belag mehr erscheinen.

XIX.

Beiträge zur systematischen Darstellung der allgemeinen Arithmetik.

Von

Herrn L. Ballauff,

Lehrer der Mathematik an der Bürgerschule zu Varel.

A. Grössen und einfache Behandlungszeichen.

§. 1. Die in der Arithmetik vorausgesetzten Grundbegriffe sind:

1) Der Begriff der Grösse.
2) Der Begriff der Gleichheit zweier Grössen.
3) Der Begriff des Addirens einer Grösse zu, und des Subtrahirens einer Grösse von einer andern.

Als Postulat wird verlangt:

1) Die Gleichheit zweier Grössen erkennen zu können.
2) Eine Grösse zu einer andern addiren und von derselben subtrahiren zu können, wenn beides möglich ist.

Zwei Grössen heissen **gleichartig**, wenn sich die eine zu der andern addiren und von derselben subtrahiren lässt. Es kann nur zwischen gleichartigen Grössen von Gleichheit oder Ungleichheit die Rede sein.

§. 2. Die in §. 1. angegebenen Grundbegriffe sind keiner eigentlichen Definition fähig. Es muss aber durch Grundsätze so viel von ihnen ausgesagt werden, dass der Umfang derselben vollkommen festgestellt ist. Die Gesammtheit dieser Grundsätze ersetzt also eine Definition der obigen Begriffe; sie kann aber nicht als eine eigentliche Definition betrachtet werden, da ihr die Form einer solchen fehlt und da keine Auflösung der §. 1. angegebenen Postulate aus ihr hergeleitet werden kann.

Die zur Feststellung der obigen Grundbegriffe dienenden Grundsätze sind aber ebenso willkührlich, wie jede eigentliche Definition der Arithmetik. Man rechnet eben nur solche Dinge zu den Grössen, man nennt nur solche Verknüpfungen zwischen Grössen Addition und Subtraktion, die diesen Grundsätzen genügen. So wie aber die allgemeinen Sätze der Arithmetik auf eine besondere Art von Grössen angewandt werden sollen, muss erst nachgewiesen werden, dass auch jenen Grundsätzen durch die betreffenden Definitionen genügt sei.

Vorläufig sollen hier folgende Sätze als Grundsätze aufgestellt werden:

I) Sind A, B, C gleichartig, so ist auch $A \pm B \pm C$ mit A B und C gleichartig.

II) Aus den Gleichungen $A = B$, $B = C$ folgt die Gleichung $A = C$.

III) Es ist $A + B - C = A - C + B = B + A - C$ etc.

IV) Aus $A = A'$, $B = B'$, $C = C'$ folgt $A \pm B \pm C = A' \pm B' \pm C'$.

V) Es ist $A - B + B = A$, also auch $A + B - B = A$.

VI) Es ist $A + (B \pm C \pm D) = A + B \pm C \pm D$.

Aus diesen Sätzen folgt der Lehrsatz:

$$\text{VII)}\ A - (B \pm C \pm D) = A - B \mp C \mp D.$$

Alle diese Sätze gelten aber nur unter der Voraussetzung, dass die einzelnen vorkommenden Summen und Differenzen möglich sind.

Dass diese Grundsätze keinen Widerspruch in sich selbst enthalten (die einzige Bedingung, die die willkührliche Aufstellung derselben beschränkt), folgt daraus, dass sie z. B. für Längen gelten.

§. 3. Ein Behandlungszeichen ist ein Zeichen, welches vorschreibt, dass mit einer Grösse gewisse Veränderungen vorgenommen werden sollen, durch welche eine mit der behandelten gleichartige Grösse entsteht.

Die kleinen Buchstaben sollen in dem Folgenden Behandlungszeichen, die grossen Grössenzeichen sein. Für beide gilt die bekannte Beschränkung, dass in einer Untersuchung ein und derselbe Buchstabe eine und dieselbe Grösse oder eine und dieselbe Behandlung einer Grösse bezeichnet.

Das Produkt $X \cdot a$ oder aX bezeichnet eine Grösse, welche entsteht, wenn man X nach der Vorschrift von a behandelt.

Der Quotient $X : a$ oder $\frac{X}{a}$ bezeichnet eine Grösse, deren Produkt in $a = X$ ist, so dass man also hat: $X : a \cdot a = X$.

Es muss besonders hervorgehoben werden, dass der Multiplikand oder die Einheit des Produktes, so wie der Dividend des Quotienten immer ein G r ö s s e n z e i c h e n; der Multiplikator oder Divisor immer ein Behandlungszeichen ist. Das Produkt oder der Quotient bezeichnet eine mit dem Multiplikanden oder Dividenden gleichartige Grösse.

Die Gleichung zwischen zwei Behandlungszeichen: $a = b$ bezeichnet, dass die Produkte $X \cdot a$ und $X \cdot b$ gleiche Grössen sind (bezeichnen), welche Grösse auch X bezeichnet. Bezeichnet E eine bestimmte Grösse, so darf man aus der Gleichheit von $E \cdot a$ und $E \cdot b$ noch nicht die Gleichheit von a und b folgern. Erst dann ist dieser Schluss erlaubt, wenn man für E jede Grösse setzen kann, ohne dass die Gleichung $E \cdot a = E \cdot b$ aufhört richtig zu sein.

Aus den Gleichungen $a = b$, $b = c$ folgt $a = c$. Denn aus der Gleichung $a = b$ folgt $X \cdot a = X \cdot b$; aus der Gleichung $b = c$ folgt $X \cdot b = X \cdot c$. Daher ist auch $X \cdot a = X \cdot c$; also, da X j e d e Grösse bezeichnen kann, auch $a = c$.

§. 4. Die einfachsten Behandlungszeichen sind die ganzen absoluten Zahlen, die eine Vervielfachung der Einheit anzeigen und die durch die Gleichungen

$X.1 = X$, $X.2 = X + X$, $X.3 = X.2 + X = X + X + X$, etc.
lefinirt werden. Bezeichnen p und q ganze absolute Zahlen, so
gelten folgende Sätze, die hier aufgeführt werden, um eine Ein-
heilung der Behandlungszeichen überhaupt darauf zu begründen.

I) Aus $X = Y$ folgt $X.p = Y.p$, und alle Grössen, die durch
as Zeichen $X.p$, wo X und p gegeben sind, bezeichnet werden
ürfen, sind gleich. Das Produkt einer gegebenen Grösse in eine
gebene ganze Zahl ist also vollkommen bestimmt.

II) Es ist $(X \pm Y \pm Z).p = X.p \pm Y.p \pm Z.p$.

III) Es ist $X.p.q = X.q.p$.

IV) Es ist, wie leicht zu beweisen, $A - A = B - B$. Die
ifferenz zweier gleichen Grössen bezeichnet man mit 0 und jede
rösse, die nicht $= 0$ ist, soll in dem Folgenden eine angebbare
rösse heissen. Es kann alsdann als Grundsatz vorausgesetzt wer-
en, dass das Produkt einer angebbaren Grösse in eine ganze ab-
lute Grösse wieder eine angebbare Grösse bezeichnet.

§. 5. Sind jetzt p und q Behandlungszeichen in der allge-
einsten Bedeutung des Wortes, so können folgende Unterschei-
ungen gemacht werden.

I) Ist X eine gegebene Grösse, so sind entweder alle Grössen,
elche durch $X.p$ bezeichnet werden dürfen, einander gleich und
us $X = Y$ folgt mit Nothwendigkeit $X.p = Y.p$, d. h. die durch
$X.p$ bezeichnete Grösse ist vollkommen bestimmt, oder die Behand-
ung der Einheit, welche p vorschreibt, genügt diesen Bedingungen
icht. Im ersten Falle soll das Behandlungszeichen p eindeutig,
n zweiten Falle vieldeutig oder unbestimmt genannt werden.

Die gewöhnlichen ganzen Zahlen und Brüche sind bekanntlich
indeutige Behandlungszeichen; dagegen ist $5 + \sqrt{4}$ ein zweideu-
iges Behandlungszeichen, indem $X.(5 + \sqrt{4})$ sowohl dem 3fachen,
ls auch dem 7fachen von X gleich sein kann. In dem Folgen-
len sollen die einfachen Buchstaben eindeutige Behandlungszeichen
sein.

II) Es ist entweder $(X \pm Y \pm Z).p = X.p \pm Y.p \pm Z.p$
oder diese Gleichung findet nicht statt. Ist diese Gleichung rich-
tig, welche Grössen auch X, Y, Z sein mögen, so soll p eine
Zahl heissen.

Es ist leicht zu ersehen, dass hier der Begriff der Zahl weiter
gefasst ist, als es gewöhnlich geschieht. So sind hier namentlich
diejenigen Behandlungszeichen mit zu den Zahlen gerechnet, mit
welchen sogenannte symbolische Rechnungen vorgenommen werden
können. Fällt z. B. die zu behandelnde Grösse unter die Form
$A.\varphi(x)$, wo $\varphi(x)$ eine beliebige Function von x bezeichnet, so
gehören die Zeichen $\frac{d}{dx}$, Δx, $\int_a^b dx.(\;)$ mit zu den Zahlen, wäh-
rend sin, cos, log nicht dazu gerechnet werden dürfen.

III) Ist für jedes X $X.p.q = X.q.p$, so sollen p und q
gleichartige Behandlungszeichen heissen; ist dagegen diese
Gleichung nicht allgemein richtig, so sollen p und q ungleichartig
heissen.

Gleichartige Zahlen sind also z. B. alle rationalen und irratio-
n Zahlen unter sich; $\frac{d}{dx}$ und Δx; $\frac{d}{dx}$ und jede von x unabhän-
e rationale oder irrationale Zahl. Es muss noch bemerkt wer-

den, dass aus der Gleichartigkeit von p und q, und von q und r keineswegs die Gleichartigkeit von p und r folgt. So ist z. B. $\frac{d}{dx}$ gleichartig mit a; a gleichartig mit x, aber nicht $\frac{d}{dx}$ mit x.

IV) Bezeichnet das Produkt einer jeden angebbaren Grösse in p wieder eine angebbare Grösse, so soll p ein angebbares Behandlungszeichen genannt werden. p soll aber nicht mehr angebbar heissen, wenn das Produkt auch nur einer einzigen angebbaren Grösse in $p = 0$ ist.

So ist $\frac{d}{dx}$ nicht angebbar, indem $\frac{d}{dx}(aE) = 0$ ist, obgleich aE angebbar sein kann.

§. 6. Aus den in dem Vorigen aufgestellten Begriffen ergeben sich mit Leichtigkeit folgende Lehrsätze:

I) Aus $X = Y$, $a = b$ folgt $X.a = Y.b$, wenn a und b eindeutig sind. Denn da a eindeutig ist, so folgt aus $X = Y$ $X.a = Y.a$; aus $a = b$ folgt $Y.a = Y.b$. Daher ist $X.a = Y.b$.

II) Wenn a eine Zahl ist, so ist $(X \pm Y \pm Z).a = X.a \pm Y.a \pm Z.b$. Folgt unmittelbar aus §. 5. II.

III) Sind a und b angebbare, eindeutige Zahlen, so folgt aus $X.a = Y.b$ und $a = b$ auch $X = Y$.

Aus $a = b$ folgt $Y.a = Y.b$; daher ist $X.a = Y.a$, also $0 = X.a - Y.a = (X - Y).a$, da a eine Zahl. Wäre nun $X - Y$ angebbar, so müsste, da a angebbar ist, auch $(X - Y).a$ angebbar sein. Da dieses nicht der Fall ist, so muss $X - Y = 0$, also $X = Y + 0 = Y + (A - A) = Y + A - A = Y$ sein.

IV) Aus $X = Y$ und $a = b$ folgt $X:a = Y:b$, wenn a und b angebbar sind. Denn es ist $X:a.a = X$, $Y:b.b = Y$; also $X:a.a = Y:b.b$; mithin, da a und b angebbar und gleich sind, $X:a = Y:b$. (III)

V) Es ist $(X \pm Y \pm Z):a = X:a \pm Y:a \pm Z:a$, wenn a eine angebbare Zahl ist. Denn

$$\begin{aligned}(X:a \pm Y:a \pm Z:a).a &= X:a.a \pm Y:a.a \pm Z:a.a \\ &= X \pm Y \pm Z = (X \pm Y \pm Z):a.a;\end{aligned}$$

daher, weil a angebbar:

$$X:a \pm Y:a \pm Z:a = (X \pm Y \pm Z):a.$$

VI) Sind a und b gleichartige Zahlen, so ist: $X.a.b = X.b.a$, $X.a:b = X:b.a$, $X:a:b = X:b:a$, wenn alle vorkommenden Divisoren angebbar sind. Der erste Satz folgt aus der Erklärung gleichartiger Zahlen. Für den zweiten hat man $X:b.a.b = X:b.b.a = X.a = X.a:b.b$; also, wenn b angebbar, $X:b.a = X.a:b$. Aehnlich ist der Beweis für den dritten Satz.

Ist a eine angebbare Zahl, so ist $X.a:a = X:a.a = X$. Man darf aber nicht unbedingt setzen: $(\Delta X):\frac{d}{dx} = \Delta(X:\frac{d}{dx})$, $(\frac{d}{dx}X):\frac{d}{dx} = X$.

B. Rationale Ausdrücke aus einfachen Behandlungszeichen.

§. 7. Sind a, b, c einfache Behandlungszeichen, so ist $a \pm b \pm c$ ein Behandlungszeichen, welches vorschreibt, dass die Einheit mit a, mit b und mit c multiplicirt und dass die entstehenden Produkte addirt oder subtrahirt werden sollen. $a.b:c$ schreibt vor, dass die Einheit mit a multiplicirt, das Ergebniss mit b multiplicirt, und das jetzige Ergebniss durch c dividirt werden soll. Die Definition dieser Zeichen ist daher enthalten in den Gleichungen:

$$X.(a \pm b \pm c) = X.a \pm X.b \pm X.c,\quad X.(a.b:c) = X.a.b:c$$

oder auch

$$X.(:a.b:c) = X:a.b:c.$$

Aus diesem ergiebt sich leicht die Bedeutung zusammengesetzterer rationaler Ausdrücke aus einfachen Behandlungszeichen. Ferner lässt sich leicht zeigen, dass $a \pm b \pm c$ und $a.b:c$ eindeutige Behandlungszeichen sind, wenn in den letztern nur angebbare Divisoren vorkommen.

§. 8. Lehrsätze:

I) Aus $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$ folgt $a \pm b \pm c = a' \pm b' \pm c'$.

II) Es ist $a + b - c = a - c + b = b + a - c$ etc.

III) $a + b - b = a$, $a - b + b = a$.

IV) $a + (x + y - z) = a + x + y - z$.

V) $a - (x + y - z) = a - x - y + z$.

Die Beweise dieser Sätze sind einander ganz ähnlich. So ist z. B. für II.:

$$X.(a + b - c) = X.a + X.b - X.c;$$
$$X.(a - c + b) = X.a - X.c + X.b.$$

Nun ist

$$X.a + X.b - X.c = X.a - X.c + X.b;$$

daher auch $X.(a + b - c) = X.(a - c + b)$. Da hier aber offenbar X jede Grösse bezeichnen kann, so folgt aus der Erklärung der Gleichung zwischen Behandlungszeichen $a + b - c = a - c + b$.

VI) $a + b - c$ ist eine Zahl, wenn a, b, c Zahlen sind und ist mit jeder Zahl gleichartig, welche mit a, b, c gleichartig ist.

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned}(X \pm Y).(a + b - c) &= (X \pm Y).a + (X \pm Y).b - (X \pm Y).c \\ &= X.a \pm Y.a + X.b \pm Y.b - X.c \mp Y.c \\ &= X.(a + b - c) \pm Y.(a + b - c);\end{aligned}$$

mithin ist $a + b - c$ nach §. 5. II. eine Zahl.

Ist m eine mit a, b, c gleichartige Zahl, so ist

$$X.m.(a+b-c) = X.m.a + X.m.b - X.m.c$$
$$= X.a.m + X.b.m - X.c.m$$
$$= (X.a + X.b - X.c).m$$
$$= X.(a+b-c).m;$$

daher ist auch $a+b-c$ mit m gleichartig (§. 5. III.).

0 ist ein Behandlungszeichen, definirt durch die Gleichung $X.0 = 0$, wo X jede Grösse sein kann. Es ergiebt sich hieraus, dass $0 =$ der Differenz zweier gleichen Zahlen, also auch eine Zahl und mit allen andern Zahlen gleichartig sei.

§. 9. Lehrsätze:

I) $a.b:c$ ist eine Zahl, wenn a, b, c Zahlen sind, und ist mit jeder Zahl gleichartig, welche mit a, b, c gleichartig ist, vorausgesetzt, dass alle in diesem Ausdrucke vorkommenden Divisoren angebbar sind.

Beweis. Es ist, wenn a, b, c Zahlen und c angebbar: $(X \pm Y).(a.b:c) = (X \pm Y).a.b:c = (X.a \pm Y.a).b:c = (X.a.b \pm Y.a.b):c = X.a.b:c \pm Y.a.b:c = X.(a.b:c) \pm Y.(a.b:c)$; also $a.b:c$ eine Zahl (§. 5. II.).

Ist ferner m mit a, b, c gleichartig, so ist $X.(a.b:c).m = X.a.b:c.m = X.m.a.b:c = X.m.(a.b:c)$; also $a.b:c$ mit m gleichartig (§. 5. III.).

II) Sind a, b, c gleichartige und angebbare Behandlungszeichen, so ist $X:(a.b:c) = X:a:b.c$. Denn $X:a:b.c.a.b:c = X = X:(a.b:c).a.b:c$, woraus sich leicht der Lehrsatz ergiebt.

III) Aus $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$ folgt, wenn die Divisoren angebbar sind, $a.b:c = a'.b':c'$.

IV) Sind a, b, c gleichartige Behandlungszeichen und c angebbar, so ist $a.b:c = a:c.b = :c.b.a$ etc.

V) $m.(a.b:c) = m.a.b:c$, wenn die Divisoren angebbar

VI) $m:(a.b:c) = m:a:b.c$, wenn die Divisoren angebbar und a, b, c gleichartig sind.

VII) $(a \pm b).m = a.m \pm b.m$, wenn m eine Zahl.

VIII) $(a \pm b):m = a:m \pm b:m$, wenn m eine angebbar Zahl.

IX) $m.(a \pm b) = m.a \pm m.b$.

Die Beweise der Sätze III. — IV. sind einander ganz ähnlic So ist für III. $X.(a.b:c) = X.a.b:c$, $X.(a:c.b) = X.a:c$. Unter den Voraussetzungen des Lehrsatzes ist aber $X.a.b: = X.a:c.b$; daher auch $X.(a.b:c) = X.(a:c.b)$. Da ma sich hier für X jede Grösse gesetzt denken kann, so ist nach d Erklärung der Gleichheit $a.b:c = a:c.b$.

Aus den Sätzen der beiden letzten Paragraphen ergiebt sic dass jeder rationale Ausdruck aus ganzen absoluten Zahlen glei einem Ausdruck von der Form $\frac{a-b}{c-d}$ ist, wo a, b, c, d ganze Za len sind, vorausgesetzt dass in dem Ausdrucke nur angebbare D visoren vorkommen. Es wird dabei angenommen, dass man d Summe und die Differenz zweier ganzen Zahlen als eine ganze Za berechnen könne. Bezeichnet $(+a)$ die Summe $0+a$ und (— die Differenz $0-a$, so ist also jeder rationale Ausdruck aus ganz

Zahlen $= \pm \frac{m}{n}$, also gleich einer reellen, rationalen Zahl. Hieraus folgt dann wieder, dass auch jeder rationale Ausdruck aus reellen, rationalen Zahlen = einer rationalen, reellen Zahl ist, immer unter der Voraussetzung, dass nur angebbare Divisoren vorkommen.

C. Ungleichheit von Grössen und Zahlen; absolute, positive und negative Zahlen und Grössen.

§. 10. Zwei Grössen heissen einstimmig, wenn sie in allen ihren in Betracht kommenden Eigenschaften übereinstimmen und sich nur durch ihre etwa verschiedene Grösse von einander unterscheiden. Sind A und B zwei einstimmige Grössen, und ist $A-B$ eine mit A und B einstimmige angebbare Grösse, so heisst A dem absoluten Werthe nach grösser als B (val. abs. $A >$ val. abs. B).

Zur nähern Bestimmung dieser Begriffe dienen folgende Grundsätze, die also zu den in §. 2. angeführten noch hinzukommen.

I) Die Summe mehrerer einstimmigen Grössen ist mit den einzelnen Theilen einstimmig und angebbar, wenn nur einer der Theile angebbar ist.

II) Zwei einstimmige Grössen sind entweder einander gleich oder die eine ist grösser als die andere.

III) Von jeder angebbaren Grösse lässt sich ein Vielfaches angeben, welches grösser ist als jede mit ihr einstimmige Grösse.

Der in §. 4. IV. angenommene Grundsatz ist eine unmittelbare Folge aus I., braucht also als Grundsatz nicht weiter berücksichtigt zu werden.

Aus den eben angegebenen Sätzen lassen sich die verschiedenen Lehrsätze über die Ungleichheit einstimmiger Grössen mit Leichtigkeit herleiten.

§. 11. Ist die durch $X \,.\, m$ bezeichnete Grösse immer mit X einstimmig, so heisst das Behandlungszeichen m ein absolutes. Ein Behandlungszeichen von der Form $0 + m$ heisst alsdann ein positives, eins von der Form $0 - m$ ein negatives Behandlungszeichen. a heisst grösser als b oder kleiner als b, jenachdem $a - b$ einem positiven oder einem negativen angebbaren Behandlungszeichen gleich ist.

Die aus diesen Definitionen sich ergebenden Lehrsätze über die Ungleichheit verschiedener Behandlungszeichen sind bekannt. Nur auf einen Umstand muss hier noch aufmerksam gemacht werden. Aus der Ungleichheit von a und b darf man nämlich nicht ohne Weiteres schliessen, dass $a > b$ oder $a < b$ ist. Wenn a und b imaginäre Zahlen sind, so ist dies bekannt. Aber auch die Zahlen $\frac{d}{dx}$, $\frac{2d}{dx}$ sind ungleich, ohne dass die eine von beiden grösser ist, indem ihre Differenz $\frac{d}{dx}$ keine angebbare Zahl ist. Ist $E.a > E.b$ und gilt diese Beziehung nur für die eine Grösse E, so kann man daraus noch nicht schliessen, dass auch $a > b$ sei.

§. 12. Es ist $A = B$, wenn $A - B$ und $B - A$ kleiner ist als jede mit A und B einstimmige angebbare Grösse, wenn A und B einstimmig sind. Denn wäre A nicht $= B$, so wäre $A > B$ oder $B > A$, also eine der Differenzen $A - B$ oder $B - A$ eine mit B und A einstimmige, angebbare Grösse.

Das absolute Behandlungszeichen a ist gleich b, wenn sowohl $a-b$, als auch $b-a<\frac{1}{n}$, wo n jede noch so grosse absolute ganze Zahl bezeichnen kann. Denn ist X eine beliebige Grösse, so ist $X.(a-b)$ oder $X.(b-a)\leqq X.\frac{1}{n}$; also auch $X.a - X.b$ oder $X.b-X.a$ dem absoluten Werthe nach $\leqq X.\frac{1}{n}$. Da aber $X.\frac{1}{n}$ kleiner sein kann als jede mit X einstimmige angebbare Grösse, so ist $X.a=X.b$, und da dieses für jede Grösse X gilt, so ist $a=b$.

§. 13. In dem Vorigen war schon von solchen Differenzen absoluter Zahlen die Rede, in denen der Minuend kleiner war als der Subtrahend. Es müssen nun zunächst diejenigen Grössen näher betrachtet werden, deren Produkte in solche negative Zahlen eine wirkliche Bedeutung haben.

Betrachtet man eine Grösse X, insofern sie zu einer andern Grösse A addirt dieselbe vergrössert oder verkleinert, so nennt man X eine algebraische Grösse; und zwar soll X eine positive Grösse genannt werden, wenn $A+X>A$; eine negative, wenn $A+X<A$ ist. Eine Grösse, welche nicht in einer solchen Beziehung zu einer andern gedacht wird, und namentlich auch A selbst, soll eine absolute Grösse heissen.

Die algebraische Grösse X muss offenbar mit A gleichartig genannt werden, indem sie zu A addirt werden kann (§. 1.); sie ist aber nicht mehr mit A einstimmig, da sie sonst bei ihrer Addition keine Verkleinerungen von A hervorbringen könnte (§. 10). Das passendste Beispiel für diese Verhältnisse giebt das bekannte, aber etwas modifizirte Beispiel von Vermögen und Schulden. Sieht man das Vermögen einer Person als die absolute Grösse an, so sind die Einnahmen dieser Person positive, die Ausgaben negative Grössen. Sieht man den Schuldenstand dieser Person als absolute Grösse an, so verhält es sich umgekehrt.

In dem Folgenden soll A diejenige absolute Grösse sein, deren Vergrösserung oder Verkleinerung betrachtet wird; X, Y, Z etc. sollen algebraische Grössen bezeichnen. Es gelten alsdann folgende Definitionen:

I) Es ist $X=Y$, wenn $A+X=A+Y$.

II) Der Ausdruck $X+Y-Z$ wird definirt durch die Gleichung $A+(X+Y-Z)=A+X+Y-Z$. Diese Definitionen sind aber nicht mehr rein willkührlich; es muss im Gegentheil gezeigt werden, dass sie den in §. 2. aufgestellten Grundsätzen genügen, was ohne Schwierigkeit angeht. So ist z. B. $X+(Y-Z)=X+Y-Z$; denn

$$\left.\begin{array}{l} A+[X+(Y-Z)]=A+X+(Y-Z)=A+X+Y-Z \\ A+(X+Y-Z)=A+X+Y-Z \end{array}\right\} \ldots \text{(Def. II.)}$$

daher

$$A+[X+(Y-Z)]=A+[X+Y-Z];$$

also

$$X+(Y-Z)=X+Y-Z \ldots \text{(Def. I.)}.$$

Es ergiebt sich aus diesen Erklärungen unmittelbar, dass zwei gleiche angebbare Grössen entweder beide positiv oder beide nega-

tiv sind. Bringt die Addition von X zu A keine Veränderung von A hervor, so ist $X = 0$, was unmittelbar aus der Relation $A + X = A = A + 0$ folgt.

§. 14. Man erhält also den Begriff einer positiven Grösse, wenn man sich eine absolute Grösse X mit der Eigenschaft behaftet denkt, bei ihrer Addition zu A um die Grösse X zu vergrössern, und ebenso erhält man eine negative Grösse, wenn man sich die Grösse X mit der Eigenschaft behaftet denkt, A um X zu verkleinern. Die auf diese Weise aus der absoluten Grösse X entstehende positive Grösse soll mit X^+, die entstehende negative mit X^- bezeichnet werden und X soll der absolute Werth von $X^\pm$ heissen. Es ist dann $A + X^+ = A + X$, $A + X^- = A - X$. Es ergeben sich ferner leicht folgende Lehrsätze:

I) $X^+ + Y^+ = (X + Y)^+$; denn $A + (X^+ + Y^+) = A + X + Y$, $A + (X + Y)^+ = A + X + Y$; daher $A + (X^+ + Y^+) = A + (X + Y)^+$ oder $X^+ + Y^+ = (X + Y)^+$.

II) $X^- + Y^- = (X + Y)^-$.

III) $X^+ + Y^- = (X - Y)^+$ oder $= (Y - X)^-$, jenachdem $X > Y$ oder $Y > X$ ist.

IV) $X - Y^\pm = X + Y^\mp$.

§. 15. Sind X und Y zwei einstimmige Grössen und bezieht sich das Hinzufügen der Zeichen $+$ oder $-$ auf die Vergrösserung oder Verkleinerung derselben absoluten Grösse, so sind X^+ und X^- nicht mehr einstimmig, indem sie sich noch durch etwas Anderes als ihre verschiedene Grösse unterscheiden. Dagegen dürfen X^+ und Y^+, so wie X^- und Y^- noch als einstimmige Grössen betrachtet werden. Um die Zulässigkeit hievon nachzuweisen, muss gezeigt werden, dass diese Grössen den in §. 10. aufgestellten Grundsätzen genügen. Es ist aber:

I) $(X^+ + Y^+) = (X + Y)^+$, $(X^- + Y^-) = (X + Y)^-$; also in beiden Fällen die Summe einstimmig mit den Theilen und angebbar, wenn einer der Theile angebbar ist.

II) Es ist $X > Y$ oder $X = Y$ oder $X < Y$, also $X = Y + V$ oder $X = Y$ oder $X = Y - V$, wenn V eine mit X und Y einstimmige angebbare Grösse bezeichnet. Daraus folgt aber, dass $X^+ = Y^+ + V^+$ oder $= Y^+$ oder $= Y^+ - V^+$, so wie dass $X^- = Y^- + V^-$ oder $= Y^-$ oder $= Y^- - V^-$ ist, d. h. dass dem absoluten Werthe nach X^+ entweder $>$ oder $=$ oder $< Y^+$ und X^- entweder $>$ oder $=$ oder $< Y^-$ ist.

III) Es giebt ein Vielfaches von X, welches grösser als Y, so dass also $nX = Y + V$ ist, wo V eine mit X und Y einstimmige Grösse bezeichnet. Daraus folgt aber $nX^+ = Y^+ + V^+$, $nX^- = Y^- + V^-$, so dass es ein Vielfaches von $X^\pm$ giebt, welches dem absoluten Werthe nach grösser als $Y^\pm$ ist.

Jede negative Grösse ist gleich einer Differenz zweier positiven Grössen, in welcher der Subtrahend dem absoluten Werthe nach [...]sser als der Minuend ist und ein ähnlicher Satz lässt sich auch [...] positive Grössen aussprechen. So ist $X^- = Y^+ - (X + Y)^+$. [...]st man bei der Bezeichnung der positiven Grössen den Accent weg, so ist $X^+ = 0 + X$ oder abgekürzt $= (+X)$, $X^- = 0 - X = (-X)$. Ist a eine beliebige Zahl, so ist

I) $0 . a = (X - X) . a = X . a - X . a = 0$.

II) $X^\pm . (+a) = (0 \pm X) . (0 + a) = (\pm aX)$.

III) $X^\pm . (-a) = (0 \pm X) . (0 - a) = (\mp aX)$ etc.

womit zugleich nachgewiesen ist, dass das **Produkt** einer algebraischen Grösse in eine negative Zahl, d. h. in eine Differenz zweier absoluten Zahlen, deren Minuend kleiner ist als der Subtrahend, eine wirkliche Bedeutung habe. Die Sätze über die Produkte und Quotienten positiver und negativer **Zahlen** lassen sich aus der oben gegebenen Erklärung der positiven und negativen Zahlen mit Leichtigkeit herleiten.

D. Transcendente und irrationale Behandlungszeichen.

§. 17. Eine Grösse oder ein Behandlungszeichen heisst durch gewisse Bedingungen bestimmt, wenn alle Grössen oder Behandlungszeichen, welche diesen Bedingungen genügen, einander gleich sind. Eine Grösse oder ein Behandlungszeichen heisst gegeben, wenn sie entweder unmittelbar vorliegen, oder wenn man doch vermittelst der gegebenen Bedingungen eine Grösse oder ein Behandlungszeichen herleiten kann, welches dem in Rede stehenden gleich ist. In dem Folgenden soll aber eine Grösse schon als gegeben angesehen werden, wenn man eine Grösse darstellen kann, deren Unterschied von der eigentlich zu bestimmenden dem absoluten Werthe nach kleiner ist als jede noch so kleine, gegebene, angebbare Grösse. Unter ähnlichen Verhältnissen soll auch ein Behandlungszeichen als gegeben angesehen werden.

Ist $A_0, A_1, A_2 \ldots . A_n$ in inf. eine unendliche Reihe von Grössen, so heisst diese Reihe eine unendlich klein werdende, wenn sich in dieser Reihe ein Glied angeben lässt, von welchem an alle folgende Glieder dem absoluten Werthe nach kleiner sind als jede gegebene noch so kleine angebbare Grösse. Die Grösse $\mathfrak{A}$ heisst die Gränze der Reihe $A_0, A_1, A_2 \ldots . A_n$ in inf., oder es ist $\mathfrak{A} = \lim\limits_{n=\infty} A_n$, wenn die Reihe $\mathfrak{A} - A_0, \mathfrak{A} - A_1, \mathfrak{A} - A_2 \ldots . \mathfrak{A} - A_n$ in inf. eine unendlich klein werdende Reihe ist. Bekanntlich besitzt aber nicht jede unendliche Reihe eine Gränze, sondern die Reihe kann auch unendlich gross werdend sein, oder die Glieder können zwischen gewissen Grössen immer hin und her gehen.

Wie diese Begriffe sich auf Behandlungszeichen ausdehnen lassen, ist leicht zu ersehen; es tritt alsdann an die Stelle der beliebig kleinen angebbaren Grösse eine beliebig kleine, gegebene, angebbare absolute Zahl.

Für die unendlich klein werdenden Reihen und für die Reihen, welche Gränzen besitzen, lassen sich leicht die in den folgenden Formeln ausgedrückten Sätze beweisen:

I) Ist $\lim A_n = 0$, $\lim B_n = 0$, so ist auch $\lim (A_n \pm B_n) = 0$.

II) Ist $\lim a_n = 0$, $\lim b_n = 0$, so ist auch $\lim (a_n \pm b_n) = 0$, $\lim (a_n . b_n) = 0$, $\lim (A_n . a_n) = 0$; wenn nicht $\lim A_n = \pm \infty$.

III) $\lim (A_n \pm B_n) = \lim A_n \pm \lim B_n$ (denn $\lim (\mathfrak{A} - A_n) = 0$, $\lim (\mathfrak{B} - B_n) = 0$, also $\lim ((\mathfrak{A} \pm \mathfrak{B}) - (A_n \pm B_n)) = 0$).

IV) $\lim (A_n . a_n) = \lim A_n . \lim a_n$, $\lim (a_n \pm b_n) = \lim a_n \pm \lim b_n$, $\lim (a_n . b_n) = \lim a_n . \lim b_n$.

V) $\lim (A_n : b_n) = \lim A_n : \lim b_n$, $\lim (a_n : b_n) = \lim a_n : \lim b_n$, wenn nicht $\lim b_n = 0$ ist.

Ist von einer Grösse ausgesagt, dass sie die Gränze einer un-

endlichen Reihe $A_0, A_1 \ldots . A_n$ in inf. sei, so ist diese Grösse vollkommen bestimmt, vorausgesetzt, dass diese Reihe wirklich eine Gränze besitzt. Denn sind die beiden Grössen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Gränzen dieser Reihe, so ist $\lim(\mathfrak{A} - A_n) = 0$, $\lim(\mathfrak{B} - A_n) = 0$, also nach III) $\lim(\mathfrak{A} - \mathfrak{B}) = \lim[(\mathfrak{A} - A_n) - (\mathfrak{B} - A_n)] = 0$, was offenbar nur möglich ist, wenn $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$. Ist eine Methode gegeben, nach welcher man sämmtliche Glieder der unendlichen Reihe finden kann, so ist die Gränze der Reihe auch als gegeben anzusehen. Auf ganz ähnliche Weise kann auch ein Behandlungszeichen als Gränze einer Reihe von Behandlungszeichen bestimmt und gegeben werden.

Endlich verdient noch bemerkt zu werden, dass zwei Reihen gleiche Gränzen haben, wenn ihre Differenz eine unendlich klein werdende Reihe ist, vorausgesetzt, dass die Reihen Gränzen besitzen. Denn ist $\lim(a_n - b_n) = 0$, so ist $\lim a_n - \lim b_n = \lim(a_n - b_n) = 0$ oder $\lim a_n = \lim b_n$.

§. 18. Ein Behandlungszeichen ist nach dem Frühern ein Zeichen, welches anzeigt, dass mit einer Grösse eine beliebige Veränderung vorgenommen werden soll. Diese mit einer Grösse vorzunehmende Behandlung kann aber wieder aus einer Reihefolge von einzelnen Operationen zusammengesetzt sein und diese Reihe der mit der Grösse vorzunehmenden Operationen kann auch als ohne Ende fortgehend gedacht werden. In dem letzten Falle soll das Behandlungszeichen ein transcendentes oder eine Transcendente genannt werden; die Bedeutung einer solchen Transcendenten muss aber zunächst näher aus einander gesetzt werden.

Schreibt ein Behandlungszeichen s vor, dass mit einer Grösse eine unendliche Reihe von Operationen vorgenommen werden soll, so soll das Produkt einer Einheit in s die Gränze derjenigen unendlichen Reihe von Grössen sein, deren Glieder man erhält, wenn man mit der Einheit zuerst die erste, dann die erste und zweite, dann die erste, zweite und dritte etc. etc. der durch s vorgeschriebenen Operationen vornimmt. Bedeutet also s die aus einer unendlichen Anzahl von Theilen bestehende Summe $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots . a_n +$ in inf., so bedeutet $X.s$ die Gränze der unendlichen Reihe:

$$X.a_0, \; X.(a_0 + a_1), \; X.(a_0 + a_1 + a_2) \ldots .$$
$$X.(a_0 + a_1 + a_2 + \ldots . + a_n) \ldots . \text{ in inf.}$$

Bedeutet s das Produkt aus unendlich vielen Faktoren $a_0 . a_1 . a_2 . a_3 \ldots . a_n$ in inf., so bezeichnet $X.s$ die Summe der unendlichen Reihe:

$$X.a_0, \; X.a_0.a_1, \; X.a_0.a_1.a_2, \ldots . \; X.a_0.a_1.a_2 \ldots . a_n, \ldots . \text{ in inf.}$$

Es ist einleuchtend, dass das Produkt einer Grösse in eine Transcendente nach Umständen etwas Mögliches oder Unmögliches sein kann, dass aber im ersten Falle das Produkt $X.s$ bestimmt und gegeben ist, wenn es die Glieder der entstehenden Reihe sind.

In manchen Fällen ist eine Transcendente bekanntlich einem endlichen Ausdruck aus einfachen Behandlungszeichen gleich. Ist z. B. der endliche Ausdruck $s = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots . x^n + \ldots .$ in inf., wo x eine absolute Zahl sein soll, so ist zuerst s ebenfalls ein absolutes Behandlungszeichen. Aus der Erklärung des

Zeichens s ergiebt sich aber unmittelbar $s = 1 + x \,.\, s$. Diese Gleichung enthält aber offenbar einen Widerspruch, wenn $x \geqq 1$, da dann $1 + x \,.\, s > s$. In diesem Falle kann also die unendliche Reihe keinem endlichen Ausdruck gleich sein. Ist aber $x < 1$, so erhält man unmittelbar $s = \frac{1}{1-x}$.

Eben so gut wie in der Aufgabe die Reihe $1 + x^2 + x^3$ in inf. zu summiren, ein Widerspruch liegt, wenn $x \geqq 1$ ist, könnte auch in dieser Aufgabe noch ein Widerspruch liegen, wenn $x < 1$ ist, welcher uns nur bei unserer Untersuchung entgangen wäre. Es ist daher durchaus nothwendig, die Richtigkeit des oben auf analytischem Wege gefundenen Resultates auch noch synthetisch nachzuweisen. Im vorliegenden Falle geht dieses freilich leicht an. Es ist nämlich:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} + \frac{x^n}{1-x},$$

also:

$$A \,.\, \frac{1}{1-x} = A \,.\, (1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}) + A \,.\, \frac{x^n}{1-x}.$$

Da dieses gilt, welche ganze Zahl n ist, so kann man auf beiden Seiten die Gränzen für $n = \infty$ nehmen, und erhält:

$$A \,.\, \frac{1}{1-x} = \lim A \,.\, (1 + x + x^2 + \ldots x^{n-1}) + A \,.\, \lim \frac{x^n}{1-x}.$$

Ist aber $x < 1$, so ist $\lim \frac{x^n}{1-x} = 0$, daher

$$A \,.\, \frac{1}{1-x} = \lim [A \,.\, (1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1})$$
$$= A \,.\, (1 + x + x^2 + \ldots x^n + \ldots \text{ in inf.})$$

oder, da A jede Grösse bezeichnen kann:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots \text{ in inf.}$$

Ich kann hier die Bemerkung nicht unterdrücken, dass streng genommen jede Auflösung einer Aufgabe, welche auf analytischem Wege, z. B. durch die Auflösung von Gleichungen gewonnen ist, noch eines synthetischen Beweises bedarf. Ich glaube, dass in dieser Hinsicht die Analogie zwischen unserm jetzigen analytischen Verfahren und der Analyse der Alten grösser ist, als man es gewöhnlich anzunehmen scheint. Wird z. B. eine Gerade gesucht, welche gewissen Bedingungen genügen soll, so nimmt man bei der Analyse der Alten bekanntlich an, man kennte diese Gerade schon. Aus den gegebenen Bedingungen der Aufgabe sucht man alsdann andere Bedingungen herzuleiten, denen man durch Konstruktion leichter genügen kann. Aus zwei Ursachen kann nun die auf die-

sem Wege gefundene Auflösung fehlerhaft sein; es kann nämlich einmal den Bedingungen der Aufgabe vielleicht gar nicht durch eine Gerade genügt werden, so dass schon in der ersten Annahme ein Fehler liegt; oder es können bei der Umformung der Bedingungen gewisse Bedingungen verloren gegangen sein, so dass zwar die konstruirte Gerade den abgeleiteten, aber nicht mehr den ursprünglichen Bedingungen der Aufgabe genügt. Bei dem jetzigen analytischen Verfahren liegt schon darin, dass man das Gesuchte durch ein einfaches oder zusammengesetztes Zeichen bezeichnet, eine selten a priori begründete Voraussetzung, die den Bedingungen der Aufgabe widersprechen kann, und dass dieser Widerspruch im Verlauf der Untersuchung sich nicht immer zu zeigen braucht, hat die Theorie der unendlichen Reihen genugsam gelehrt. Was den zweiten Punkt anbetrifft, so hat man immer festzuhalten, dass die durch die Analyse abgeleiteten Bedingungen zwar eine nothwendige Folgerung aus den ursprünglichen der Aufgabe, aber nicht umgekehrt letztere aus ersteren sind. Das Gesuchte muss den gefolgerten Bedingungen genügen, aber nicht alles, was den gefolgerten Bedingungen genügt, genügt auch sämmtlichen Bedingungen der Aufgabe. Hat man aber keine unstatthaften Voraussetzungen über die Natur des Gesuchten gemacht und kann man den gefolgerten Bedingungen nur durch eine einzige Grösse genügen, so muss diese auch sämmtlichen Bedingungen der Aufgabe genügen. Giebt es aber mehrere Grössen, die den gefolgerten Bedingungen genügen, so ist es immer noch zweifelhaft, ob auch alle gefundenen Grössen sämmtlichen Bedingungen der Aufgabe entsprechen. Hat man endlich über die Natur des Gesuchten eine unstatthafte Annahme gemacht, so können durch diese gewisse Bedingungen der Aufgabe ersetzt sein, so dass auch dann die Bestimmtheit der Auflösung keinen Beweis für die Richtigkeit des Gefundenen abgiebt. Liegt z. B. die Aufgabe vor: einen Ausdruck $f(x)$ zu finden, welcher $= e^x$ ist, so muss dieser der Bedingung $f(2x) = f(x) . f(x)$ genügen. Macht man nun aber die unerlaubte Annahme, dass $f(x) = 1 + ax$ sei, so erhält man die identische Bedingungsgleichung $1 + 2ax = 1 + 2ax + x^2$, welcher durch $a = 0$ genügt wird, und man erhielte $f(x) = 1$, welches ganz bestimmte Resultat aber offenbar nicht mehr der ursprünglichen Aufgabe genügt.

§. 19. Ein Behandlungszeichen a heisst durch Annäherung gegeben, wenn eine Methode gegeben ist, mittelst welcher man eine rationale Zahl a' finden kann, so dass der absolute Werth von $a - a'$ kleiner ist als $\frac{1}{n}$, wie gross auch die ganze Zahl n angenommen wird. Ein durch Annäherung gegebenes Behandlungszeichen soll ein irrationales genannt werden, obgleich es auch einer rationalen Zahl gleich sein kann. Für irrationale Behandlungszeichen gelten alsdann folgende Lehrsätze.

I) Jedes irrationale Behandlungszeichen a ist eindeutig.

Beweis. Es ist zu zeigen, dass aus $X = Y$ folgt $X . a = Y . a$ §. 4. I.). Es sei a' ein bis auf $\frac{1}{n}$ angenäherter Werth von a und zwar, um die Begriffe festzustellen, $a' < a$ und X positiv, so ist $a' < a < a' + \frac{1}{n}$, also $X . a' \leqq X . a \leqq X . a' + X . \frac{1}{n}$, $Y . a'$

$+ Y . \frac{1}{n} \geqq Y . a \geqq Y . a'$. Da nun a' und $\frac{1}{n}$ als rationale Zahlen eindeutig sind, so ist $X . a' = Y . a'$, $X . \frac{1}{n} = Y . \frac{1}{n}$, also $- X . \frac{1}{n} \leqq X . a - Y . a \leqq X . \frac{1}{n}$, d. h. val. abs. $(X . a - Y . a) \leqq X . \frac{1}{n}$. Da nun $X . \frac{1}{n}$ dem absoluten Werthe nach kleiner sein kann als jede angebbare Grösse, so ist $X . a = Y . a$.

II) Jedes irrationale Behandlungszeichen ist eine Zahl.

Beweis. Es ist, wenn man die Bezeichnung des vorigen Satzes beibehält, zu zeigen, dass $(X \pm Y) . a = X . a \pm Y . a$ (§. 4. II.). Nun ist $(X + Y) . a' \leqq (X + Y) . a \leqq (X + Y) . (a' + \frac{1}{n})$ .... (1). Ferner $X . (a' + \frac{1}{n}) \geqq X . a \geqq X . a'$, $Y . (a' + \frac{1}{n}) \geqq Y . a \geqq Y . a'$; also, da a' und $a' + \frac{1}{n}$ Zahlen sind, $(X + Y) . (a' + \frac{1}{n}) \geqq X . a + Y . a \geqq (X + Y) . a'$.... (2). Aus (1) und (2) folgt aber $- (X + Y) . \frac{1}{n} \leqq (X + Y) . a - (X . a + Y . a) \leqq (X + Y) . \frac{1}{n}$; mithin, da $(X + Y) . \frac{1}{n}$ kleiner sein kann, als jede angebbare Grösse, $(X + Y) . a = X . a + Y . a$.

Ferner ist $X - Y + Y = X$, also $(X - Y + Y) . a = X . a$, daher nach dem eben bewiesenen Satze $(X - Y) . a + Y . a = X . a$; also $(X - Y) . a = X . a - Y . a$.

III) Eine irrationale Zahl ist mit jeder Zahl m gleichartig, welche mit allen rationalen Zahlen gleichartig ist; also auch mit allen rationalen Zahlen selbst und demzufolge wieder mit allen irrationalen Zahlen.

Beweis. Es ist zu zeigen, dass $X . m . a = X . a . m$ (§. 4. III). Nun ist, wenn man der Einfachheit wegen m als positiv annimmt, $X . (a' + \frac{1}{n}) . m \geqq X . a . m \geqq X . a' . m$, $X . m . a' \leqq X . m . a \leqq X . m . (a' + \frac{1}{n})$. Den Voraussetzungen des Lehrsatzes zu Folge ist aber $X . a' . m = X . m . a'$, $X . \frac{1}{n} . m = X . m . \frac{1}{n}$. Daher $X . m . \frac{1}{n} \geqq X . a . m - X . m . a \geqq - X . m . \frac{1}{n}$, also $X . a . m = X . m . a$.

IV) Eine jede irrationale Zahl ist entweder angebbar oder 0. Es giebt also keine irrationale Zahl, deren Produkt in eine angebbare Grösse $= 0$ ist, während eine andere Grösse mit ihr multiplicirt ein angebbares Produkt giebt.

Beweis. Ist E eine bestimmte angebbare, X eine willkührGrösse und ist $E . a = 0$, so ist, wenn a' ein auf $\frac{1}{n}$ angenäherter Werth von a ist und E als positiv betrachtet wird, $a - \frac{1}{n} < a'$

$-a < \frac{1}{n}$, also $-E.\frac{1}{n} < E.(a'-a) = E.a' - E.a < E.\frac{1}{n}$; mithin auch $-E.\frac{1}{n} < E.a' < E.\frac{1}{n}$. Da a' eine rationale Zahl ist, so kann man $a' = \pm\frac{p}{q}$ setzen, wo p und q absolute ganze Zahlen sind. Dann ist $-E.\frac{1}{n} < \pm E.p:q < E.\frac{1}{n}$, also $E.p:q < E.\frac{1}{n}$ oder $E.p.n < qE$. Da $p.n$ und q ganze Zahlen sind und E angebbar ist, so ist dieses nur möglich, wenn $p.n < q$, also $p:q < \frac{1}{n}$ ist. Es ist daher auch $-\frac{1}{n} < a' < +\frac{1}{n}$, also $-X.\frac{1}{n} \leqq X.a' \leqq X.\frac{1}{n}$. Aus einer frühern Bedingung folgt aber $-X.\frac{1}{n} \leqq X.a - X.a' \leqq X.\frac{1}{n}$, daher $-X.\frac{2}{n} \leqq X.a \leqq X.\frac{2}{n}$, was, da n beliebig gross sein kann, nur möglich ist, wenn $X.a = 0$ ist. Ist also a nicht angebbar, giebt also keine angebbare Grösse E in sie multiplicirt ein Product $= 0$, so ist das Product jeder Grösse in sie $= 0$, also $a = 0$.

§. 20. Es ist leicht zu beweisen, dass die Summe, die Differenz, das Product und der Quotient zweier Irrationalen wieder einer irrationalen Zahl gleich sind, deren angenäherte Werthe man erhält, wenn man die angenäherten Werthe der gegebenen Zahlen addirt, subtrahirt, multiplicirt oder dividirt, und dass man auf diese Weise die Annäherung beliebig weit treiben kann, ausser wenn der Divisor des Quotienten $= 0$ ist. Man kann also auch jeden rationalen Ausdruck aus rationalen oder irrationalen Zahlen, in welchem alle Divisoren von 0 verschieden sind, einer rationalen oder irrationalen Zahl gleich setzen, und im letztern Falle beliebig genau in rationalen Zahlen berechnen.

Im Allgemeinen folgt die Gleichheit zweier Behandlungszeichen erst dann, wenn man nachgewiesen hat, dass jede Grösse in sie multiplicirt gleiche Producte giebt. Rationale oder irrationale Zahlen sind aber schon gleich, wenn nur eine angebbare Grösse in sie multiplicirt gleiche Producte giebt. Sind nämlich a und b die beiden Zahlen, E eine angebbare Grösse, und ist $E.a = E.b$, so ist $E.a - E.b = E.(a-b) = 0$. $a-b$ ist aber ebenfalls einer rationalen oder irrationalen Zahl gleich und, da es nicht angebbar ist, nach §. 19. IV. $= 0$; also $a = b$.

Es ist ferner leicht zu zeigen, dass irrationale Zahlen gleich sind, wenn ihre angenäherten Werthe gleich sind.

§. 21. Ist $s = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots . a_n + \ldots$ in inf., wo a_0, a_1, $a_2 \ldots . a_n \ldots$. in inf. rationale oder irrationale Zahlen sind, ist ferner $\Delta_r = a_r + a_{r+1} + \ldots$ in inf. und lässt sich endlich nachweisen, dass $\lim\limits_{r=\infty} \Delta_r = 0$, dass also $\Delta_r < \frac{1}{n}$ und $> -\frac{1}{n}$ sein kann, so ist es leicht zu beweisen, dass s einer irrationalen Zahl gleich ist, deren angenäherte Werthe a_0, $a_0 + a_1$, $a_0 + a_1 + a_2$ ...., in inf.

1. Umgekehrt lässt sich jede irrationale Zahl in eine Summe aus unendlich vielen Theilen verwandeln. Sind nämlich $a_0, a_1, a_2 \ldots$. in inf. die angenäherten Werthe von s, so ist $s = a_0 + (a_1 - a_0)$

$+ (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \ldots . + (a_{n+1} - a_n) \ldots .$ in inf. oder auch $s = a_0 . \frac{a_1}{a_0} . \frac{a_2}{a_1} . \frac{a_3}{a_2} \ldots . \frac{a_{n+1}}{a_n} \ldots .$ in inf.

Hieraus ergiebt sich unmittelbar, dass, wenn $x = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ in inf., $y = b_0 + b_1 + b_2 + \ldots .$ in inf. ist, und wenn x und y irrationalen Zahlen gleich sind (die Reihen convergiren), auch $x \pm y = (a_0 \pm b_0) + (a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \ldots .$ in inf., $x . m = a_0 . m + a_1 . m + a_2 . m \ldots .$ in inf., $x : m = a_0 : m + a_1 : m + a_2 : m \ldots .$ in inf. ist, wenn m eine Zahl und im letzten Falle angebbar ist.

§. 22. Ist B eine angebbare Grösse und A mit B einstimmig, so lässt sich immer eine rationale oder irrationale Zahl finden, mit welcher B multiplicirt ein Product $= A$ giebt. Man kann bekanntlich eine dieser Bedingung genügende rationale Zahl finden, wenn A und B ein gemeinschaftliches Maass besitzen. Ist dieses nicht der Fall, so giebt es ein Vielfaches von B, welches grösser ist als $A . n$. Da kein Vielfaches von $B = A . n$ sein kann, so muss $A . n$ zwischen zwei auf einander folgenden Vielfachen von B, dem $r$fachen und $(r+1)$fachen liegen. Man hat dann:

$$B . r < A . n < B . (r+1) \text{ oder } A < B . \frac{r}{n} + B . \frac{1}{n},\ A > B . \frac{r}{n}.$$

Es ist dann erlaubt $A = B . \frac{r}{n} + \Delta$ zu setzen, wo $\Delta < B . \frac{1}{n}$ ist. Ebenso kann man setzen:

$$\Delta = B . \frac{r_1}{n^2} + \Delta_1, \text{ wo } r_1 < n,\ \Delta_1 < \frac{B}{n^2} \text{ ist}$$

$$\Delta_1 = B . \frac{r_2}{n^3} + \Delta_2, \text{ wo } r_2 < n,\ \Delta_2 < \frac{B}{n^3} \text{ ist}$$

$$\Delta_2 = B . \frac{r_3}{n^4} + \Delta_3, \text{ wo } r_3 < n,\ \Delta_3 < \frac{B}{n^4} \text{ ist}$$

in inf.

und erhält dann

$$A - B\left(\frac{r}{n} + \frac{r_1}{n^2} + \frac{r_2}{n^3} + \ldots . \frac{r\nu}{n^{\nu+1}}\right) = \Delta^\nu < \frac{B}{n^{\nu+1}},$$

also

$$A = B . \lim^{\nu=\infty}\left(\frac{r}{n} + \frac{r_1}{n^2} + \frac{r_2}{n^3} + \ldots . \frac{r\nu}{n^{\nu+1}}\right) = B . \left(\frac{r}{n} + \frac{r_1}{n^2} + \frac{r_2}{n^3} + \ldots \text{in inf.}\right)$$

Bezeichnet man die letzte Summe aus unendlich vielen Theilen mit s und die grösste der Zahlen r_1, r_2, r_3, in inf. mit ϱ, so ist $s > \frac{r}{n}$ und $s < \frac{r}{n} + \varrho(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4} + \ldots .$ in inf.$) = \frac{r}{n} + \frac{\varrho}{n . (n-1)}$. Da hier ϱ höchstens $n - 1$ sein kann, so ist $s > \frac{r}{n}$ und $s - \frac{r}{n} \leqq \frac{1}{n}$ ... $\frac{r}{n}$ ein bis auf $\frac{1}{n}$ angenäherter Werth von s. Da man aber

n beliebig gross annehmen kann, so ist s eine Irrationalzahl. Wie dieser Satz auf positive und negative Grössen ausgedehnt werden kann, ist klar.

Sind a und b zwei rationale oder irrationale absolute Zahlen, so ist, wenn a nicht gleich b, eine von beiden Zahlen grösser als die andere. Denn bezeichnet E eine bestimmte positive Grösse, so sind auch $E.a$ und $E.b$ solche Grössen. Beide Grössen sind also entweder gleich oder eine von beiden ist grösser als die andere. t $E.a = E.b$, so ist auch $a = b$, es muss also eine von bei-en grösser als die andere sein. Ist z. B. $E.a > E.b$, so ist $.a - E.b = E.(a-b) =$ einer angebbaren positiven Grösse. an kann also nach dem vorigen Satze $E.(a-b) = E.\delta$ setzen, o δ eine absolute. angebbare rationale oder irrationale Zahl ist. ann ist aber nach §. 20. $a - b = \delta$, also $a > b$.

E. Begriff der Potenz.

§. 23. Ist a irgend ein Behandlungszeichen, und n eine ab-olute ganze Zahl, so bezeichnet a^n bekanntlich ein Product aus Factoren, welche sämmtlich $= a$ sind. a^n ist also ein Behand-ngszeichen, welches anzeigt, dass mit einer Grösse n mal hinter inander die durch a angezeigte Behandlung vorgenommen werden oll.

Ist a ein angebbares Behandlungszeichen und $x+y-z$ einer bsoluten Zahl gleich, so ist $a^{x+y-z} = a^x . a^y : a^z$. Für den Fall, ass $x + y - z$ Null oder einer negativen Zahl gleich ist, soll iese Gleichung als Definition der Potenz dienen, so dass also, orläufig wenn x, y, z beliebige ganze Zahlen sind, $a^{x+y-z} = a^x$ $a^y : a^z$ ist.

Es lässt sich leicht nachweisen, dass aus $a = b$, $\pm x \pm y \pm z$ $= \pm x' \pm y' \pm z'$ folgt $a^{\pm x \pm y \pm z} = b^{\pm x' \pm y' \pm z'}$, wenn a angeb-bar ist.

§. 24. Ist a eine absolute, rationale oder irrationale Zahl und r eine ganze Zahl, so giebt es eine absolute, rationale oder irra-tionale Zahl w, welche der Bedingung $w^r = a$ genügt.

Beweis. Es sei n eine beliebige ganze Zahl; man bestimme die ganzen Zahlen $z, z_1, z_2 \ldots$ in inf. so, dass sie den Bedin-gungen:

$$z^r \leqq a < (z+1)^r$$

$$(z + \frac{z_1}{n})^r \leqq a < (z + \frac{z_1}{n} + \frac{1}{n})^r$$

$$(z + \frac{z_1}{n} + \frac{z_2}{n^2})^r \leqq a < (z + \frac{z_1}{n} + \frac{z_2}{n^2} + \frac{1}{n^2})^r$$

$$z + \frac{z_1}{n} + \frac{z_2}{n^2} + \frac{z_3}{n^3})^r \leqq a < (z + \frac{z_1}{n} + \frac{z_2}{n^2} + \frac{z_3}{n^3} + \frac{1}{n^3})^r$$

in inf.

gen, so ist offenbar

$$(z+\frac{z_1}{n})^r < (z+1)^r \ldots . z_1 < n$$

$$(z+\frac{z_1}{n}+\frac{z_2}{n^2})^r < (z+\frac{z_1}{n}+\frac{1}{n})^r \ldots . z_2 < n$$

$$(z+\frac{z_1}{n}+\frac{z_2}{n^2}+\frac{z_3}{n^3})^r < (z+\frac{z_1}{n}+\frac{z_2}{n^2}+\frac{1}{n^2})^r \ldots z_3 <$$

in inf.

Setzt man

$$w_m = z+\frac{z_1}{n}+\frac{z_2}{n^2}+\frac{z_3}{n^3}+\ldots \frac{z_m}{n^m},$$

so ist

$$w_m^r \leqq a < (w_m+\frac{1}{n^m})^r.$$

Hieraus folgt

$$a - w_m^r < (w_m+\frac{1}{n^m})^r - w_m^r$$

$$< (w_m+\frac{1}{n^m} - w_m) . \frac{(w_m+\frac{1}{n^m})^r - w_m^r}{(w_m+\frac{1}{n})-w_m}$$

$$< \frac{1}{n^m} . \{(w_m+\frac{1}{n^m})^{r-1} + (w_m+\frac{1}{n^m})^{r-2} . w_m$$

$$+ (w_m+\frac{1}{n^m})^{r-3} . w^2{}_m + \ldots w_m^{r}$$

$$< \frac{1}{n^m} . r . (w_m+\frac{1}{n^m})^{r-1} \ldots (\text{da } w_m < w_m+\frac{1}{n^m})$$

$$< \frac{r}{n^m}(z+1)^{r-1} \ldots (\text{da } w_m + \frac{1}{n^m} < z+1.$$

Da $n > 1$, so folgt hieraus:

$$\lim^{m=\infty} (a - w_m^r) = 0$$

oder

$$a = \lim^{m=\infty}(w_m^r) = (\lim^{m=\infty} w_m)^r = w_\infty^r.$$

Um also die Richtigkeit des oben ausgesagten Satzes nachzu[wei]sen, braucht nur noch gezeigt zu werden, dass $w_\infty =$ einer ra[tio]nalen oder irrationalen Zahl sein muss. Es ist aber:

$$w_\infty = z + \frac{z_1}{n} + \frac{z_2}{n^2} + \ldots + \frac{z_m}{n^m} + \ldots \text{ in inf.}$$

$$\geqq z + \frac{z_1}{n}$$

$$\leqq z + \frac{z_1}{n} + \frac{n-1}{n^2} + \frac{n-1}{n^3} + \ldots \frac{n-1}{n^m} + \text{ in inf.} \ldots$$

(da $z_m < n$, also höchstens $= n - 1$)

$$\leqq z + \frac{z_1}{n} + \frac{n-1}{n^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n}}$$

$$\leqq z + \frac{z_1}{n} + \frac{1}{n},$$

also $z + \frac{z_1}{n}$ ein bis auf $\frac{1}{n}$ angenäherter Werth von w. Da nun n eine beliebig grosse Zahl sein kann, so ist w_∞ eine irrationale und offenbar auch eine absolute Zahl.

Der z. B. von Ohm in seinem „Geist der Analysis" gegebene Beweis dieses Satzes scheint mir bei der hier eingeschlagenen Betrachtungsweise nicht vollkommen streng zu sein. Er stützt sich nämlich auf den Satz, dass $a < \sqrt[r]{b}$, wenn $a^r < b$, vorausgesetzt dass a und $\sqrt[r]{b}$ absolute Zahlen sind. Bei dem Beweise dieses Satzes muss man aber voraussetzen, dass $\sqrt[r]{b}$ entweder $>$, oder $=$ oder $< a$ ist, was hier nicht ohne Weiteres geschehen durfte. Ich glaubte deshalb obigem, freilich weitläuftigern Beweis den Vorzug geben zu müssen.

Bezeichnet a eine rationale oder irrationale absolute Zahl, so soll $\sqrt[r]{a}$ eine ähnliche Zahl bezeichnen, bestimmt durch die Bedingung $(\sqrt[r]{a})^r = a$. Ein anderes Behandlungszeichen als eine rationale oder irrationale absolute Zahl, welches dieser Bedingung genügt, soll durch $\mathfrak{W}\!\!\sqrt[r]{a}$ bezeichnet werden. Ist dann die rationale oder irrationale absolute Zahl $a = b$, so ist auch $\sqrt[r]{a} = \sqrt[r]{b}$.

Denn da $\sqrt[r]{a}$ und $\sqrt[r]{b}$ rationale oder irrationale absolute Zahlen sind, so ist nach §. 22., wenn $\sqrt[r]{a}$ nicht $= \sqrt[r]{b}$ ist, $\sqrt[r]{a} \gtrless \sqrt[r]{b}$. Daraus würde aber folgen $(\sqrt[r]{a})^r \gtrless (\sqrt[r]{b})^r$ oder $a \gtrless b$, gegen die Voraussetzung.

Es ist also $\sqrt[r]{a}$ ein eindeutiges Behandlungszeichen. Die übrigen Eigenschaften dieses Zeichens ergeben sich aus der Eigenschaft desselben eine rationale oder irrationale absolute Zahl zu sein.

Ist a ein anderes Behandlungszeichen als eine absolute, rale oder irrationale Zahl, so soll $\sqrt[r]{a}$ ein Behandlungszeichen welches der Bedingung $(\sqrt[r]{a})^r = a$ genügt. $\sqrt[r]{a}$ zeigt also solche Behandlung der Grösse X an, durch deren $r$malige

Wiederholung die Grösse $X . a$ entsteht. Giebt es mehrere Behan
lungen, welche dieser Bedingung genügen, so soll $\sqrt[r]{a}$ nur ei
dieser Behandlungen bezeichnen, so dass $\sqrt[r]{a}$ immer ein eindeut
ges Behandlungszeichen ist.

§. 25. Ist $x . y : z =$ einer ganzen Zahl, so ist $a^{x \cdot y}$
$= \sqrt[z]{(a^x)^y}$. Für den Fall, dass $x . y : z$ keiner ganzen Zahl, so
dern einem Bruch gleich ist, soll diese Gleichung zur Definiti
der Potenz mit gebrochenen Exponenten dienen. Ist a eine rati
nale oder irrationale, absolute Zahl, so ist $a^{x \cdot y : z}$ einer ähnlich
gleich. Unter derselben Voraussetzung, und wenn man die ob
gegebene Bedeutung des Zeichens $\sqrt{\ }$ festhält, ergiebt sich auc
dass $a^{x \cdot y : z} = b^{x' \cdot y' : z'}$, wenn $a = b$, $x . y : z = x' . y' : z'$ is
Dass überhaupt die gewöhnlichen Sätze über Potenzen für solch
Potenzen ganz allgemein gelten, leuchtet leicht ein.

§. 26. Ist x eine irrationale Zahl, so kann nach dem Früher
$x = m_0 + m_1 + m_2 + \ldots. m_n + \ldots.$ in inf. gesetzt werden. I
alsdann x auch einer rationalen Zahl gleich, so ist

$$a^x = a^{m_0} . a^{m_1} . a^{m_2} . a^{m_3} \ldots. a^{m_n} \ldots. \text{ in inf.}$$
$$= \lim^{n=\infty} (a^{m_0} . a^{m_1} . a^{m_2} \ldots. a^{m_n})$$

wenn a eine absolute, rationale oder irrationale Zahl ist.

Der Beweis kann hier übergangen werden, da später noch ei
Beweis vorkommt, der dem Beweise dieses Satzes ganz ähnlich is
Für den Fall, dass x keiner rationalen Zahl gleich ist, soll obig
Gleichung als die Definition der Potenz a^x gelten.

Ist a eine absolute, rationale oder irrationale, angebbare Zah
so ist auch a^x eine absolute, rationale oder irrationale Zahl.

Beweis. Es sei $m_0 + m_1 + m_2 + \ldots. m_n = x_n$, m_{n+}
$+ m_{n+2} + \ldots.$ in inf. $= \Delta_n$, und um einen bestimmten Fall v
sich zu haben, sei $a > 1$; dann ist $a^x = a^{x_n} . a^{\Delta_n}$, also $a^x - a$
$= a^{x_n}(a^{\Delta_n} - 1)$. Da x_n ein angenäherter Werth von x und $x -$
$= \Delta_n$ ist, so kann man n so gross nehmen, dass val. abs. $\Delta_n <$
wo r eine beliebige ganze Zahl bezeichnet. Dann ist $\frac{1}{a^{\frac{1}{r}}} < a$
$< a^{\frac{1}{r}}$. Da $a^{\frac{1}{r}} > 1$ ist, so kann man $a^{\frac{1}{r}} = 1 + \delta$ setzen, wo
eine positive Zahl bezeichnet. Es ist dann $a = (1 + \delta)^r > 1 + r$
also $\delta < \frac{a-1}{r}$. Nimmt man also r gross genug, so kann δ klein
sein, als jede angebbare absolute Zahl. Ferner ist $\frac{1}{a^{\frac{1}{r}}} = \frac{1}{1+}$
$= 1 - \frac{\delta}{1+\delta} = 1 - \delta'$, wo die positive Zahl δ' ebenfalls klein
sein kann, als jede angebbare positive Zahl. Es ist dann also $1 -$
$< a^{\Delta_n} < 1 + \delta$ oder $- \delta' < a^{\Delta_n} - 1 < + \delta$; mithin val. ab
$(a^x - a^{x_n}) < a^{x_n}\delta$. Hieraus geht hervor, dass a^{x_n} ein belieb
nah angenäherter Werth von a^x sein kann, und da man a^{x_n} b

liebig nahe in einer rationalen Zahl ausdrücken kann, so gilt dasselbe für a^x.

Ist $a < 1$, so ist $\frac{1}{a} > 1$ und $a^x = 1 : \left(\frac{1}{a}\right)^x$. Da nun $\left(\frac{1}{a}\right)^x$ eine irrationale Zahl ist, so gilt dasselbe für $1 : \left(\frac{1}{a}\right)^x$ oder für a^x.

Ist die irrationale Zahl $x = y$, oder sind x und y verschiedene Reihenentwickelungen einer und derselben irrationalen Zahl und ist die angebbare, absolute, rationale oder irrationale Zahl $a = b$, so ist $a^x = b^x$.

Beweis. Sind x_n, y_n zwei bis auf $\frac{1}{n}$ angenäherte Werthe von x und y und zwar z. B. kleiner als diese, so ist $x_n < x < x_n + \frac{1}{n}$, $y_n < y < y_n + \frac{1}{n}$, also, da $y = x$, $x_n - y_n - \frac{1}{n} < 0$, $x_n - y_n + \frac{1}{n} > 0$; mithin val. abs. $(x_n - y_n) < \frac{1}{n}$. Ferner ist $a^{x_n} - a^{y_n} = a^{y_n}(a^{x_n - y_n} - 1)$. Da nun $x_n - y_n$ dem absoluten Werthe nach kleiner sein kann als jede angebbare Zahl, so lässt sich auf ähnliche Weise wie in dem vorigen Beweise zeigen, dass dasselbe von $a^{x_n - y_n} - 1$, also auch von $a^{x_n} - a^{y_n}$ gilt. Man kann also setzen, da $a^{y_n} = b^{y_n}$:

$$-\frac{1}{r} < a^{x_n} - b^{y_n} < +\frac{1}{r}$$

und ebenso:

$$-\frac{1}{r} < a^x - a^{x_n} < +\frac{1}{r}$$

$$-\frac{1}{r} < b^{y_n} - b^y < +\frac{1}{r},$$

also

$$-\frac{3}{r} < a^x - b^y < +\frac{3}{r},$$

woraus unmittelbar die Gleichheit von a^x und b^y folgt.

Die bekannten Sätze über Potenzen lassen sich dann auch leicht auf Potenzen mit irrationalen Exponenten ausdehnen. Ist z. B. $x = m_0 + m_1 + m_2 + \ldots$ in inf., $y = n_0 + n_1 + n_2 + \ldots$ in inf., so ist

$$\begin{aligned}
a^x \cdot a^y &= a^{m_0} \cdot a^{m_1} \cdot a^{m_2} + \ldots \text{ in inf. } a^{n_0} \cdot a^{n_1} \cdot a^{n_2} \ldots \text{ in inf.} \\
&= a^{m_0 + n_0 + m_1 + n_1 + m_2 + n_2 \ldots \text{ in inf.}} \\
&= a^{x+y}, \\
(a^x)^y &= (a^x)^{n_0 + n_1 + n_2 \ldots \text{ in inf.}} = (a^x)^{n_0} \cdot (a^x)^{n_1} \cdot (a^x)^{n_2} \cdot \text{ in inf.} \\
&= a^{x(n_0 + n_1 + n_2 \ldots \text{ in inf.})} = a^{x \cdot y}
\end{aligned}$$

etc. etc.

und es ist einleuchtend, dass diese Sätze streng allgemein gelten, so lange man das oben über die Bedeutung dieser Potenzen Gesagte genau festhält.

F. Imaginäre Grössen und Zahlen.

§. 27. In dem Frühern wurde keine besondere A
sen betrachtet, sondern die Untersuchungen gelten fü
welche den früher angegebenen Grundsätzen genügt
aber von einer solchen Behandlung der Einheit die
nur auf eine besondere Art von Grössen Anwendung
bis jetzt gefunden hat, wird es auch erlaubt sein, die
auf diese Art von Grössen einzuschränken. Dieses ist
durch imaginäre Zahlen vorgeschriebenen Behandlung
der Fall, die nur bei einer besondern Art von räumli
ausführbar ist.

§. 28. Soll die Lage eines Punktes A auf eine
gedachten, geraden oder krummen Linie bestimmt we
man den Punkt A mit Bestimmtheit von allen andern
ser Linie unterscheiden kann, so muss man die Lage
Punktes O dieser Linie als bekannt voraussetzen.
geradlinige oder krummlinige Entfernung OA gegeben
Lage des Punktes A im Allgemeinen noch eine zw
Um diese Zweideutigkeit aufzuheben, denke man sic
zweiten Punkt M der Linie gegeben, der eine grösse
von O als A hat. Um nun den Punkt A zu erhalte
von O aus die Entfernung OA entweder so abtragen,
Entfernung MO vergrössert oder dass sie dieselbe ve
ersten Falle kann man alsdann die Entfernung als
im zweiten als eine negative Grösse betrachten. Beka
man diese, positiv oder negativ gedachte Entfernung
nate des Punktes A. Eine Linie, deren Punkte ma
Coordinaten bestimmt denkt, heisst eine Coordinate
man unterscheidet in ihr die positive und die negative

Sind X, X' die Coordinaten der Punkte A und A'
allgemein $MA = MO + X$, $MA' = MO + X'$; dahe
abs. $(MA - MA') =$ val. abs. $(X - X')$.

Es seien O und O' zwei Anfangspunkte der Co
derselben Achse, X und X' die Coordinaten von A
O und O', und es sei X_0 die Coordinate von O' in B
Anfangspunkt O. Setzt man voraus, dass in beiden
Zeichen der Coordinaten mit Hülfe desselben Punktes
sei, der also nicht zwischen den Punkten O, O', A li
ist streng allgemein $MA = MO + X$, $MA = MO'$
$+ X_0 + X'$; also $X = X_0 + X'$.

Um die Lage eines Punktes A in einer Ebene z
setzt man bekanntlich die Lage zweier sich in demse
punkte O rechtwinklig schneidenden Coordinatenachse
voraus. Denkt man sich alsdann durch A zwei Para
beiden Achsen gezogen, so ist die Lage derselben,
Lage ihres Durchschnittspunktes A vollkommen geg
stimmt, wenn man die Coordinaten der Durchschnitte
lelen mit den beiden Achsen kennt. Diese beiden C
und Y nennt man bekanntlich auch die rechtwinklige
des Punktes A.

Es seien X, Y; (X), (Y); X', Y' die Coordinate
tes in Bezug auf drei Coordinatensysteme mit parallel
gerichteten Halbachsen, deren Anfangspunkte O, (

(O) liege auf der Achse der X und seine Coordinate in Bezug auf O sei X_0; O' liege auf der Achse der (Y) und seine Coordinate in Bezug auf (O) sei Y_0, so sind X_0, Y_0 die Coordinaten von O' in Bezug auf O. Es ist dann

$$X = X_0 + (X), \quad (X) = X'$$
$$Y = (Y) \qquad (Y) = Y_0 + Y'$$

daher

$$X = X_0 + X', \quad Y = Y_0 + Y'.$$

§. 29. Begränzte Gerade, die man sich von einem und demselben Anfangspunkte aus in derselben Ebene nach verschiedenen Richtungen gezogen denkt, sollen Strahlen genannt werden. Verschiedene Strahlen können sich durch ihre verschiedene absolute Länge und auch durch ihre verschiedene Richtung unterscheiden. Sieht man den Anfangspunkt der Strahlen auch als Anfangspunkt der Coordinaten an, so ist der Strahl vollkommen bestimmt und gegeben, wenn die Coordinaten seines Endpunktes gegeben sind.

Sind die Coordinaten des Endpunktes eines Strahls in Bezug auf den Anfangspunkt A und B, zieht man durch einen Punkt M, dessen Coordinaten X_0, Y_0 sind, eine Gerade MN, welche mit dem gegebenen Strahl gleiche Richtung und Länge hat, so sind die Coordinaten des Punktes N in Bezug auf ein durch M gelegtes, dem anfänglichen paralleles Achsensystem ebenfalls A und B. In Bezug auf das anfängliche Achsensystem selbst sind daher die Coordinaten des Punktes N $X_0 + A$, $Y_0 + B$.

Für solche Strahlen sollen folgende Definitionen gelten:

I) Zwei Strahlen sind gleich, wenn sie gleiche Längen haben und von demselben Anfangspunkt nach derselben Richtung laufen, wenn sie also identisch sind.

II) Es seien OA_1 und OA_2 zwei Strahlen. Zieht man von A_1 eine Gerade A_1A_3, welche mit dem Strahl OA_2 gleiche Richtung und Länge hat, so nennt man den Strahl OA_3 die Summe der Strahlen OA_1 und OA_2 (Str. OA_3 = Str. OA_1 + Str. OA_2). Zieht man von A_1 eine Gerade A_1A_4, welche mit dem Strahl OA_2 gleiche Länge, aber die entgegengesetzte Richtung hat, so nennt man den Strahl OA_4 die Differenz der Strahlen OA_1 und OA_2 (Str. OA_4 = Str. OA_1 − Str. OA_2).

Um die Summe zweier Strahlen zu construiren braucht man daher nur aus diesen beiden Strahlen das Parallelogramm zu construiren; die durch O gehende Diagonale desselben ist die Summe. Um die Differenz zu finden, muss man ein Parallelogramm aus OA_1 und dem Entgegengesetzten von OA_2 construiren; die durch O gehende Diagonale desselben ist alsdann die Differenz.

Es muss nun noch gezeigt werden, dass Strahlen den in §. 2. aufgestellten Grundsätzen genügen, dass sie also als Grössen betrachtet werden dürfen. Die Richtigkeit von I) und II) ergiebt sich unmittelbar und die Beweise der übrigen Sätze sind einander ganz ähnlich. Um z. B. zu zeigen, dass

$$\text{St. } OA_1 + (\text{Str. } OA_2 \pm \text{Str. } OA_3) = \text{Str. } OA_1 + \text{Str. } OA_2 \pm \text{Str. } OA_3,$$

bezeichne man die Coordinaten von A_1, A_2, A_3 mit X_1, Y_1; X_2,

Y_2; X_3, Y_3. Die Coordinaten des Endpunktes des dem Strahle OA_3 entgegengesetzten Strahles sind dann $- X_3$, $- Y_3$. Aus der Erklärung der Summe und Differenz zweier Strahlen in Verbindung mit dem im Anfange dieses Paragraphen bewiesenen Satze folgt dann, dass der Endpunkt von

$$\text{Str. } OA_1 + (\text{Str. } OA_2 \pm \text{Str. } OA_3)$$
$$\text{Str. } OA_1 + \text{Str. } OA_2 \pm \text{Str. } OA_3$$

respective

$$\text{die Coordinaten } X_1 + (X_2 \pm X_3),\ Y_1 + (Y_2 \pm Y_3)$$
$$\text{die Coordinaten } X_1 + X_2 \pm X_3,\ Y_1 + Y_2 \pm Y_3$$

hat. Die Endpunkte der, durch die beiden in Rede stehenden Ausdrücke bezeichneten Strahlen haben also gleiche Coordinaten oder fallen zusammen; die Strahlen selbst sind also gleich.

Strahlen, welche verschiedene Richtung haben, können natürlich nicht mehr als einstimmige Grössen betrachtet werden (§. 10.). Strahlen, welche dieselbe Richtung haben, genügen indessen, wie leicht zu ersehen, den in §. 10. aufgestellten Grundsätzen und dürfen daher als einstimmige Grössen betrachtet werden.

§. 30. Wird ein Strahl mit einem absoluten Behandlungszeichen multiplicirt, so ist das Product ein Strahl, welcher mit dem Multiplicanden dieselbe Richtung hat. Dieses findet also namentlich statt, wenn der Multiplicator eine absolute rationale oder eine irrationale Zahl ist, deren angenäherte Werthe absolute Zahlen sind. Wird ein Strahl mit einer negativen Zahl multiplicirt, so ist, wie leicht zu ersehen, das Product ein Strahl in der entgegengesetzten Richtung des Multiplicanden. Es muss nun zunächst der Begriff solcher Behandlungszeichen entwickelt werden, mit welchen multiplicirt der Strahl eine andere Richtung erhält.

Man denke sich um den Anfangspunkt der Strahlen mit einem beliebigen Halbmesser einen Kreis beschrieben, dessen Umfang von der Richtung eines Strahls R in einem bestimmten Punkt A_0 geschnitten wird. Den Punkt A_0 kann man als den Anfangspunkt der Bogencoordinaten auf dem Umfange des Kreises ansehen und willkührlich feststellen, nach welcher Seite die positiven Coordinaten genommen werden sollen. Wird aber durch O zugleich ein rechtwinkliges Achsensystem gelegt, so sollen die positiven Bogencoordinaten nach der Seite liegen, nach welcher man die positive Halbachse der X drehen muss, um auf dem kürzesten Wege nach der positiven Halbachse der Y zu gelangen.

Die Richtung eines andern Strahls ist alsdann vollkommen bestimmt, wenn man die Bogencoordinate des Punktes A kennt, in welchem der in Rede stehende Kreisumfang von der Richtung des Strahls geschnitten wird. Die Coordinate des Punktes A in Bezug auf A_0 ist aber gleich dem Producte des Halbmessers in eine positive oder negative, rationale oder irrationale Zahl φ. Diese Zahl φ soll in dem Folgenden der beschriebene Winkel der Richtung OA in Bezug auf OA_0 genannt werden. Es ist klar, dass der beschriebene Winkel einer Richtung in Bezug auf eine andere unendlich viele von einander verschiedene Werthe haben kann.

Das Behandlungszeichen ε soll anzeigen, dass ein Strahl bei unveränderter Länge nach der positiven Seite der Bogencoordi-

naten um einen Winkel gedreht werden soll, dessen Bogen dem Halbmesser gleich ist. Bezeichnet R einen beliebigen Strahl, so bezeichnet $R.\varepsilon$ einen Strahl von gleicher Länge, welcher mit R den beschriebenen Winkel $+1$ bildet. Ist n eine absolute ganze Zahl, so schreibt nach der Erklärung der Potenz ε^n eine $n$malige Wiederholung der durch ε angezeigten Behandlung, also eine Drehung des Strahls um den beschriebenen Winkel $+n$ vor. $\varepsilon^{\frac{1}{r}} = \sqrt[r]{\varepsilon}$ schreibt eine Behandlung der Einheit vor, durch deren $r$malige Wiederholung eine Drehung des Strahls um den Winkel $+1$ entsteht. Dieser Bedingung genügt unter andern die Drehung des Strahls um den beschriebenen Winkel $+\frac{1}{r}$ und da einer frühern Bemerkung zu Folge das Zeichen $\sqrt[r]{\varepsilon}$ oder $\varepsilon^{\frac{1}{r}}$ immer eine bestimmte Bedeutung haben soll, so soll gerade diese Drehung des Strahls um den beschriebenen Winkel $+\frac{1}{r}$ durch das Zeichen $\varepsilon^{\frac{1}{r}}$ oder $\sqrt[r]{\varepsilon}$ angezeigt werden. Nach der Definition der Potenz schreibt alsdann $\varepsilon^{\frac{n}{r}} = \sqrt[r]{\varepsilon^n}$ eine Drehung des Strahls um den beschriebenen Winkel $+\frac{n}{r}$ vor. Ist φ eine irrationale positive Zahl und $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots.$ in inf., so ist nach einer frühern Definition $\varepsilon^\varphi = \varepsilon^{\varphi_0} . \varepsilon^{\varphi_1} . \varepsilon^{\varphi_2} +$ in inf. ε^φ schreibt also eine Drehung des Strahls um den Winkel $\varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots.$ in inf. $= \varphi$ vor. Das Zeichen $\varepsilon^{\varphi - \psi}$, wo φ und ψ rationale oder irrationale positive Zahlen sind und $\varphi - \psi$ positiv, 0 oder negativ sein kann, muss alsdann eine Drehung des Strahls um den beschriebenen Winkel $\varphi - \psi$ anzeigen. Denn bezeichnet x eine solche Drehung um $\varphi - \psi$, so ist offenbar $x . \varepsilon^\psi = \varepsilon^\varphi$, also, da ε^ψ angebbar, $\varepsilon = \varepsilon^\varphi : \varepsilon^\psi = \varepsilon^{\varphi - \psi}$.

Ist also x eine beliebige positive oder negative, rationale oder irrationale Zahl, so ist ε^x ein Behandlungszeichen, welches eine Drehung eines Strahls um den beschriebenen Winkel x vorschreibt.

Aus der Lehre von den Potenzen, oder auch unmittelbar aus dem eben hergeleiteten Satze ergiebt sich dann leicht die Richtigkeit folgender Sätze:

$$\text{I)}\ \varepsilon^x . \varepsilon^y = \varepsilon^{x+y}, \quad \text{II)}\ \varepsilon^x : \varepsilon^y = \varepsilon^{x-y}, \quad \text{III)}\ (\varepsilon^x)^y = \varepsilon^{x . y}.$$

§. 31. In Bezug auf die §. 5. angegebene Eintheilung der Behandlungszeichen ergeben sich für ε^x folgende Bestimmungen.

I) ε^x ist ein eindeutiges Behandlungszeichen.

Denn ist der Strahl $R = R_1$, fallen also beide Strahlen zusammen, so fallen diese Strahlen auch noch zusammen, wenn man beide um den Winkel x dreht. Die durch $R . \varepsilon^x$ und $R_1 . \varepsilon^x$ dargestellten Strahlen fallen also zusammen oder sind gleich.

II) ε^x ist eine Zahl.

$R + R_1$ ist die Diagonale des aus den Strahlen R und R_1 construirten Parallelogramms. $(R + R_1) . \varepsilon^x$ erhält man, wenn man diese Diagonale um den Winkel x dreht. Denkt man sich das ganze Parallelogramm mitgedreht, so erscheint $(R + R_1) . \varepsilon^x$ als

Diagonale eines Parallelogramms, dessen Seiten durch $R.\varepsilon^x, R_1.\varepsilon^x$ dargestellt werden können. Man hat also offenbar $(R+R_1).\varepsilon^x = R.\varepsilon^x + R_1.\varepsilon^x$, woraus sich dann auch leicht $(R-R_1).\varepsilon^x = R.\varepsilon^x - R_1.\varepsilon^x$ ergiebt.

III) ε^x ist mit allen positiven oder negativen, rationalen oder irrationalen Zahlen und auch mit ε^y gleichartig.

Ist R irgend ein Strahl und a eine positive, rationale oder irrationale Zahl, so haben $R.a.\varepsilon^x$ und $R.\varepsilon^x.a$ gleiche Länge. Sie haben aber auch dieselbe Richtung, da die Richtung beider aus der von R durch Drehung um den Winkel x entsteht. Es ist also $R.a.\varepsilon^x = R.\varepsilon^x.a$.

$R.\varepsilon^x.(-a)$ und $R.(-a).\varepsilon^x$ sind die entgegengesetzten Strahlen von $R.\varepsilon^x.a$ und $R.a.\varepsilon^x$. Da letztere gleich sind, so müssen auch erstere gleich sein.

$R.\varepsilon^x.\varepsilon^y = R.\varepsilon^{x+y}$, $R.\varepsilon^y.\varepsilon^x = R.\varepsilon^{y+x}$. Da nun $x+y = y+x$ ist, so ist auch $R.\varepsilon^x.\varepsilon^y = R.\varepsilon^y.\varepsilon^x$.

IV) ε^x ist immer angebbar.

Denn jeder angebbare Strahl bleibt angebbar, wenn er auch um einen gewissen Winkel gedreht wird.

§. 32. Bezeichnet n eine positive oder eine negative ganze Zahl, so ist $R.\varepsilon^{2n\pi} = R = R.1$, also, da dieses für jeden Werth von R gilt, $\varepsilon^{2n\pi} = 1$. Ferner ist $\varepsilon^{2n\pi+x} = \varepsilon^{2n\pi}.\varepsilon^x = \varepsilon^x$. Da $R.\varepsilon^\pi = R.-1$ ist, so ist auch $\varepsilon^\pi = -1$, also auch $\varepsilon^{(2n+1).\pi} = \varepsilon^{2n\pi+\pi} = -1$. Bezeichnet man $\varepsilon^{\frac{\pi}{2}}$, d. h. die Drehung um einen rechten Winkel nach der positiven Seite mit i, so ist auch $\varepsilon^{2n\pi+\frac{\pi}{2}} = \varepsilon^{\frac{\pi}{2}} = i$ und $\varepsilon^{(2n+1).\pi+\frac{\pi}{2}} = -i$. Endlich ist $i^2 = \varepsilon^{\frac{\pi}{2}}.\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} = \varepsilon^{+\pi} = -1$, $(-i)^2 = \varepsilon^{\frac{3\pi}{2}}.\varepsilon^{\frac{3\pi}{2}} = \varepsilon^{3\pi} = -1$.

Bezeichnet A einen beliebigen Strahl, so kann man jeden andern von demselben Anfangspunkte ausgehenden Strahl durch ein Product von der Form $A.r.\varepsilon^\varphi$ bezeichnen, wo r eine absolute, rationale oder irrationale Zahl und φ ein positiver oder negativer beschriebener Winkel ist. Die Zahlen $r.\varepsilon^\varphi$ und $r'.\varepsilon^{\varphi'}$ sind immer, aber auch nur dann einander gleich, wenn $r = r'$ und $\varphi - \varphi' = 2n\pi$ ist, wo n eine positive oder negative ganze Zahl oder 0 bezeichnet. Denn immer, aber auch nur unter dieser Voraussetzung, haben die durch $A.r.\varepsilon^\varphi$ und $A.r'.\varepsilon^{\varphi'}$ bezeichneten Strahlen gleiche absolute Länge ($A.r$ und $A.r'$) und gleiche Richtung. Eine Zahl von der Form $r.\varepsilon^\varphi$ heisst eine imaginäre Zahl, sie wird eine reelle, wenn $\varphi = n.\pi$, wo n eine ganze Zahl oder 0 ist. r heisst bekanntlich der Modulus von $r.\varepsilon^\varphi$.

§. 33. Da r und ε^φ gleichartige Zahlen und ε^φ eine Potenz ist, so kann man mit imaginären Zahlen gerade so rechnen, wie mit andern Ausdrücken von ähnlicher Gestalt. Man hat daher

$$r.\varepsilon^\varphi \times r'.\varepsilon^{\varphi'} \times r''.\varepsilon^{\varphi''} \ldots. = rr'r'' \ldots. \varepsilon^{\varphi+\varphi'+\varphi''} \ldots.,$$

$$r\varepsilon^\varphi : (r'\varepsilon^{\varphi'}) = \frac{r}{r'}.\varepsilon^{\varphi-\varphi'},$$

wenn r' angebbar etc. etc.

Die bekannten Sätze über die vielförmigen Wurzeln lassen

sich mit Leichtigkeit aus den aufgestellten Begriffen entwickeln. $z = \sqrt[n]{(r \,.\, \varepsilon^{\varphi})}$ bezeichnet bekanntlich irgend eine der reellen oder imaginären Zahlen, bestimmt durch die Gleichung $z^n = r \,.\, \varepsilon^{\varphi}$. Da z eine reelle oder imaginäre Zahl sein kann, so muss $z = \varrho \,.\, \varepsilon^{\psi}$ sein. Es wird dann aus obiger Gleichung $\varrho^n \,.\, \varepsilon^{n\psi} = r \,.\, \varepsilon^{\varphi}$. Diese Gleichung kann nur bestehen, wenn $\varrho^n = r$, $n\psi - \varphi = 2\nu\pi$ ist, woraus $\varrho = \sqrt[n]{r}$, $\psi = \frac{2\nu\pi + \varphi}{n}$ folgt. Hieraus ergiebt sich $\sqrt[n]{(r\varepsilon^{\varphi})}$ $= \sqrt[n]{r} \,.\, \varepsilon^{\frac{2\nu\pi + \varphi}{n}}$, welcher Ausdruck, da man für ν jede positive oder negative ganze Zahl, so wie auch 0 setzen kann, bekanntlich n von einander verschiedene Werthe haben kann.

§. 34. Die imaginären Zahlen lassen sich noch unter einer andern, bemerkenswerthen Form darstellen. Es sei A derjenige Strahl, welcher als Einheit aller andern von demselben Anfangspunkte ausgehenden betrachtet werden soll. Man lasse die positive Halbachse der X mit der Richtung dieses Strahls zusammenfallen und bestimme die Richtung der positiven Halbachse der Y nach der in §. 30. gemachten Bemerkung. Ist nun $R = A \,.\, r\varepsilon^{\varphi}$ irgend ein anderer Strahl, so kann man die Coordinaten des Endpunktes desselben oder die Projectionen desselben auf die Achse der X und Y durch $A \,.\, x$ und $A \,.\, y$ bezeichnen, wo x und y positive oder negative, rationale oder irrationale Zahlen sind. Diese Projectionen kann man aber ebenfalls als Strahlen betrachten und als Producte von A in imaginäre Zahlen darstellen. Es ist einleuchtend, dass ganz allgemein die Projection auf die Achse der $X = A \,.\, x$; die auf die Achse der $Y = A \,.\, y \,.\, \varepsilon^{\frac{\pi}{2}} = A \,.\, y \,.\, i$ sein muss. Da aber R die Summe seiner als Strahlen gedachten Projectionen sein muss, so ist $A \,.\, r\varepsilon^{\varphi} = A \,.\, x + A \,.\, yi = A \,.\, (x + y \,.\, i)$.

Ist nun A angebbar, so folgt hieraus $r\varepsilon^{\varphi} = x + y \,.\, i$. Denn da $x + y \,.\, i$ als Summe zweier imaginären Zahlen, wie leicht zu beweisen, wieder eine imaginäre Zahl $r' \,.\, \varepsilon^{\varphi'}$ sein muss, so kann man obige Gleichung auch schreiben $A \,.\, r\varepsilon^{\varphi} = A \,.\, r'\varepsilon^{\varphi'}$. Dieses ist aber nur dann möglich, wenn $A.r = A.r'$, also $r = r'$ und $\varphi - \varphi'$ $= 2\nu\pi$ oder $\varepsilon^{\varphi} = \varepsilon^{\varphi'}$, daher $r\varepsilon^{\varphi} = r'\varepsilon^{\varphi'}$ ist.

Da dem Frühern gemäss $i^2 = -1$ ist, so kann man auch $i = \sqrt{-1}$ setzen, wenn man bestimmt, dass $\sqrt{-1}$ gerade die Zahl $i = \varepsilon^{\frac{\pi}{2}}$ und nicht $-i = \varepsilon^{-\frac{\pi}{2}} = \varepsilon^{\frac{3\pi}{2}}$ bedeuten soll.

Bekanntlich sind diejenigen positiven und negativen, rationalen oder irrationalen Zahlen, mit denen man die absolute Länge eines Strahls multipliciren muss, um seine Projectionen auf die Achse der X und Y zu erhalten, unabhängig von der Länge des Strahls und allein abhängig von seinem beschriebenen Winkel φ. Man bezeichnet sie deshalb mit Cos φ und Sin φ. Man hat also

$$A \,.\, x = (\text{val. abs. } R) \,.\, \text{Cos}\,\varphi \qquad A \,.\, y = (\text{val. abs. } R) \,.\, \text{Sin}\,\varphi$$
$$= A \,.\, r \,.\, \text{Cos}\,\varphi \qquad\qquad = A \,.\, r \;\text{Sin}\,\varphi$$

oder

$$x = r \,.\, \text{Cos}\,\varphi \qquad\qquad y = r \,.\, \text{Sin}\,\varphi.$$

Es ist daher

$$r\varepsilon^{\varphi} = r(\text{Cos }\varphi + i \text{ Sin }\varphi).$$

Mit diesen Ausdrücken kann man, wie aus dem Frühern erhellet, ebenso rechnen, als wenn i irgend eine reelle Zahl wäre, nur muss man der Bedeutung von i gemäss $i^2 = -1$ setzen.

Aus der Gleichung $x + i.y = x' + i.y'$ folgt, wenn A irgend einen Strahl bezeichnet, $A.(x + i.y) = A.(x' + i.y')$. Die durch diese Ausdrücke bezeichneten Strahlen sind aber nur dann gleich, wenn die Coordinaten ihrer Endpunkte gleich sind, d. h. wenn $A.x = A.x'$, $A.y = A.y'$ oder $x = x'$, $y = y'$ ist. Es ist hierbei vorausgesetzt, dass x, x', y, y' reelle Zahlen sind, indem sonst nicht $A.x$, $A.x'$, $A.y$, $A.y'$ die Bedeutung von Coordinaten haben könnten. Es ist also namentlich, wenn $(x + y.i) = r.(\text{Cos }\varphi + i \text{ Sin }\varphi)$, auch $x = r \text{ Cos }\varphi$, $y = r \text{ Sin }\varphi$.

§. 35. Von den vielfachen Anwendungen der obigen Betrachtungen möge hier nur die allgemeine Herleitung der Formeln für $\text{Cos}(\varphi + \varphi')$ und $\text{Sin}(\varphi + \varphi')$ eine Stelle finden. Es seien A, R, R' drei Strahlen von gleicher absoluter Länge; der beschriebene Winkel von R in Bezug auf A sei φ, der von R' in Bezug auf R sei φ' und der von R' in Bezug auf A sei ψ. Es ist dann nach der in §. 28. hergeleiteten Formel $\psi = \varphi + \varphi'$. Aus den früher entwickelten Begriffen ergiebt sich aber

$$R = A.\varepsilon^{\varphi},\ R' = A.\varepsilon^{\psi},\ R' = R.\varepsilon^{\varphi'} = A.\varepsilon^{\varphi}.\varepsilon^{\varphi'},$$

also

$$A.\varepsilon^{\psi} = A.\varepsilon^{\varphi}.\varepsilon^{\varphi'}$$

oder

$$\varepsilon^{\psi} = \varepsilon^{\varphi}.\varepsilon^{\varphi'}.$$

Nun ist aber

$$\varepsilon^{\psi} = \text{Cos }\psi + i \text{ Sin }\psi$$
$$\varepsilon^{\varphi} = \text{Cos }\varphi + i \text{ Sin }\varphi$$
$$\varepsilon^{\varphi'} = \text{Cos }\varphi' + i \text{ Sin }\varphi'.$$

Daher

$$\text{Cos }\psi + i \text{ Sin }\psi = (\text{Cos }\varphi + i \text{ Sin }\varphi).(\text{Cos }\varphi' + i \text{ Sin }\varphi')$$
$$= \text{Cos}\varphi.\text{Cos}\varphi' - \text{Sin}\varphi.\text{Sin}\varphi' + i.(\text{Sin}\varphi\,\text{Cos}\varphi' + \text{Sin}\varphi'\,\text{Cos}\varphi)$$

also

$$\text{Cos }\psi = \text{Cos}(\varphi + \varphi') = \text{Cos }\varphi.\text{Cos }\varphi' - \text{Sin }\varphi.\text{Sin }\varphi'$$
$$\text{Sin }\psi = \text{Sin}(\varphi + \varphi') = \text{Sin }\varphi.\text{Cos }\varphi' + \text{Sin }\varphi'.\text{Cos }\varphi.$$

XX.

Ueber gewisse merkwürdige Reihen.

Von dem

Herrn Professor Dr. Hessel

in Marburg.

---

§. 1.

Es giebt eine Art von Reihen, welche die merkwürdige Eigenschaft haben, die folgende Zusammenstellung veranschaulicht:

I)	Berücksichtigte Reihe	.... A, B, C, D, E, F ....
II)	Reihe der ersten Differenzen *)	.... a, b, c, d, e ....
III)	Reihe der zweiten Differenzen **)	.... B, C, D, E ....
IV)	Reihe der dritten Differenzen	.... b, c, d ....
	u. s. w.	u. s. w.

d. h. es stimmen die Reihen I, III, V, VII .... $(2P-1)$ .... hinsichtlich ihrer sämmtlichen Glieder A, B, C, D, E.... mit einander überein, während eine ebensolche Uebereinstimmung stattfindet bei den Reihen II, IV, VI .... $(2P)$ .... hinsichtlich der sämmtlichen Glieder a, b, c, d....; indem, wenn man allgemein die Differenz zwischen dem zweiten und ersten Gliede der Qten Reihe als erstes Glied der $(Q+1)$ten Reihe ansieht, das $n$te Glied der Qten Reihe dem $(n+1)$ten Gliede der $(Q-2)$ten Reihe gleich ist, so, dass in obiger Darstellung einerseits die gleichen Glieder der Reihen I, III, V .... $(2P-1)$ und andererseits ebenso die gleichen Glieder der Reihen II, IV, VI .... $(2P)$ lothrecht unter einander stehen.

§. 2.

Bezeichnet man das $n$te Glied der Isten Reihe mit $\left(\begin{smallmatrix} I \\ \alpha \\ n \end{smallmatrix}\right)$ und ebenso das $n$te Glied der IIten Reihe mit $\left(\begin{smallmatrix} II \\ \alpha \\ n \end{smallmatrix}\right)$, und das $n$te Glied der Qten Reihe mit $\left(\begin{smallmatrix} Q \\ \alpha \\ n \end{smallmatrix}\right)$, und die Summe der Glieder der Isten Reihe

---

*) $B-A=a$, $C-B=b$, $D-C=c$ u. s. w.

**) $b-a=B$, $c-b=C$, $d-c=D$ u. s. w.

vom 1sten bis zum $n$ten Gliede einschliesslich mit $\begin{pmatrix} I \\ \Sigma \\ n \end{pmatrix}$, und e
die Summe der Glieder der IIten Reihe vom 1sten bis zum
einschliesslich mit $\begin{pmatrix} II \\ \Sigma \\ n \end{pmatrix}$, so ist:

$$1)\quad \begin{pmatrix} I \\ \alpha \\ n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} I \\ \alpha \\ n-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} II \\ \alpha \\ n-1 \end{pmatrix}$$

$$2)\quad \begin{pmatrix} II \\ \alpha \\ n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} II \\ \alpha \\ n-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I \\ \alpha \\ n \end{pmatrix}$$

$$3)\quad \begin{pmatrix} I \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} II \\ \Sigma \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I \\ \alpha \\ n+1 \end{pmatrix}$$

$$4)\quad \overset{I}{\underset{n}{\Sigma}} + \left(\overset{II}{\underset{1}{\alpha}} - \overset{I}{\underset{1}{\alpha}}\right) = \overset{II}{\underset{n}{\alpha}}.$$

Sucht man aus 2) die Grösse $\begin{pmatrix} II \\ \alpha \\ n-1 \end{pmatrix}$ und setzt ihren Werth
so hat man

$$\overset{I}{\underset{n}{\alpha}} - \overset{I}{\underset{n-1}{\alpha}} = \overset{II}{\underset{n}{\alpha}} - \overset{I}{\underset{n}{\alpha}},$$

also

$$5)\quad \begin{pmatrix} II \\ \alpha \\ n \end{pmatrix} = 2\overset{I}{\underset{n}{\alpha}} - \overset{I}{\underset{n-1}{\alpha}}$$

und da aus 1), wenn man statt n setzt $n+1$, gefunden wird

$$\overset{II}{\underset{n}{\alpha}} = \overset{I}{\underset{n+1}{\alpha}} - \overset{I}{\underset{n}{\alpha}},$$

so ist, wenn dieser Werth in 5) gesetzt wird:

$$2\overset{I}{\underset{n}{\alpha}} - \overset{I}{\underset{n-1}{\alpha}} = \overset{I}{\underset{n+1}{\alpha}} - \overset{I}{\underset{n}{\alpha}},$$

so dass

$$3\overset{I}{\underset{n}{\alpha}} = \overset{I}{\underset{n+1}{\alpha}} + \overset{I}{\underset{n-1}{\alpha}}$$

oder

$$6)\quad \overset{I}{\underset{n}{\alpha}} = \tfrac{1}{3}\left(\overset{I}{\underset{n-1}{\alpha}} + \overset{I}{\underset{n+1}{\alpha}}\right)$$

oder

$$\overset{I}{\underset{n-1}{\alpha}} = 3\overset{I}{\underset{n}{\alpha}} - \overset{I}{\underset{n+1}{\alpha}} \quad \text{und} \quad \overset{I}{\underset{n+1}{\alpha}} = 3\overset{I}{\underset{n}{\alpha}} - \overset{I}{\underset{n-1}{\alpha}},$$

$$7)\ \overset{I}{a}_{n} = 3\overset{I}{a}_{n+1} - \overset{I}{a}_{n+2} \quad \text{und } 8)\ \overset{I}{a}_{n} = 3\overset{I}{a}_{n-1} - \overset{I}{a}_{n-2}.$$

ucht man ebenso aus 1) die Grösse $\left(\overset{I}{a}_{n}\right)$ und setzt den Werth so hat man:

$$\overset{II}{a}_{n} - \overset{II}{a}_{n-1} = \overset{II}{a}_{n-1} + \overset{I}{a}_{n-1}$$

$$9)\ \overset{I}{a}_{n-1} = \overset{II}{a}_{n} - 2\overset{II}{a}_{n-1},$$

a aus 2), wenn man statt n setzt $n - 1$, gefunden wird:

$$\overset{I}{a}_{n-1} = \overset{II}{a}_{n-1} - \overset{II}{a}_{n-2},$$

, wenn dieser Werth in 9) gesetzt wird:

$$\overset{II}{a}_{n-1} - \overset{II}{a}_{n-2} = \overset{II}{a}_{n} - 2\overset{II}{a}_{n-1},$$

$$10)\ \overset{II}{a}_{n} = 3\overset{II}{a}_{n-1} - \overset{II}{a}_{n-2}$$

$$\overset{II}{a}_{n-2} = 3\overset{II}{a}_{n-1} - \overset{II}{a}_{n} \quad \text{oder } 11)\ \overset{II}{a}_{n} = 3\overset{II}{a}_{n+1} - \overset{II}{a}_{n+2}$$

$$\overset{II}{a}_{n-1} = \tfrac{1}{3}\left(\overset{II}{a}_{n} + \overset{II}{a}_{n-2}\right) \quad \text{oder } 12)\ \overset{II}{a}_{n} = \tfrac{1}{3}\left(\overset{II}{a}_{n+1} + \overset{II}{a}_{n-1}\right).$$

Es ist sonach, gemäss 6) und 12), sowohl für I. als II. jedes einer derartigen Reihe der dritte Theil der Summe aus dem tvorhergehenden und dem nächstfolgenden Gliede:

$$a_{n} = \tfrac{1}{3}\left(a_{n-1} + a_{n+1}\right),$$

man findet, gemäss 7) und 8) oder 10) und 11), für jede solche e, jedes beliebige Glied aus den beiden ihm vorhergehenden aus den beiden ihm folgenden Gliedern dadurch, dass man dem 3fachen des näheren dieser beiden Glieder das ferner lie- e subtrahirt, d. h. man mag in einer solchen Reihe die Glie- rwärts oder rückwärts zählen, so ist

$$\left.\begin{array}{r}\text{in I.}\\ \text{und in II.}\end{array}\right\} a_{n} = 3a_{n-1} - a_{n-2} = 3a_{n+1} - a_{n+2}.$$

§. 3.

Wenn also in irgend einer der Reihen I. oder II. zwei
telbar nach einander folgende Glieder gegeben sind, so find
das nächste höhere Glied dadurch, dass man von dem Drei
des grösseren gegebenen Gliedes das kleinere gegebene Gli
zieht, während man das nächste niedrigere Glied findet, wen
von dem Dreifachen des kleineren gegebenen Gliedes das g
gegebene Glied subtrahirt.

Man kann also sehr leicht die Glieder jeder solchen Rei
Ordnung nach bilden, sowohl wenn man vorwärts, als wer
rückwärts in der Reihe fortschreiten will.

§. 4.

Noch bequemer aber ist es, die Glieder der zusammengeh
Reihen I. und II. abwechselnd zu entwickeln, indem man di
chungen 1) und 2) abwechselnd benutzt. Sind also z. B. $\overset{I}{\alpha}_{1}$
gegeben, so ist:

aus 1) $\overset{II}{\alpha}_{1} = \overset{I}{\alpha}_{2} - \overset{I}{\alpha}_{1}$ aus 2) $\overset{II}{\alpha}_{2} = \overset{II}{\alpha}_{1} + \overset{I}{\alpha}_{2}$	daraus hat man
	aus 1) $\overset{I}{\alpha}_{3} = \overset{I}{\alpha}_{2} + \overset{II}{\alpha}_{2}$
aus 2) $\overset{II}{\alpha}_{3} = \overset{II}{\alpha}_{2} + \overset{I}{\alpha}_{3}$	
	aus 1) $\overset{I}{\alpha}_{4} = \overset{I}{\alpha}_{3} + \overset{II}{\alpha}_{3}$
aus 2) $\overset{II}{\alpha}_{4} = \overset{II}{\alpha}_{3} + \overset{I}{\alpha}_{4}$	
u. s. w.	u. s. w.

benso hat man allgemein

$\overset{II}{\underset{n-1}{\alpha}} = \overset{II}{\underset{n-2}{\alpha}} + \overset{I}{\underset{n-1}{\alpha}}$	
	$\overset{I}{\underset{n}{\alpha}} = \overset{I}{\underset{n-1}{\alpha}} + \overset{II}{\underset{n-1}{\alpha}}$
$\overset{II}{\underset{n}{\alpha}} = \overset{II}{\underset{n-1}{\alpha}} + \overset{I}{\underset{n}{\alpha}}$	
	$\overset{I}{\underset{n+1}{\alpha}} = \overset{I}{\underset{n}{\alpha}} + \overset{II}{\underset{n}{\alpha}}$
$\overset{II}{\underset{n+1}{\alpha}} = \overset{II}{\underset{n}{\alpha}} + \overset{I}{\underset{n+1}{\alpha}}$	
u. s. w.	u. s. w.

§. 5.

Als Beispiel möge folgende Zusammenstellung von Reihen I., ., III. dienen, wobei in I. und II. jedem Gliede unten die ihm geihrende Ordnungszahl n beigefügt ist, die der getroffenen Wahl es ersten Gliedes in I. entspricht.

I.	22	9	5 \	6	13	33	86	225	589	....
	−2	−1	0 \	1	2	3	4	5	6	
II.	−13	−4	1 \	7	20	53	139	364	953	....
	−2	−1	0 \	1	2	3	4	5	6	
III.	22	9	5	6 \	13	33	86	225	589	....

Hier ist

ach Gleichung

1\. . . . . $589 - 225 = 364$

2\. . . . . $953 - 364 = 589$

3\. . . . . $6 + [7 + 20 + 53 + 139 + 364] = 589$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{wenn } 22 = \left(\overset{I}{\underset{1}{\alpha}}\right) \text{ gesetzt wird, hat man ebenso} \\ 22 + [-13 - 4 + 1 + 7 + 20] = 33 \end{array} \right\}$$

4\. . . . . $[6 + 13 + 33 + 86 + 225] - 6 + 7 = 364$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{wenn } 9 = \left(\overset{I}{\underset{1}{\alpha}}\right) \text{ gesetzt wird, hat man ebenso} \\ [9 + 5 + 6 + 13 + 33 + 86] - 9 + (-4) = 139 \end{array} \right\}$$

§. 6.

Was die allgemeine Form solcher Reihen wie I. und II. anlangt, so hat man, wenn der Kürze wegen $\begin{pmatrix} I \\ a \\ 1 \end{pmatrix} = A$ und $\begin{pmatrix} II \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$ $= a$ gesetzt und jedem Gliede die Ordnungszahl (n) unten beigefügt wird, folgende Zusammenstellung:

$$\text{I.}\quad \underset{1}{A}\quad \underset{2}{(A+a)}\quad \underset{3}{(2A+3a)}\quad \underset{4}{(5A+8a)}\quad \underset{5}{(13A+21a)}\ldots.$$

$$\text{II.}\quad \underset{1}{a}\quad \underset{2}{(A+2a)}\quad \underset{3}{(3A+5a)}\quad \underset{4}{(8A+13a)}\ldots.$$

Bei der Verlängerung nach rückwärts erhält man ebenso:

$$\ldots.\underset{-3}{(34A-21a)}\quad \underset{-2}{(13A-8a)}\quad \underset{-1}{(5A-3a)}\quad \underset{0}{(2A-a)} \diagdown \underset{1}{A}\ldots.\ \text{I.}$$

$$\ldots.\underset{-3}{(13a-21A)}\quad \underset{-2}{(5a-8A)}\quad \underset{-1}{(2a-3A)}\quad \underset{0}{(a-A)} \diagdown \underset{1}{a}\ldots.\ \text{II.}$$

§. 7.

Setzt man in dieser allgemeinen Form $\begin{pmatrix} I \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$ oder $A = 1$ und $\begin{pmatrix} II \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$ oder $a = 0$, so hat man

Reihe I.	…. 5	2	1	1	2	5	13	34	89 ….
Ordnungszahl	—1	0	1	2	3	4	5	6	7

Reihe II.	…. —3	—1	0	1	3	8	21	55 ….
Ordnungszahl	—1	0	1	2	3	4	5	6

und es bietet die Reihe I. die Coefficienten für A in §. 6. I. und die Reihe II. jene für a in §. 6. I. dar.

§. 8.

Umgekehrt, wenn man in §. 6. $A = 0$ und $a = 1$ setzt, so hat man:

$$\text{I.}\ \Big|\ \ldots.\ \underset{-2}{-8}\quad \underset{-1}{-3}\quad \underset{0}{-1} \diagdown \underset{1}{0}\quad \underset{2}{1}\quad \underset{3}{3}\quad \underset{4}{8}\quad \underset{5}{21}\quad \underset{6}{55}\ldots.$$

$$\text{II.}\ \Big|\ \ldots.\ \underset{-2}{5}\quad \underset{-1}{2}\quad \underset{0}{1} \diagdown \underset{1}{1}\quad \underset{2}{2}\quad \underset{3}{5}\quad \underset{4}{13}\quad \underset{5}{34}\ldots.$$

und es bietet die Reihe I. die Coefficienten dar für A in §. 6. II., und die Reihe II. ist jene der Coefficienten für a in §. 6. II.

§. 9.

Setzt man $A = 1$ und $a = 3$, so hat man nach §. 6. folgende wichtige Reihen, von welchen wir später Gebrauch machen werden.

I.	....	—11	—4	—1	1	4	11	29	76	199	521 ....
		—2	—1	0	1	2	3	4	5	6	7
II.	....	7	3	2	3	7	18	47	123	322	
		—2	—1	0	1	2	3	4	5	6	

§. 10.

Obgleich in §. 2., §. 3. und §. 4. die Bildung der Glieder einer solchen Reihe der Ordnung nach gezeigt wurde, so ist es doch nöthig, einen Ausdruck für das allgemeine ($n$te) Glied einer solchen Reihe zu haben. Dieser ist gefunden, sobald man für die in §. 7. (und §. 8.) dargestellten Reihen der Coefficienten für I. und II. in §. 6. die Ausdrücke für das $n$te Glied gefunden hat. Die Reihen §. 7. (und §. 8.) stimmen aber überein mit Reihen, die man in folgender Art findet.

§. 11.

Es ist bekannt, dass die für die Lehre vom regelmässigen Fünfeck und für die davon abhängenden Körperformen wichtige Grösse $\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{2}{\sqrt{5}+1}$ folgende Reihe von Potenzen darbietet:

Ordnungszahl	1	2	3	4
Potenz	$\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$,	$\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})$,	$\frac{1}{2}(2\sqrt{5}-4)$,	$\frac{1}{2}(7-3\sqrt{5})$,
Ordnungszahl	5	6	7	8
Potenz	$\frac{1}{2}(5\sqrt{5}-11)$,	$\frac{1}{2}(18-8\sqrt{5})$,	$\frac{1}{2}(13\sqrt{5}-29)$,	$\frac{1}{2}(47-21\sqrt{5})$,
Ordnungszahl	9	10		
Potenz	$\frac{1}{2}(34\sqrt{5}-56)$,	$\frac{1}{2}(123-55\sqrt{5})$;		

und dass, wenn man diese Reihe von Potenzen nach rückwärts, über die erste hinaus, fortsetzt, man folgende Glieder erhält:

Ordnungszahl	0	—1	—2	—3
Potenz	$\frac{1}{2}(2\pm0\sqrt{5})$,	$\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$,	$\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})$,	$\frac{1}{2}(2\sqrt{5}+4)$,
Ordnungszahl	—4			
Potenz	$\frac{1}{2}(7+3\sqrt{5})$;			

so dass alle Potenzen von $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$, welche ungerade Exponenten haben, die Form $\frac{1}{2}(x\sqrt{5}-y)$, und alle, welche gerade Exponenten haben, die Form $\frac{1}{2}(u-v\sqrt{5})$ darbieten.

Betrachten wir die Reihen der Werthe von x und v, welche die Coefficienten von $\sqrt{5}$ in vorstehender Entwickelung sind, so finden wir:

Werthe von x	....	34	13	5	2	1	1	2	5	13	34	89	....
Exponent der Potenz	....	−11	−7	−5	−3	−1	1	3	5	7	9	11	....

Werthe von v	....	−21	−8	−3	−1	0	1	3	8	21	55	....
Exponent der Potenz	....	−8	−6	−4	−2	0	2	4	6	8	10	

Ebenso findet man für y und für u folgende Reihen:

Werthe von y	....	−29	−11	−4	−1	1	4	11	29	56	199	....
Exponent der Potenz	....	−7	−5	−3	−1	1	3	5	7	9	11	....

Werthe von u	....	18	7	3	2	3	7	18	47	123	....
Exponent der Potenz	....	−6	−4	−2	0	2	4	6	8	10	....

§. 12.

Setzen wir $\sqrt{5}=q$, so haben wir, wenn n irgend eine gan[ze] Zahl bedeutet und p irgend eine andere ganze Zahl ist, die zw[i]schen 1 und n liegt:

$$
\begin{aligned}
(q-1)^{2n-1} = \Big\{ & q^{2n-2} \\
&+\frac{(2n-1)(2n-2)}{1.2}q^{2n-4} \\
&+\frac{(2n-1)\ldots(2n-4)}{1\ldots4}q^{2n-6} \\
&\quad\vdots \\
&+\frac{(2n-1)\ldots(2n-2p)}{1\ldots2p}q^{2n-(2p+2)} \\
&\quad\vdots \\
&+\frac{(2n-1)\ldots(2n-(2n-2))}{1\ldots(2n-2)}q^{2n-2n}\Big\}.\,q
\end{aligned}
\quad
\begin{aligned}
&-(2n-1)q^{2n\ldots} \\
&-\frac{(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{1.2.3}.\,q^{2n\ldots} \\
&-\frac{(2n-1)\ldots(2n-5)}{1\ldots5}.\,q^{2n-6} \\
&\quad\vdots \\
&-\frac{(2n-1)\ldots(2n-(2p+1))}{1\ldots(2p+1)}.\,q^{2n-(2p\ldots} \\
&\quad\vdots \\
&-\frac{(2n-1)\ldots(2n-(2n-1))}{1\ldots(2n-1)}.\,q^{2n-\ldots}
\end{aligned}
$$

wird also, wenn man berücksichtigt, dass

$$q^{2(n-(p+1))} = 5^{n-(p+1)},$$

wenn man die Werthe von x, welche zur 1, 3, 5 .... $(2n-1)$ten ...nz gehören, mit x_1, x_2, x_3 .... x_n bezeichnet, der allge...e Werth für x gefunden, als:

$$x_n = [5^{n-1} + \frac{(2n-1)(2n-2)}{1.2} 5^{n-2} + \frac{(2n-1)....(2n-4)}{1....4} 5^{n-3} ....$$

$$+ \frac{(2n-1)(2n-2)....(2n-2p)}{1.2....2p} . 5^{n-(p+1)}$$

$$+ \frac{(2n-1)(2n-2)....(2n-(2n-2))}{1.2....(2n-2)} . 5^{n-n}] : 2^{2n-2}.$$

...dass, wenn man den Coefficienten $\left[\frac{n(n-1)(n-2)....(n-(m-1))}{1.2.3....m}\right]$ ...nten Potenz eines Binomiums durch den Ausdruck $\left(\overset{n}{\underset{m}{C}}\right)$ be...hnet, die Gleichung gilt:

$$x_n = [5^{n-1} + \overset{2n-1}{\underset{2}{C}} . 5^{n-2}$$

$$+ \overset{2n-1}{\underset{4}{C}} . 5^{n-3} .. + \overset{2n-1}{\underset{2p}{C}} . 5^{n-(p+1)} .. + \overset{2n-1}{\underset{2(n-1)}{C}} . 5^{n-n}] : 2^{2n-2}.$$

...gleich ergiebt sich:

$$y_n = [\overset{2n-1}{\underset{1}{C}} . 5^{n-1} + \overset{2n-1}{\underset{3}{C}} . 5^{n-2} + \overset{2n-1}{\underset{5}{C}} . 5^{n-3} ....$$

$$+ \overset{2n-1}{\underset{2p+1}{C}} . 5^{n-(p+1)} .... + \overset{2n-1}{\underset{2n-1}{C}} . 5^{n-n}] : 2^{2n-2}.$$

§. 13.

Andererseits ist

$$...-1)^{2n} = q^{2n} - 2n . q^{2n-2} . q$$

$$\frac{2n(2n-1)}{1.2} q^{2n-2} - \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{1.2.3} q^{2n-4} . q$$

$$\frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{1.2.3.4} . q^{2n-4} - \frac{2n(2n-1)....(2n-4)}{1.2....5} q^{2n-6} . q$$

. .
. .
. .

$$+\frac{2n(2n-1)\ldots(2n-(2p-1))}{1.2\ldots.2p}q^{2n-2p}-\frac{2n(2n-1)\ldots(2n-2p)}{1.2\ldots.(2p+1)}.q^{2n-(2p+2)}.$$

$$\vdots$$

$$+\frac{2n(2n-1)\ldots(2n-(2n-3))}{1.2\ldots.(2n-2)}q^{2n-(2n-2)}-\frac{2n(2n-1)\ldots(2n-(2n-2))}{1.2\ldots.(2n-1)}q^{2n-2}$$

$$+\frac{2n(2n-1)\ldots.(2n-(2n-1))}{1.2\ldots.2n}q^{2n-2n}.$$

Bezeichnet also v_n den Werth von v, welcher zur $2n$ten Pot
von $\sqrt{5}-1$ gehört, so ist

$$16)\quad v_n=[\overset{2n}{\underset{1}{C}}.5^{n-1}+\overset{2n}{\underset{3}{C}}.5^{n-2}+\overset{2n}{\underset{5}{C}}.5^{n-3}\ldots.$$

$$+\overset{2n}{\underset{2p+1}{C}}.5^{n-(p+1)}\ldots+\overset{2n}{\underset{2n-1}{C}}.5^{n-n}]:2^{2n}$$

Während, wenn u_n den Werth von u bezeichnet, der zur $2n$
Potenz gehört, dieser Werth gefunden wird als

$$17)\quad u_n=[5^n+\overset{2n}{\underset{2}{C}}.5^{n-1}+\overset{2n}{\underset{4}{C}}.5^{n-2}+\overset{2n}{\underset{6}{C}}.5^{n-3}\ldots.$$

$$+\overset{2n}{\underset{2p}{C}}.5^{n-p}\ldots+\overset{2n}{\underset{2n}{C}}.5^{n-n}]:2^{2n}$$

§. 14.

Sollen nun wirklich die Reihen der Werthe von x und vo
(in §. 11.) den Reihen der Coefficienten von A und von a in §
entsprechen und nicht etwa bloss zufällig innerhalb gewisser Gr
zen damit übereinstimmen, so muss allgemein nach 1) x_{n+1} —
$=v_n$ und nach 2) $v_{n+1}-v_n=x_n$ sein. (Vergleiche oben in §
die Gleichungen 1. und 2.).

Es ist aber, wenn

$$\left(\frac{q-1}{2}\right)^{2n-1}=\tfrac{1}{2}(x_nq-y_n)$$

ist, auch

$$\left(\frac{q-1}{2}\right)^{2n+1}=\tfrac{1}{2}(x_nq-y_n)\left(\frac{q^2-2q+1}{4}\right)$$

$$=\tfrac{1}{2}[(\tfrac{1}{4}x_nq^2+\tfrac{1}{2}y_n+\tfrac{1}{4}x_n)q-(\tfrac{1}{4}q^2y_n+\tfrac{1}{2}q^2x_n+\tfrac{1}{4}$$

so dass

$$x_{n+1}=\tfrac{1}{4}x_nq^2+\tfrac{1}{4}x_n+\tfrac{1}{2}y_n=\tfrac{5}{4}x_n+\tfrac{1}{4}x_n+\tfrac{1}{2}y_n$$

$$=\tfrac{3}{2}x_n+\tfrac{1}{2}y_n,$$

lb

$$x_{n+1}-x_n=(\tfrac{1}{2}x_n+\tfrac{1}{2}y_n)-x_n=\tfrac{1}{2}(x_n+y_n),$$

$$\left(\frac{1}{2^{2n-2}}\right)\left\{\begin{array}{l} 5^{n-1}+\overset{2n-1}{\underset{2}{C}}\,.\,5^{n-2}+\overset{2n-1}{\underset{4}{C}}\,.\,5^{n-3}\,\ldots\ldots \\ \qquad\qquad +\overset{2n-1}{\underset{2p}{C}}\,.\,5^{n-(p+1)}\ldots\ldots+\overset{2n-1}{\underset{2n-2}{C}}\,.\,5^{n-n} \\ +\overset{2n-1}{\underset{1}{C}}\,.\,5^{n-1}+\overset{2n-1}{\underset{3}{C}}\,.\,5^{n-2}+\overset{2n-1}{\underset{5}{C}}\,.\,5^{n-3}\ldots\ldots \\ \qquad\qquad +\overset{2n-1}{\underset{2p+1}{C}}\,.\,5^{n-(p+1)}\ldots\ldots+\overset{2n-1}{\underset{2n-1}{C}}\,.\,5^{n-n} \end{array}\right\},$$

ass aus der allgemein bekannten Eigenschaft der Binomial-
icienten, gemäss welcher $\overset{2n-1}{\underset{2p}{C}}+\overset{2n-1}{\underset{2p+1}{C}}=\overset{2n}{\underset{2p+1}{C}}$ ist, folgt:

$$-x_n=\frac{1}{2^{2n-1}}\left\{\overset{2n}{\underset{1}{C}}\,.\,5^{n-1}+\overset{2n}{\underset{3}{C}}\,.\,5^{n-2}+\overset{2n}{\underset{5}{C}}\,.\,5^{n-3}\ldots\ldots\right.$$

$$\left.+\overset{2n}{\underset{2p+1}{C}}\,.\,5^{n-(p+1)}+\overset{2n}{\underset{2n-1}{C}}\,.\,5^{n-n}\right\},$$

es ist hiernach bewiesen, dass allgemein

$$x_{n+1}-x_n=v_n$$

Ebenso lässt sich der Beweis führen, dass allgemein gültig

$$v_{n+1}-v_n=x_n$$

§. 15.

Da nun, wenn wir für die Coefficienten von A und a die Zäh-
weise der Glieder von §. 6. und §. 7. beibehalten,

$$18)\quad x_n=\overset{I}{\underset{n+1}{a}}\ \text{(in §. 7.) also}\ \overset{I}{\underset{n}{a}}=x_{n-1}$$

$$19)\quad v_n=\overset{II}{\underset{n+1}{a}}\ \text{(in §. 7.) also}\ \overset{II}{\underset{n}{a}}=v_{n-1},$$

ist das $n$te Glied in der Reihe §. 6. I., welches $\overset{I}{N}$ heissen
e:

$$20)\quad \overset{I}{N}=x_{n-1}\,.\,A+v_{n-1}\,.\,a,$$

während ebenso das $n$te Glied in der Reihe §. 6. II., welches $\overset{II}{N}$ bezeichnet werden möge:

$$21)\quad \overset{II}{N} = v_{n-1} . A + x_n . a,$$

ist; mithin

$$22)\quad \overset{I}{N} = A[5^{n-2} + \overset{2n-3}{\underset{2}{C}} . 5^{n-3} + \overset{2n-3}{\underset{4}{C}} . 5^{n-4} \ldots$$
$$+ \overset{2n-3}{\underset{2p}{C}} . 5^{n-(p+2)} \ldots + \overset{2n-3}{\underset{2n-4}{C}} . 5^{n-n}] :$$
$$+ a[\overset{2(n-1)}{\underset{1}{C}} . 5^{n-2} + \overset{2(n-1)}{\underset{3}{C}} . 5^{n-3} + \overset{2(n-1)}{\underset{5}{C}} . 5^{n-4} \ldots$$
$$+ \overset{2(n-1)}{\underset{2p+1}{C}} . 5^{n-(p+2)} \ldots + \overset{2(n-1)}{\underset{2n-3}{C}} . 5^{n-n}] :$$

$$23)\quad \overset{II}{N} = A[\overset{2(n-1)}{\underset{1}{C}} . 5^{n-2} + \overset{2(n-1)}{\underset{3}{C}} . 5^{n-3} + \overset{2(n-1)}{\underset{5}{C}} . 5^{n-4} \ldots$$
$$+ \overset{2(n-1)}{\underset{2p+1}{C}} . 5^{n-(p+2)} \ldots + \overset{2(n-1)}{\underset{2n-3}{C}} . 5^{n-n}] :$$
$$+ a[5^{n-1} + \overset{2n-1}{\underset{2}{C}} . 5^{n-2} + \overset{2n-1}{\underset{4}{C}} . 5^{n-3} \ldots$$
$$+ \overset{2n-1}{\underset{2p}{C}} . 5^{n-(p+1)} \ldots + \overset{2n-1}{\underset{2n-1}{C}} . 5^{n-n}] :$$

Es sind sonach die allgemeinen Glieder in der gemeinscha chen Form (§. 6.) der fraglichen Reihen I. und II. gefunden.

§. 16.

Aus den Gleichungen 4) und 3) folgt:

$$24)\quad \overset{I}{\underset{n}{\Sigma}} = \overset{II}{\underset{n}{\alpha}} - \left(\overset{II}{\underset{1}{\alpha}} - \overset{I}{\underset{1}{\alpha}}\right)$$

$$25)\quad \overset{II}{\underset{n}{\Sigma}} = \overset{I}{\underset{n+1}{\alpha}} - \overset{I}{\underset{1}{\alpha}},$$

so dass, wenn $\overset{II}{\underset{1}{\alpha}} = \overset{I}{\underset{1}{\alpha}}$ ist, sich ergiebt:

$$24,1)\quad \overset{I}{\underset{n}{\Sigma}} = \overset{II}{\underset{n}{\alpha}} \quad \text{und} \quad 25,1)\quad \overset{II}{\underset{n}{\Sigma}} = \overset{I}{\underset{n+1}{\alpha}} - \overset{I}{\underset{1}{\alpha}},$$

oder wenn der Werth $\overset{I}{\underset{1}{\alpha}} = 0$ ist:

$$24{,}2)\quad \Sigma_n^{I} = \alpha_n^{II} - \alpha_1^{II} \quad \text{und} \quad 25{,}2)\quad \Sigma_n^{II} = \alpha_{n+1}^{I}$$

o ist z. B. für die Reihen

I) 1 2 5 13 34
II) 1 3 8 21

ach

$$24{,}1)\quad 1 + 2 + 5 + 13 = 21$$

ach

$$25{,}1)\quad 1 + 3 + 8 + 21 = 34 - 1 = 33$$

nd bei den Reihen

I) 0 1 3 8 21 55 144
II) 1 2 5 13 34 89

t nach

$$24{,}2)\quad 0 + 1 + 3 + 8 + 21 + 55 = 89 - 1$$

nd nach

$$25{,}2)\quad 1 + 2 + 5 + 13 + 34 + 89 = 144.$$

§. 17.

Nach der Gleichung 3) ist:

$$\alpha_n^{I} = \alpha_1^{I} + \Sigma_{n-1}^{II}$$
$$\alpha_{n-1}^{I} = \alpha_1^{I} + \Sigma_{n-2}^{II}$$
$$\alpha_{n-2}^{I} = \alpha_1^{I} + \Sigma_{n-3}^{II}$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\alpha_{n-(n-2)}^{I} = \alpha_1^{I} + \Sigma_{n-(n-1)}^{II}$$
$$\alpha_{n-(n-1)}^{I} = \alpha_1^{I}$$

raus folgt durch Addition, da $\alpha_n^{I} + \alpha_{n-1}^{I} + \alpha_{n-2}^{I} \ldots \ldots \alpha_{n-(n-1)}^{I} = \Sigma_n^{I}$ ist, für der folgende Werth:

$$26)\quad \Sigma_n^{I} = n \cdot \alpha_1^{I} + \left[\Sigma_1^{II} + \Sigma_2^{II} + \Sigma_3^{II} \ldots\ldots + \Sigma_{n-1}^{II}\right]$$

während ebenso das $n$te Glied in der Reihe §. 6. II., welches d
$\overset{II}{N}$ bezeichnet werden möge:

$$21)\quad \overset{II}{N} = v_{n-1} \,.\, A + x_n \,.\, a,$$

ist; mithin

$$22)\quad \overset{I}{N} = A[5^{n-2} + \overset{2n-3}{\underset{2}{C}} \,.\, 5^{n-3} + \overset{2n-3}{\underset{4}{C}} \,.\, 5^{n-4} \ldots.$$
$$\ldots. + \overset{2n-3}{\underset{2p}{C}} \,.\, 5^{n-(p+2)} \ldots. + \overset{2n-3}{\underset{2n-4}{C}} \,.\, 5^{n-n}] : 2^2$$
$$+ a[\overset{2(n-1)}{\underset{1}{C}} \,.\, 5^{n-2} + \overset{2(n-1)}{\underset{3}{C}} \,.\, 5^{n-3} + \overset{2(n-1)}{\underset{5}{C}} \,.\, 5^{n-4} \ldots.$$
$$+ \overset{2(n-1)}{\underset{2p+1}{C}} \,.\, 5^{n-(p+2)} \ldots. + \overset{2(n-1)}{\underset{2n-3}{C}} \,.\, 5^{n-n}] : 2^2$$

$$23)\quad \overset{II}{N} = A[\overset{2(n-1)}{\underset{1}{C}} \,.\, 5^{n-2} + \overset{2(n-1)}{\underset{3}{C}} \,.\, 5^{n-3} + \overset{2(n-1)}{\underset{5}{C}} \,.\, 5^{n-4} \ldots.$$
$$+ \overset{2(n-1)}{\underset{2p+1}{C}} \,.\, 5^{n-(p+2)} \ldots. + \overset{2(n-1)}{\underset{2n-3}{C}} \,.\, 5^{n-n}] : 2^2$$
$$+ a[5^{n-1} + \overset{2n-1}{\underset{2}{C}} \,.\, 5^{n-2} + \overset{2n-1}{\underset{4}{C}} \,.\, 5^{n-3} \ldots.$$
$$+ \overset{2n-1}{\underset{2p}{C}} \,.\, 5^{n-(p+1)} \ldots. + \overset{2n-1}{\underset{2n-1}{C}} \,.\, 5^{n-n}] : 2^2$$

Es sind sonach die allgemeinen Glieder in der gemeinschaf
chen Form (§. 6.) der fraglichen Reihen I. und II. gefunden.

§. 16.

Aus den Gleichungen 4) und 3) folgt:

$$24)\quad \overset{I}{\underset{n}{\Sigma}} = \overset{II}{\underset{n}{\alpha}} - \left(\overset{II}{\underset{1}{\alpha}} - \overset{I}{\underset{1}{\alpha}}\right)$$

$$25)\quad \overset{II}{\underset{n}{\Sigma}} = \overset{I}{\underset{n+1}{\alpha}} - \overset{I}{\underset{1}{\alpha}},$$

so dass, wenn $\overset{II}{\underset{1}{\alpha}} = \overset{I}{\underset{1}{\alpha}}$ ist, sich ergiebt:

$$24{,}1)\quad \overset{I}{\underset{n}{\Sigma}} = \overset{II}{\underset{n}{\alpha}} \quad \text{und} \quad 25{,}1)\quad \overset{II}{\underset{n}{\Sigma}} = \overset{I}{\underset{n+1}{\alpha}} - \overset{I}{\underset{1}{\alpha}},$$

n der Werth $\overset{I}{\underset{1}{\alpha}} = 0$ ist:

$$24,2)\quad \Sigma^{I}_{n} = \alpha^{II}_{n} - \alpha^{II}_{1} \quad \text{und} \quad 25,2)\quad \Sigma^{II}_{n} = \alpha^{I}_{n+1}$$

ist z. B. für die Reihen

I) 1 2 5 13 34

II) 1 3 8 21

ch

$$24,1)\quad 1 + 2 + 5 + 13 = 21$$

ch

$$25,1)\quad 1 + 3 + 8 + 21 = 34 - 1 = 33$$

d bei den Reihen

I) 0 1 3 8 21 55 144

II) 1 2 5 13 34 89

nach

$$24,2)\quad 0 + 1 + 3 + 8 + 21 + 55 = 89 - 1$$

l nach

$$25,2)\quad 1 + 2 + 5 + 13 + 34 + 89 = 144.$$

§. 17.

Nach der Gleichung 3) ist:

$$\begin{aligned}
\alpha^{I}_{n} &= \alpha^{I}_{1} + \Sigma^{II}_{n-1} \\
\alpha^{I}_{n-1} &= \alpha^{I}_{1} + \Sigma^{II}_{n-2} \\
\alpha^{I}_{n-2} &= \alpha^{I}_{1} + \Sigma^{II}_{n-3} \\
&\vdots \\
\alpha^{I}_{n-(n-2)} &= \alpha^{I}_{1} + \Sigma^{II}_{n-(n-1)} \\
\alpha^{I}_{n-(n-1)} &= \alpha^{I}_{1}
\end{aligned}$$

eraus folgt durch Addition, da $\alpha^{I}_{n} + \alpha^{I}_{n-1} + \alpha^{I}_{n-2} \ldots \ldots \alpha^{I}_{n-(n-1)} = \Sigma^{I}_{n}$ ist, für der folgende Werth:

$$26)\quad \Sigma^{I}_{n} = n \cdot \alpha^{I}_{1} + \left[\Sigma^{II}_{1} + \Sigma^{II}_{2} + \Sigma^{II}_{3} \ldots \ldots + \Sigma^{II}_{n-1}\right]$$

und auf ähnliche Weise erhält man durch Anwendung der Gl
chung 4) den Werth

$$27)\quad \overset{II}{\Sigma}_n = n\left(\overset{II}{\alpha}_1 - \overset{I}{\alpha}_1\right) + \left[\overset{I}{\Sigma}_1 + \overset{I}{\Sigma}_2 + \overset{I}{\Sigma}_3 \dots + \overset{I}{\Sigma}_n\right]$$

§. 18.

Aus 26) folgt, wenn man gemäss 4) setzt $\overset{I}{\Sigma}_n = \overset{II}{\alpha}_n - \left(\overset{II}{\alpha}_1 - \right.$

$$28)\quad \overset{II}{\alpha}_n - \overset{II}{\alpha}_1 = (n-1)\overset{I}{\alpha}_1 + \left[\overset{II}{\Sigma}_1 + \overset{II}{\Sigma}_2 + \overset{II}{\Sigma}_3 \dots + \overset{II}{\Sigma}_{n-1}\right]$$

oder

$$\overset{II}{\alpha}_{n+1} - \overset{II}{\alpha}_1 = n.\overset{I}{\alpha}_1 + \left[\overset{II}{\Sigma}_1 + \overset{II}{\Sigma}_2 + \overset{II}{\Sigma}_3 \dots + \overset{II}{\Sigma}_n\right]$$

und ebenso folgt aus 27), wenn man gemäss 4) setzt $\overset{II}{\Sigma}_n = \overset{I}{\alpha}_{n+1} -$

$$29)\quad \overset{I}{\alpha}_{n+1} - \overset{I}{\alpha}_1 = n\left(\overset{II}{\alpha}_1 - \overset{I}{\alpha}_1\right) + \left[\overset{I}{\Sigma}_1 + \overset{I}{\Sigma}_2 + \overset{I}{\Sigma}_3 \dots + \overset{I}{\Sigma}_n\right]$$

Es gilt daher z. B. für die in §. 8. dargestellten Reihen, für we
che $\overset{I}{\alpha}_1 = 0$ und $\overset{II}{\alpha}_1 = 1$ ist, die merkwürdige Eigenschaft:

$$\overset{II}{\alpha}_{n+1} = 1 + \left[\overset{II}{\Sigma}_1 + \overset{II}{\Sigma}_2 + \overset{II}{\Sigma}_3 \dots + \overset{II}{\Sigma}_n\right]$$

$$\overset{I}{\alpha}_{n+1} = n + \left[\overset{I}{\Sigma}_1 + \overset{I}{\Sigma}_2 + \overset{I}{\Sigma}_3 \dots + \overset{I}{\Sigma}_n\right]$$

§. 19.

Aus §. 1. wissen wir, dass, wenn man überhaupt eine Rei
von Reihen, deren jede die Reihe der ersten Differenzen für die i
vorhergehende ist, mit I, II, III ,IV, ... Q numerirt, die wichtig
Eigenschaft der bisher betrachteten Reihen von Reihen darin b
steht, dass bei ihnen die Gleichung gilt:

$$30)\quad \left(\begin{matrix}Q\\ \alpha\\ n\end{matrix}\right) = \left(\begin{matrix}Q-2\\ \alpha\\ n+1\end{matrix}\right).$$

Diese Gleichung ist aber nur ein specieller Fall der allgemeiner
Gleichung, welche für gewisse Reihen von Reihen gilt und
Form hat:

$$31)\quad \left(\begin{matrix}Q\\ \alpha\\ n\end{matrix}\right) = \delta\left(\begin{matrix}Q-2\\ \alpha\\ n+1\end{matrix}\right)$$

vorin δ eine beliebige constante Zahl ist, n und Q aber die igen Bedeutungen haben.

§. 20.

in Beispiel für das im vorigen Paragraphen erwähnte allneinere Gesetz (31.) bietet folgende Reihe von Reihen, für e $\delta = 4$ und $\overset{I}{\alpha}_1 = 0$ und $\overset{II}{\alpha}_1 = 1$ ist, dar.

I) .... $-204-35-6-1 \quad 0+1+6+35+204+1189+6930$ ....

II) .... $+169+29+5+1+1+5+29+169+985+5741$ ....

III) .... $-140-24-4 \quad 0+4+24+140+816+4756$ ....

IV) .... $+116+20+4+4+20+116+676+3940$ ....

V) .... $-96-16 \quad 0+16+96+560+3264$ ....

VI) .... $+80+16+16+80+464+2704$ ....

VII) .... $-64 \quad 0+64+384+2240$ ....

u. s. w.   u. s. w.

Hier ist nämlich:

I) .... — 204 — 35 — 6 — 1 $\mp$ 0 + 1 + 6 + 35 + 204 + 1189 + 6930 ....

II) .... + 169 + 29 + 5 + 1 + 1 + 5 + 29 + 169 + 985 + 5741 ....

III) .... — 4.35 — 4.6 — 4.1 $\mp$ 4.0 + 4.1 + 4.6 + 4.35 + 4.204 + 4.1189 ....

IV) .... + 4.29 + 4.5 + 4.1 + 4.1 + 4.5 + 4.29 + 4.169 + 4.985 ....

V) .... — 4^2.6 — 4^2.1 $\mp$ 4^2.0 + 4^2.1 + 4^2.6 + 4^2.35 + 4^2.204 ....

VI) .... + 4^2.5 + 4^2.1 + 4^2.1 + 4^2.5 + 4^2.29 + 4^2.169 ....

VII) .... — 4^3.1 $\mp$ 4^3.0 + 4^3.1 + 4^3.6 + 4^3.35 ....

u. s. w. u. s. w.

Es entsteht also in diesem Beispiele jede Qte Reihe aus der $(Q-2)$ten Reihe durch Multiplication aller Glieder mit der Zahl $4(=\delta)$, so dass, nach der Gleichung 31), hier

$$\overset{Q}{\underset{n}{\alpha}} = 4\begin{pmatrix} Q-2 \\ \alpha \\ n+1 \end{pmatrix}$$

ist. Es entsteht also die $(2P+1)$te Reihe aus der Iten Reihe durch Multiplication aller Glieder derselben mit 4^P (oder allgemeiner mit δ^P) und ebenso entsteht die $(2P+2)$te Reihe aus der IIten Reihe durch Multiplication aller Glieder mit 4^P $(=\delta^P)$, so dass

$$\begin{pmatrix} 2P+1 \\ \alpha \\ n \end{pmatrix} = \delta^P \begin{pmatrix} I \\ \alpha \\ n \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 2P+2 \\ \alpha \\ n \end{pmatrix} = \delta^P \begin{pmatrix} II \\ \alpha \\ n \end{pmatrix}.$$

§. 21.

Ein zweites Beispiel für das allgemeinere Gesetz (31.) bietet folgende Reihe von Reihen dar, in welcher gleichfalls $\delta = 4$, aber $\begin{pmatrix} I \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = 1$ und $\begin{pmatrix} II \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ ist.

I) $\ldots - 41 - 7 - 1 + 1 + 7 + 41 + 239 + 1393 + 8119 \ldots$

II) $\ldots + 34 + 6 + 2 + 6 + 34 + 198 + 1154 + 6726 \ldots$

III) $\ldots - 28 - 4 + 4 + 28 + 164 + 956 + 5572 \ldots$

IV) $\ldots + 24 + 8 + 24 + 136 + 792 + 4616 \ldots$

V) $\ldots - 16 + 16 + 112 + 656 + 3824 \ldots$

VI) $\ldots + 32 + 96 + 544 + 3168 \ldots$

VII) $\ldots + 64 + 448 + 2624 \ldots$

u. s. w.

Es ist hier nämlich:

I) .... — 239 — 41 — 7 — 1 + 1 + 7 + 41 + 239 + 1393 + 8119 ....

II) .... + 198 + 34 + 6 + 2 + 6 + 34 + 198 + 1154 + 6726 ....

III) .... — 4.41 — 4.7 — 4.1 + 4.1 + 4.7 + 4.41 + 4.239 + 4.1393 ....

IV) .... + 4.34 + 4.6 + 4.2 + 4.6 + 4.34 + 4.198 + 4.1154 ....

V) .... — 4².7 — 4².1 + 4².1 + 4².7 + 4².41 + 4².239 ....

VI) .... + 4².6 + 4².2 + 4².6 + 4².34 + 4².198 ....

VII) .... — 4².1 + 4².1 + 4².7 + 4².41 ....

u. s. w.

§. 22.

Wenn man die Potenzen der Grösse $(\sqrt{2}-1)$ der Ordnung nach entwickelt und sie so darstellt, dass sie, je nachdem der Exponent ungerad oder gerad ist, die Form haben:

$$(\sqrt{2}-1)^{2n+1} = (x_n\sqrt{2} - y_n)$$
$$(\sqrt{2}-1)^{2n} = (\tfrac{1}{2}u_n - 2.v_n.\sqrt{2}),$$

so ist die Reihe der Werthe von x_n übereinstimmend mit I. in §. 20. und jene der Werthe von v_n mit II. in §. 20., während die Reihe der Werthe von y_n die Reihe I. in §. 21. und jene der Werthe von u_n die Reihe II. in §. 21. giebt

§. 23.

Die in §. 20. und §. 21. aufgeführten Beispiele solcher Reihen von Reihen, für welche das in der Gleichung 31. ausgesprochene allgeneinere Gesetz gilt (von welchem das in der Gleichung 30. ausgeprochene Gesetz für die von uns specieller betrachteten Reihen ur ein besonderer Fall ist), mögen genügen, und es soll hier nur och an die Aehnlichkeit des Gesetzes 31. mit einem, bei mehr llgemein bekannten anderen Reihen von Reihen geltenden erinnert erden, nach welchen bei diesen anderen Reihen von Reihen, wenn ir die im §. 1. angenommene Bezeichnungsweise auch hier beibealten:

$$\underset{n}{\overset{Q}{\alpha}} = D\left(\underset{n}{\overset{Q-1}{\alpha}}\right), \text{ also auch } \underset{n}{\overset{Q}{\alpha}} = D^2 . \left(\underset{n}{\overset{Q-2}{\alpha}}\right),$$

ithin

$$\left(\underset{n}{\overset{Q}{\alpha}}\right) = \delta . \left(\underset{n}{\overset{Q-2}{\alpha}}\right)$$

st.

Man erhält solche Reihen von Reihen bekanntlich, wenn man ür die Reihe der Potenzen irgend einer constanten Zahl, als Reihe I., die dazu gehörigen Reihen II., III., IV. u. s. w. Q ihrer 1sten, 2ten, 3ten u. s. w. Qten Differenzen bildet.

So hat man z. B. für die Potenzen der Zahl 5 folgende Reihe von Reihen:

I) .... 5^{-3} 5^{-2} 5^{-1} 5^0 5^1 5^2 5^3 5^4 5^5 ....

II) .... 4.5^{-3} 4.5^{-2} 4.5^{-1} 4.5^0 4.5^1 4.5^2 4.5^3 4.5^4 ....

III) .... $4^2.5^{-3}$ $4^2.5^{-2}$ $4^2.5^{-1}$ $4^2.5^0$ $4^2.5^1$ $4^2.5^2$ $4^2.5^3$ ....

IV) .... $4^3.5^{-3}$ $4^3.5^{-2}$ $4^3.5^{-1}$ $4^3.5^0$ $4^3.5^1$ $4^3.5^2$ ....

u. s. w.

und überhaupt für die Potenzen einer beliebigen constanten Zahl z das Gesetz:

$$\left(\underset{n}{\overset{Q}{\alpha}}\right) = (z-1)\left(\underset{n}{\overset{Q-1}{\alpha}}\right) = (z-1)^2 . \left(\underset{n}{\overset{Q-2}{\alpha}}\right) \text{ u. s. w.,}$$

so dass

$$\left(\underset{n}{\overset{Q}{\alpha}}\right) = (z-1)^{Q-1} . \left(\underset{n}{\overset{1}{\alpha}}\right) = (z-1)^{Q-1} . z^n,$$

so dass in den Ausdrücken

$$\left(\underset{n}{\overset{Q}{\alpha}}\right) = D\left(\underset{n}{\overset{Q-1}{\alpha}}\right) \text{ und } \underset{n}{\overset{Q}{\alpha}} = \delta\left(\underset{n}{\overset{Q-2}{\alpha}}\right)$$

$D = z - 1$ und $\delta = (z-1)^2$ ist.

Ebenso wie oben die Gleichung 30. jenem speciellen Falle von 31. entsprach, wo $\delta = 1$ war, so ist auch hier der Fall möglich, wo $\delta = 1$ wird. Die Werthe D und δ und deren Potenzen haben aber hier natürlich nur dann den Werth $= 1$, d. h. es ist nur dann jede der Reihen II., III. .... Q der Hauptreihe I. gleich, wenn $x = 2$ ist, so dass für die Reihe der Potenzen der Zahl 2 $\overset{I}{\underset{n}{\alpha}} = \overset{II}{\underset{n}{\alpha}} = \overset{III}{\underset{n}{\alpha}} \ldots = \overset{Q}{\underset{n}{\alpha}}$ ist.

I) .... 1 2 4 8 16 32 ....
II) .... 1 2 4 8 16 ....
III) .... 1 2 4 8 ....
u. s. w.

XXI.

Ueber die naturphilosophischen Principien der Bewegungslehre.

Von dem
Herrn Doctor Barfuss
zu Weimar.

---

§. 1.

1) Da jeder Körper einen Raum einnimmt, so kann von einer bestimmten Gestalt der Bahn, welche er während seiner Bewegung beschreibt, nicht anders die Rede sein, als wenn wir die Bewegung auf bestimmte Punkte desselben beziehen. Der Anfang aller Bewegungslehre beginnt also mit der Bewegung von Punkten in abstracto, deren Bahnen entweder gerade oder krumme Linien sind.

2) Durch die Vergleichung des Weges mit der Zeit, in welcher jener beschrieben wurde, gestaltet sich uns der Begriff von Geschwindigkeit. Wenn der Körper A in derselben Zeit einen weiteren Weg gegangen ist, als ein anderer B, so sagen wir, A habe sich geschwinder bewegt als B. Doch giebt dieses nur eine durchschnittliche Vergleichung, aus welcher noch nichts für die Zwischenzeiten geschlossen werden kann. Denken wir uns aber daneben, dass in gleichen Zeiträumen auch gleiche Wege zurückgelegt

worden sind, so haben wir die *gleichförmige* Bewegung und verstehen dann unter *Geschwindigkeit* den in der Zeiteinheit durchlaufenen Raum. Ist nun s der in der Zeit t mit der Geschwindigkeit c zurückgelegte Weg, so ist $s = ct$.

3) Wenn in gleichen Zeiten nicht gleiche Wege zurückgelegt werden, so heisst die Bewegung *ungleichförmig* oder *verändert*. Logisch genommen kann nun die Bewegung nach einem allgemeinen Gesetz stetig veränderlich sein oder die Veränderung kann ohne Regel erfolgen. Der zweite Fall ist kein Gegenstand mathematischer Betrachtung, im ersten aber muss der zurückgelegte Weg s irgend eine Function der Zeit t sein. Ist nun $s = f(t)$ und wird $t + \Delta t$ aus t, so wird $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} + \frac{d^2s}{dt^2} \cdot \frac{\Delta t}{2} + \dots$. Je kleiner nun Δt und folglich auch Δs wird, desto mehr nähert sich $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ dem $\frac{ds}{dt}$, und wenn wir uns eine gleichförmige Bewegung denken, für welche die Geschwindigkeit $\frac{ds}{dt}$ ist, so ist in derselben genau $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$. Die veränderliche Bewegung lässt sich also mit der gleichförmigen, deren Geschwindigkeit $\frac{ds}{dt}$ ist, um so mehr vergleichen, je kleiner die Zeitintervalle sind, innerhalb welcher die Vergleichung angestellt wird. Man nennt daher auch den Differentialquotienten $\frac{ds}{dt}$ die Geschwindigkeit der veränderten Bewegung und sagt, dass die letztere in ihren Differentialen gleichförmig sei.

Setzen wir also die veränderliche Geschwindigkeit $\frac{ds}{dt} = v$, so wird $ds = v dt$ und $s = \int v dt$.

4) Bei der veränderten Bewegung ist nun der einfachste Fall der, wo die Aenderungen der Geschwindigkeit der Zeit proportional sind, also die Geschwindigkeit selbst durch $a + bt$ ausgedrückt werden kann. Hier nennt man die Bewegung eine *gleichförmig beschleunigte*, wenn b positiv ist und die Geschwindigkeit daher mit der Zeit wächst; die constante Grösse b aber heisst das *Maass der Beschleunigung*.

Hier ist also $v = a + bt$, also $ds = vdt = adt + bt\,dt$, und folglich $s = at + \frac{1}{2}bt^2 + \text{Const.}$ Denken wir uns sowohl a als auch Const. $= 0$, so wird $s = \frac{1}{2}bt^2$ und wir haben dann den einfachsten Fall der gleichförmig beschleunigten Bewegung, bei welcher die Wege den Quadraten der Zeit proportional sind.

5) Wenn die Aenderungen der Geschwindigkeit nicht der Zeit proportional sind, so heisst die Bewegung ungleichförmig beschleunigt oder verzögert, je nachdem sie mit immer grösserer oder mit immer geringerer Geschwindigkeit vor sich geht. Wenn wir hier nach der Aenderung der Geschwindigkeit fragen, so haben wir, weil $v = \varphi(t)$ eine Function von t ist, $v + \Delta v = v + \frac{dv}{dt} \cdot \Delta t + \dots$, also $\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} + \frac{d^2v}{dt^2} \cdot \frac{\Delta t}{2} + \dots$. Je kleiner nun hier Δt und mithin auch Δv wird, desto mehr nähert sich $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ dem $\frac{dv}{dt}$ und desto genauer können wir also auch innerhalb des Zeitintervalles Δt die

ungleichförmig beschleunigte Bewegung mit einer gleichförmig beschleunigten vergleichen, deren constantes Beschleunigungsmaass $= \frac{dv}{dt}$ ist. Darum nennen wir den Differentialquotienten $\frac{dv}{dt}$ ebenfalls das Maass der Beschleunigung für die Bewegung mit ungleichförmig veränderter Geschwindigkeit.

Wenn nun $\frac{dv}{dt} = p$ gesetzt wird, so ist $dv = pdt$ und $v = \int pdt$. Weil aber $v = \frac{ds}{dt}$ ist, so hat man auch $p = \frac{dds}{dt^2}$, oder $dds = p.dt^2$. Natürlich ist hierbei das Differential der Zeit constant genommen.

Hier ist also das Beschleunigungsmaass p ein veränderliches, aber der einfachste Fall wäre wieder der, wo die Aenderung von p der Zeit proportional wäre. also $p = b + \beta t$ gesetzt werden könnte. Dann hätte man $dv = pdt = b\,.\,dt + \beta t.dt$, also $v = bt + \frac{1}{2}\beta t^2 + k$, wo k eine Constante bedeutet. Ferner $ds = vdt = bt.dt + \frac{1}{2}\beta t^2.dt + k.dt$, und daher $s = kt + \frac{1}{2}bt^2 + \frac{1}{6}\beta t^3 + k'$. Nehmen wir aber für den einfachsten Fall $b = k = k' = 0$, so wird $s = \frac{1}{6}\beta t^3$, welches die einfachste Vergleichung zwischen Zeit und Weg bei einer Bewegung mit gleichförmig wachsendem Beschleunigungsmaasse gäbe.

6) Nun könnten wir aber wieder jenes β veränderlich setzen, und indem wir eine solche Bewegung mit derjenigen vergleichen, bei welcher β constant ist, würden wir für den Differentialquotienten $\frac{dp}{dt} = \frac{d^3s}{dt^3}$ eine Bedeutung gewinnen. Doch geht unsere Zergliederung der Naturerscheinungen nicht so weit, dass wir für $\frac{d^3s}{dt^3}$ eine physikalische Analogie anzugeben wüssten.

7) Dieses bezieht sich zunächst nur auf die Bewegung von Punkten. Bewegt sich aber ein Körper, so ist der einfachste Fall der, wo alle seine Punkte identische Linien beschreiben, also jede dieselben zwei Punkte verbindende Gerade in allen Lagen sich parallel bleibt. Diese Bewegung nennen wir die progressive, und es wird dieselbe vollständig erkannt, wenn die Bewegung irgend eines Punktes am Körper erkannt wird.

§. 2.

1) Jedwede Bewegung eines Punktes A ist **relativ**, d. h. sie wird bezogen und gilt nur in Bezug auf gewisse Punkte, welche sich in Ruhe befinden oder als ruhend gedacht werden. Wenn die Bewegung in derselben Ebene geschieht, was wir hier der Einfachheit wegen zuerst voraussetzen wollen, genügen bloss zwei Punkte LM zur Bestimmung der Lage von A, deren einer als Anfangspunkt der Abscissen, der andere zur Bestimmung der Lage der Abscissenlinie dient.

Die Punkte LM können sich jedoch, ohne ihre gegenseitige Lage zu ändern, selbst wieder bewegen, und man kann die Bewegung auf die als ruhend gedachten Punkte $L'M'$ beziehen. In Bezug auf diese wird die Bewegung von A im Allgemeinen ganz anders ausfallen, als in Bezug auf LM, d. h. A wird eine ganz andere Linie beschreiben, wenn man die Bewegung auf $L'M'$ bezieht, als wenn man sie auf LM bezieht. Die Bewegung des Punktes

A in Bezug auf $L'M'$ nennen wir nun zusammengesetzt aus seiner Bewegung in Bezug auf die Punkte LM und aus der, ihm in Folge der Bewegung von LM zukommenden Bewegung.

2) Für die Construction der zusammengesetzten Bewegung gilt der Grundsatz der gegenseitigen Unabhängigkeit der einzelnen Bewegungen. Sucht man den Ort von A in Bezug auf $L'M'$ zur Zeit t, so lasse man die Punkte LM vorerst ruhen und bestimme in Bezug auf sie den Ort A' von A nach der Zeit t in Folge der Bewegung, welche dem A in Bezug auf LM zukommt. Alsdann lasse man die Punkte LM die Zeit t hindurch sich so bewegen, wie es ihnen in Bezug auf $L'M'$ zukommt, ohne jedoch die Lage von A' gegen LM zu ändern. Hierdurch kommt A' in die Lage A'', welches der richtige Ort von A in Bezug auf $L'M'$ nach der Zeit t sein wird. Man kann aber auch zuerst LM sich bewegen und A ruhen, dann aber LM ruhen und A sich bewegen lassen, wenn nur jede Bewegung gleich lange dauert. Dieses ist geometrisch unmittelbar klar, da einerseits eine bestimmte Lage von LM gegen $L'M'$, anderseits aber auch eine bestimmte Lage von A gegen LM am Ende der Zeit t gefordert wird.

3) Einfacher wird die Sache, wenn die Bewegung von LM bloss eine progressive ist, so dass die Linie LM in allen Lagen sich parallel bleibt. Dann beschreibt jeder Punkt von LM und auch der gegen LM ruhend gedachte Punkt A dieselbe Linie, welcher Umstand es unnütz macht, dass man die Linie LM weiter betrachte. Denn die Linie, welche A in Folge seiner auf die Punkte LM bezogenen Bewegung beschreibt, erhalten wir eben so, wenn wir LM ruhend denken und die Bewegung auf $L'M'$ beziehen. Kennen wir nun noch die Linie, welche das gegen LM ruhende A in Folge der auf $L'M'$ bezogenen Bewegung von LM beschreibt, so ist der Ort von A zu jeder Zeit vollkommen bestimmt. Sind AA' und AA'' die Linien, welche A vermöge einer jeden Bewegung, wenn sie allein statt hätte, in der Zeit t beschreiben würde, so ziehe man durch A' eine mit AA'' parallele und identische Linie $A'A'''$, oder auch durch A'' eine mit AA' parallele und identische Linie $A''A'''$, so ist A''' der Ort von A zur Zeit t. Offenbar kann man aber auch mit den geraden Linien AA' und AA'' und ihrem Zwischenwinkel $A'AA''$ ein Parallelogramm $AA'A'''A''$ beschreiben, da dann A''' ebenfalls der richtige Ort von A zur Zeit t sein wird.

4) Hier haben wir nun die Vorstellung zweier Bewegungen eines und desselben Punktes erhalten, welche ihm beide zu gleicher Zeit zukommen. Er bewegt sich nämlich zwiefach so, als ob er in der Linie AA' fortrücke, diese selbst aber wieder eine progressive Bewegung nach der Linie AA'' habe, die also auch dem Punkte A zukommt. Dabei nennen wir nun die Linien AA' und AA'' die Seitenbewegungen oder Componenten, und die Construction, nach welcher der wahre Ort A''' für jede Zeit gefunden wird, heisst das Parallelogramm der Bewegungen.

Das Parallelogramm der Bewegungen wenden wir jedoch immer nur in dem Falle an, wo die Seitenbewegungen AA' und AA'' geradlinig sind. Wir können darnach leicht die aus zwei gegebenen Seitenbewegungen entstehende mittlere Punkt für Punkt bestimmen, auch umgekehrt jede Bewegung in zwei gerade Seitenbewegungen zerlegen, von denen die eine ganz willkührlich ist.

5) Wenn die Seitenbewegungen AA' und AA'' beide gerade und einerlei Function der Zeit proportional sind, dass also zu jeder Zeit AA' und AA'' einerlei Verhältniss haben, so ist das Parallelogramm $AA'A'''A''$ nicht nur die Hülfsconstruction, um den Ort des Punktes A zur Zeit t zu finden, sondern derselbe hat in der Zeit t die Diagonale AA''' selbst durchlaufen, also dass die zusammengesetzte Bewegung selbst auch eine gerade ist.

Ist u die Function von t, welcher die Seitenbewegungen AA' und AA'' proportional sind, so hat man $AA' = s = au$, $AA'' = s' = bu$, wenn a und b zwei Constanten bedeuten. Ist ferner A der Winkel, den die Seitenbewegungen mit einander machen, so ist die Diagonale $AA''' = s'' = u\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos A}$, woraus folgt, dass auch die zusammengesetzte Bewegung derselben Function von t proportional ist. Die Geschwindigkeiten der Seitenbewegungen sind $\frac{ds}{dt}$ und $\frac{ds'}{dt}$, und die der zusammengesetzten Bewegung ist

$$\frac{ds''}{dt} = \frac{du}{dt}\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos A} = \sqrt{\frac{ds^2}{dt^2} + \frac{ds'^2}{dt^2} + 2\cdot\frac{ds}{dt}\cdot\frac{ds'}{dt}\cos A},$$

woraus folgt, dass die Geschwindigkeit der zusammengesetzten Bewegung aus denen der Seitenbewegungen ebenfalls nach dem Parallelogramm zusammengesetzt ist.

Aber auch das Beschleunigungsmaass der zusammengesetzten Bewegung ist aus den Beschleunigungsmaassen der Seitenbewegungen nach dem Parallelogramm zusammengesetzt, denn man hat

$$\frac{d^2s''}{dt^2} = \frac{d^2u}{dt^2}\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos A}$$
$$= \sqrt{\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2s'}{dt^2}\right)^2 + 2\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)\left(\frac{d^2s'}{dt^2}\right)\cos A.}$$

§. 3.

1) Alle diese Sätze sind zunächst nur von mathematischer Bedeutung; Anwendung auf die Natur erhalten sie zuerst durch das Gesetz der Trägheit. Nach diesem kann kein Körper seinen Zustand der Ruhe oder der Bewegung von selbst ändern, sondern hierzu gehört allemal eine Einwirkung von Aussen her, welche wir Kraft nennen. Um aber eine bestimmtere Sprache zu haben, wollen wir die Ursache, wodurch eine gleichförmige Bewegung erzeugt worden ist, einen Eindruck nennen. Diese einmal erhaltene gleichförmige Bewegung dauert nach dem Gesetze der Trägheit mit unveränderter Richtung und Geschwindigkeit so lange fort, bis durch einen neuen Eindruck dieser Zustand geändert wird. Den Eindruck haben wir ganz nach der erzeugten Bewegung zu beurtheilen; er ist also der Geschwindigkeit proportional und seine Richtung ist einerlei mit der Richtung der Bewegung. Er ist nur ein anderer Ausdruck für die Bewegung selbst, und die veränderlichen Zustände des Körpers, aus welchen zuletzt die gleichförmige geradlinige Bewegung hervorging, kommen hier nicht in Betrachtung.

2) Haben wir nun eine ungleichförmige aber stetige Bewegung

die wir zunächst nur als geradlinig annehmen wollen, so ist dieselbe nicht anders zu denken, als durch eine ununterbrochen einwirkende Ursache oder Kraft. Denn sobald die Einwirkung aufgehört hat, ist auch der Eindruck vollendet und die Bewegung nun gleichförmig. Hieraus folgt aber sogleich, dass bei der ungleichförmigen Bewegung der Ausdruck $\frac{ds}{dt}$ diejenige Geschwindigkeit bezeichnet, mit welcher der Körper gleichförmig fortgehen würde, wenn am Ende der Zeit t die Einwirkung aufhörte und also der Eindruck vollendet wäre. Denn innerhalb des folgenden Zeittheiles Δt nähert sich auch bei fortdauernder Einwirkung die Bewegung um so mehr der gleichförmigen mit der Geschwindigkeit $\frac{ds}{dt}$, je kleiner Δt ist, d. h. je mehr wir alle fernere Einwirkung beschränken. Die Geschwindigkeit $\frac{ds}{dt}$ ist also der durch die vorhergegangene Einwirkung hervorgebrachte Eindruck, und es dauert dieselbe unverändert fort, wenn alle fernere Einwirkung aufhört.

Aber wesentlich weiter kann das Gesetz der Trägheit, wie es oben ausgesprochen wurde, uns nicht führen, weil es nur sehr unbestimmte Auskunft für den Fall giebt, wo ein Körper mehrere Eindrücke zu gleicher Zeit oder auch nach einander erhält. Daher sind für die weitere Entwickelung noch andere Sätze nöthig, welche hauptsächlich, zu Folge der Darstellung aller Lehrbücher, auf folgende drei zurückkommen.

A) Wenn ein Körper gleichzeitig oder auch nach einander mehrere Eindrücke nach einerlei Richtung erhält, deren jeder ihn mit einer bestimmten Geschwindigkeit c, c', c'' u. s. w. bewegen würde, wenn er allein vorhanden wäre, so ist das Gesammtresultat aller Eindrücke eine Geschwindigkeit nach derselben Richtung, welche der Summe jener gleich ist.

B) Wenn ein Körper zwei Eindrücke nach entgegengesetzten Richtungen erhält, vermöge deren er sich mit den Geschwindigkeiten c oder c' bewegen würde, jenachdem der eine oder der andere Eindruck allein vorhanden wäre, so erfolgt die Bewegung nach der Richtung desjenigen Eindrucks, welchem die grössere Geschwindigkeit entspricht, und zwar mit einer solchen Geschwindigkeit, welche dem Unterschiede jener gleich ist.

C) Wenn ein Körper zwei Eindrücke nach verschiedenen Richtungen erhält, so dass er also nach der einen Richtung mit der Geschwindigkeit c, oder nach der anderen mit der Geschwindigkeit c' sich bewegen würde, je nachdem der eine oder der andere Eindruck allein vorhanden wäre, so erfolgt die Bewegung nach der Diagonale des aus den Geschwindigkeiten c und c' und ihrem Richtungsunterschiede construirten Parallelogramms, und zwar mit einer solchen Geschwindigkeit, welche durch eben diese Diagonale dargestellt wird.

§. 4.

Von den unter A, B, C aufgeführten Sätzen sind nun offenbar die beiden ersten schon im dritten enthalten, und sie müssen folglich alle drei das Ergebniss eines allgemeineren Grundsatzes sein. Diesen glaube ich nun so aussprechen zu können:

Wenn ein Körper gleichzeitig mehrere Eindrücke erhält, so erfolgt die Bewegung in der Weise, als ob jeder Eindruck mit unveränderter Richtung und Intensität fortbestände.

Eigentlich beweisen lässt sich dieser Satz nicht, wohl aber kann man ihn mehr erläutern und zunächst nur auf zwei Eindrücke beschränken. Gesetzt also, es habe ein Körper *A* gleichzeitig zwei Eindrücke nach den Richtungen *AB* und *AD* erhalten, so ist damit gemeint, dass der Körper *A* gleichförmig in einer bestimmten Zeit den Weg *AD* zurücklegen würde, wenn der Eindruck nach der Richtung *AB* nicht vorhanden wäre; oder aber es würde der Körper in derselben Zeit gleichförmig und geradlinig von *A* nach *B* gehen, wenn er den Eindruck nach der Richtung *AD* nicht erhalten hätte. Da nun nach obigem Grundsatze beide Eindrücke mit unveränderter Richtung und Geschwindigkeit fortbestehen, so folgt, dass der Körper *A* eine solche Bewegung machen muss, vermöge deren er sich gleichförmig aus der Linie *AD* nach der Richtung *AB* und ebenfalls gleichförmig aus der Linie *AB* nach der Richtung *AD* entfernt, und daher in der That die Diagonale des aus den gleichzeitigen Wegen *AB* und *AD* mit ihrem Richtungsunterschiede beschriebenen Parallelogramms durchläuft.

Es ist also klar, dass in dem obigen Grundsatze das Parallelogramm der Eindrücke, gewöhnlich der Kräfte genannt, unmittelbar enthalten ist. Um sich die Bedeutunng des obigen Grundsatzes noch auf andere Weise zu erläutern, denke man sich, ein Körper habe einen solchen Eindruck *P* erhalten, vermöge dessen er sich nach der Richtung *AB* gleichförmig bewegt, und es gehe derselbe in einer bestimmten Zeit von *A* bis *B*. In demselben Augenblicke, wo er in *A* ist, erhalte er einen zweiten Eindruck *Q*, so wird er sich dennoch nur gleichförmig und geradlinig bewegen können, weil der Voraussetzung zu Folge alle fernere Einwirkung sogleich aufhören soll. Er mag nun in derselben Zeit, in welcher er ohne Zuthun des zweiten Eindrucks von *A* nach *B* gegangen wäre, wirklich von *A* bis *C* gelangt sein. Hier kann man sich offenbar vorstellen, dass jener erste Eindruck *P* mit unveränderter Intensität und seiner anfänglichen Richtung beständig parallel fortbestanden, dass aber ein zweiter ebenfalls unveränderlicher und mit *BC* beständig paralleler Eindruck *R* den Körper aus der Linie *AB* weggerückt und so durch die Linie *AC* geführt habe. Dieser Eindruck *R* war in demselben Augenblicke, als der Eindruck *Q* zu *P* getreten war, also schon in *A* vorhanden, und die Behauptung kommt nun darauf zurück, dass *R* mit *Q* identisch sei, oder dass der Eindruck *R* den Körper in der Linie *AD*, die mit *BC* parallel ist, mit noch eben derselben Geschwindigkeit bewegt haben würde, wenn der Eindruck *P* nicht vorhanden gewesen wäre.

Auf diesen Grundsatz des ungestörten Fortbestehens aller Eindrücke nach Intensität und Richtung ist das Parallelogramm der Kräfte von mehreren Heroen in den mathematischen Wissenschaften, namentlich auch von Newton gestützt worden, und es folgt daraus unmittelbar durch die Zusammensetzung der Bewegungen, wofür die Regeln in §. 2. entwickelt worden sind. Dass wenigstens Newtons Meinung auf diesen Grundsatz zurückkomme, scheint mir aus seinen Worten unmittelbar hervorzugehen, welche also lauten:

Corpus viribus conjunctis diagonalem parallelogrammi eodem tempore describere, quo latera separatis.

Si corpus dato tempore, vi sola *M*, ferretur ab *A* ad *B*, et vi sola *N*, ab *A* ad *C*, compleatur parallelogrammum *ABCD*, et vi utraque feretur id eodem tempore ab *A* ad *D*. Nam quoniam vis *N* agit secundum lineam *AC* ipsi *BD* parallelam, haec vis nihil mutabit velocitatem accedendi ad lineam illam *BD* a vi altera genitam. Accedet igitur corpus eodem tempore ad lineam *BD* sive vis *N* imprimatur, sive non, atque adeo in fine illius temporis reperietur alicubi in linea illa *BD*. Eodem argumento in fine temporis eiusdem reperietur alicubi in linea *CD*, et idcirco in utriusque lineae concursu *D* reperiri necesse est.

Die Worte: nam quoniam vis *N* agit u. s. w. bis genitam sprechen doch offenbar den obigen Grundsatz aus. Denselben könnte man vielleicht dem Gesetz der Trägheit noch zur Vervollständigung hinzufügen, wenigstens scheint er mit ihm nahe verwandt zu sein. Das Trägheitsgesetz, wie es oben ausgesprochen wurde, ist schon in dem allgemeineren der Naturnothwendigkeit enthalten; was es über die Bewegung lehrt, folgt aus dem letzteren unmittelbar mit Hülfe des Satzes vom zureichenden Grunde. Daher kann kein Körper durch sich selbst in Bewegung kommen, und die einmal entstandene Bewegung kann weder in Hinsicht auf Geschwindigkeit noch auf Richtung von selbst eine Aenderung erleiden. Weiter führt uns das Trägheitsgesetz auch keinen Schritt, wenn wir ihm nicht einen bestimmteren Gehalt geben. Dieses geschieht nun dadurch, dass wir es auf das gleichzeitige Zusammenwirken mehrerer Eindrücke ausdehnen. Der Körper genügt jedem Eindrucke gerade durch eben so viel Bewegung, wie wenn dieser Eindruck allein vorhanden wäre, und die Regeln für die Zusammensetzung der Bewegung geben folglich auch die Normen für die Beurtheilung zusammengesetzter Eindrücke.

§. 5.

In der neueren Zeit ist man jedoch meist von dieser Betrachtungsweise für das Kräfteparallelogramm abgekommen und hat dafür andere Demonstrationen ersonnen, die zum Theil weitläufig und sehr künstlich geordnet sind. Ich glaube nicht, dass man einen wirklichen Vortheil dadurch erreicht habe, um aber die Sache in ihr wahres Licht zu setzen, will ich mich beispielsweise auf Poissons Darstellung beziehen, zumal dieselbe nach einigen hier und da vorgekommenen Aeusserungen nicht richtig verstanden worden zu sein scheint, und Poisson allerdings verdient, gegen ungerechte Vorwürfe vertheidigt zu werden.

Poisson setzt zuerst zwei gleiche Seiteneindrücke P voraus, in welchem Falle durch den Satz des zureichenden Grundes leicht folgt, dass der Körper der Linie folgen muss, welche den Winkel der Seiteneindrücke halbirt. Macht also jeder Seiteneindruck mit der Resultante R den Winkel x, so kann man setzen $R = \varphi(P, x)$, und die erste Aufgabe ist nun, dass man zeige, es sei $\varphi(P, x) = P\psi(x)$. Hierfür nimmt Poisson nicht, wie manche seiner Tadler, etwa bloss die Willkührlichkeit des Maasses von P, sondern mit mehr Tiefblick zugleich auch den Umstand in Anspruch,

dass in $\varphi(P,x)$ keine andere Grösse vorkommt, die mit P gleichartig ist. Da nämlich das Verhältniss $R:P$ bei jeder Maasseinheit doch dasselbe bleiben muss, so kann R nur $=P\varphi(x)$ sein. Wenn aber zur Bildung von $\varphi(P,x)$ noch eine mit P gleichartige Constante a nöthig sein sollte, so wäre auch der ganze Schluss verfehlt, und dieser Umstand ist es gerade, der hier als ein Axiom hingestellt werden muss; denn daraus, dass ich nicht wüsste, woher eine solche Constante in die Rechnung kommen sollte, kann ich doch nicht auf die Abwesenheit derselben schliessen. So könnte z. B. wohl $R=P(1+\frac{P}{a}\varphi(x))f(x)$ sein, ohne dass das Verhältniss $P:R$ bei verschiedenen Maasseinheiten constant zu sein aufhörte. Daher kommt man auch durch diese Betrachtung nicht wesentlich weiter, als wenn man sogleich die Gleichung $R=P.\varphi(x)$ als ein Axiom annimmt.

Nun denkt sich Poisson jede Seitenkraft P als Resultante zweier gleichen Seitenkräfte Q, welche mit P den Winkel z machen und hat dann $P=Q\varphi(z)$. Von den vier Kräften Q fallen zwei zwischen P und R und machen mit R den Winkel $x-z$, geben also in der Resultante das Glied $Q\varphi(x-z)$; die beiden anderen Q machen mit R den Winkel $x+z$, geben also in R ein zweites Glied $Q\varphi(x+z)$, so dass $R=Q\varphi(x+z)+Q\varphi(x-z)$ sein muss. Weil aber auch $R=P\varphi(x)=Q\varphi(z)\varphi(x)$, so folgt augenblicklich

$$\varphi(z)\,\varphi(x)=\varphi(x+z)+\varphi(x-z),$$

welche Gleichung nun zur Bestimmung der Form φ dient.

Hier stossen wir aber auf die beiden Axiome, welche den eigentlichen Nerv des Beweises ausmachen. Das erste ist das, welches ich oben in §. 3. unter A) aussprach, nach dem anderen bringt jedes Kräftepaar in der Resultante ein eben so grosses Glied hervor, wie wenn es allein wirkte. Sind denn aber diese Axiome so unmittelbar klar, dass man eine solche Demonstration der Newtonschen oder einer anderen ähnlichen vorziehen könnte? Allerdings muss zugegeben werden, dass der aus mehreren Eindrücken hervorgehende Gesammteindruck auf gleiche Weise gefunden wird, man mag die Combinationen zu je zwei machen, wie man will, aber hieraus ist doch noch nicht klar, dass man die Resultante jedes Paares als unabhängig von allen übrigen Eindrücken betrachten darf*). Muss ich aber dieses zugeben, so sehe ich nicht ab, wie ich dadurch gegen das Axiom in §. 4. in Vortheil kommen soll.

Statt der naturphilosophischen Begründung hat man aber die Analysis Poissons angegriffen, an welcher ich ganz und gar keinen Tadel aufzufinden weiss. Denn wenn auch die Functionen $\cos x$

*) In diesen beiden Axiomen liegt auch zugleich der vollständige Grund für die Gleichung $\varphi(P,x)=P.\varphi(x)$. Denn wenn der Seiteneindruck p ist, so sei die Resultante pk. Erfolgt dann p gleichzeitig $n$mal, so entsteht der Eindruck np; aber in der Resultante wird auch der Eindruck pk, $n$mal erfolgen, und sie wird daher $np.k$, so dass also k von dem Seiteneindrucke unabhängig sein muss.

und $\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ die syntaktische Eigenschaft, nach welcher $2\varphi(x)\varphi(z) = \varphi(x+z)+\varphi(x-z)$ ist, gemein haben, so sehe ich doch nicht ein, wie dadurch Poissons Demonstration umgestossen werden soll. Derselbe spricht ganz bestimmt die Voraussetzung aus, dass in $R=P\varphi(x)$, $\varphi(x)$ einerlei Functionsform für alle Werthe von x sei, und wenn man auch für diese Behauptung einen Beweis verlangen möchte, so muss man doch Poissons Demonstration nur aus diesem Gesichtspunkte beurtheilen. Darnach aber hat Poisson das Recht, die Ausdrücke $\varphi(x+z)$ und $\varphi(x-z)$ nach dem Taylorschen Lehrsatze aufzulösen und für die beiden daher entspringenden $\varphi(x)$, so wie auch für die beiden $\frac{d.\varphi(x)}{dx}$ u. s. w. $2\varphi(x)$, $2.\frac{d\varphi(x)}{dx}$ u. s. w. zu setzen, und die Gleichung

$$\varphi(x)\,\varphi(z)=\varphi(x+z)+\varphi(x-z)$$

giebt ihm dann

$$\varphi(z)=2(1+\frac{d^2.\varphi(x)}{\varphi(x).dx^2}\cdot\frac{z^2}{1.2}+\frac{d^4.\varphi(x)}{\varphi(x).dx^4}\cdot\frac{z^4}{1.2.3.4}\ldots.).$$

Daraus geht denn hervor, dass die Quotienten $\frac{d^2\varphi(x)}{\varphi(x).dx^2}$ u. s. w. von x gar nicht mehr abhängen können. Wenn daher $\frac{d^2.\varphi(x)}{dx^2} = -b^2\varphi(x)$ gesetzt wird, so folgt sogleich $\frac{d^4.\varphi(x)}{dx^4}=+b^4\varphi(x)$, $\frac{d^6.\varphi(x)}{dx^6}=-b^6\varphi(x)$ u. s. w., und mithin

$$\varphi(z)=2(1-\frac{b^2z^2}{1.2}+\frac{b^4z^4}{1.2.3.4}\ldots.)$$

Dieses darf nun immerhin $=2\cos bz$ gesetzt werden, denn es bleibt ja die Freiheit, für b auch einen imaginären Werth $g\sqrt{-1}$ zu denken, so dass also in der Entwickelung von $\cos bz$ alle Glieder positiv werden und somit auch die Function $\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ berücksichtigt wird. Weil aber für $z=\frac{\pi}{2}$ die Resultante R und daher auch $\varphi(z)=0$ sein muss, so sieht man sogleich, dass $\varphi(z)$ durch die Function $\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ nicht dargestellt werden kann; denn die Entwickelung derselben hat für reelle Werthe von x nur positive Glieder und kann daher, weil sie immer convergirt, für solche Werthe die 0 nicht vorstellen. Also muss in der Entwickelung von $\varphi(z)$ der Coefficient b reell sein. Nach bekannten analytischen Principien könnte nun $b=1$, $b=3$, $b=5$ u. s. w. sein, allein wenn man $b>1$ nehmen wollte, so würde man ein Gleichgewicht der Kräfte in solchen Fällen erhalten, wo es augenscheinlich nicht statt haben kann. Es ist also $\varphi(z)=2\cos z$ und daher $R=2P.\cos x$.

Herr Doctor Dippe hat in diesem Archive (Thl. III. S. 329.) den Beweis so geordnet, dass er von der Voraussetzung einer gleichen

Functionsform für alle Werthe des Winkels, welchen die Seitenkraft mit der Resultante macht, frei ist, wodurch seine Demonstration allerdings ein Uebergewicht über die von Poisson bekommt. Nur bin ich der Meinung, dass von den 6 Grundsätzen, welche Herr Dr. Dippe dem Beweise unterlegt, nur die beiden ersten und der fünfte nöthig sind, abgesehen von dem, was ich oben in Hinsicht auf Poissons Vortrag hervorhob. In der Gleichung

$$\varphi(x)\,\varphi(z) = \varphi(x+z) + \varphi(x-z)$$

sind bei Herrn Doctor Dippe die Ausdrücke $\varphi(x)$, $\varphi(z)$ u. s. w. nichts anderes, als eine Art unbestimmter Coefficienten, für welche eben jene Gleichung die Relation ausdrückt. Setzen wir $z = x$, so findet sich, da $\varphi(0) = 2$ sein muss, augenblicklich

$$\varphi(x) = \sqrt{2 - \varphi(2x)}.$$

Nun ist aber auch, wenn $x = 45^\circ$, $\varphi(2x) = 0$, also $\varphi(45^\circ) = \sqrt{2} = 2\cos 45^\circ$, daher dann $\varphi\left(\frac{45}{2}\right)^\circ = \sqrt{2}\sqrt{1 - \cos 45^\circ} = 2\cos\left(\frac{45}{2}\right)^\circ$, und so folgt allgemein $\varphi\left(\frac{90}{2^m}\right)^\circ = 2\cos\left(\frac{90}{2^m}\right)^\circ$. Die Allgemeinheit der Gleichung $\varphi(x) = 2\cos x$ kann nun wohl auf eben die Weise dargethan werden, wie Herr Doctor Dippe es gezeigt hat.

§. 6.

Streng genommen würde uns nicht einmal das Parallelogramm zweier Eindrücke, auch wenn es noch so streng bewiesen wäre, zu einer vollständigen Begründung der Bewegungslehre führen, denn es giebt ja noch gar keine Ausführung für den Fall, wo mehr als zwei Eindrücke zusammenwirken, wenn man nicht annimmt, dass jedes beliebige Paar durch eben den Gesammteindruck sich ersetzen lasse, wenn es allein vorhanden wäre. Dieser Satz ist aber eine nothwendige Folge von dem in §. 4. aufgestellten Axiom, so dass also durch dieses die vollständige Entwickelung der Bewegungslehre vermittelt wird.

Die meisten Beweise für das Kräfteparallelogramm oder vielmehr alle, die von dem Poissonschen sich nur in der analytischen Behandlungsweise unterscheiden, machen jenen ersten Satz zur Voraussetzung. Hier meine ich aber diese Darstellungen vorzüglich desshalb tadeln zu müssen, dass sie gar keine Auskunft darüber geben, wie weit denn jener Grundsatz für die Demonstrationen des Kräfteparallegrammes ausreiche, und dass man nicht ins Klare darüber kommt, ob die zu Hülfe genommenen Axiome auch sämmtlich nothwendig waren. Der aus mehreren Eindrücken hervorgehende Gesammteindruck muss nach dem Gesetz der Naturnothwendigkeit vollkommen bestimmt sein, sowohl nach Intensität als auch nach der Richtung. Indem ich nun annehme, dass für zwei beliebige Eindrücke derjenige Gesammteindruck sich setzen lasse, den sie hervorbringen müssten, wenn sie allein wirkten, so genügt allerdings das Parallelogramm der Bedingung, dass bei jeder Combination derselbe Totaleindruck erhalten wird, aber es wäre ja auch

wohl möglich, dass nur das Parallelogramm dieser Bedingung genügte, und hierüber erhält man keine Auskunft.

Nun ist aber gleich klar, dass jenes Axiom nicht unmittelbar zum Kräfteparallelogramm führen kann, denn es wäre wohl möglich, dass nicht der Totaleindruck selbst, sondern eine gewisse Function desselben aus eben solchen Functionen der einzelnen Eindrücke nach dem Parallelogramm sich ableiten liesse, wie wenn man z. B. die $m$te Potenz der Resultante aus den $m$ten Potenzen der Componenten durch das Parallelogramm finden müsste. Wenn aber der Satz von der Summirung gleich gerichteter Eindrücke noch zu Hülfe genommen wird, so ist auch das Kräfteparallelogramm vollständig begründet. Man muss nämlich das Princip des §. 4. wenigstens für einen besondern Fall haben. Ich ordne nun den Beweis so:

1) Wenn mehr als zwei Eindrücke auf einen Körper wirken, so kann man, um den Gesammteindruck zu erhalten, für jede beliebige zwei denjenigen Totaleindruck setzen, den sie erzeugen würden, wenn sie allein wirkten.

2) Zwei gleiche entgegengesetzte Eindrücke heben sich vermöge des Satzes vom zureichenden Grunde auf, wenn sie allein wirken, also auch nach 1) in der Zusammenwirkung mit beliebigen anderen Eindrücken.

Wenn zwei Eindrücke einen Winkel mit einander machen, so folgt der Totaleindruck der Richtung keines von beiden, aber seine Richtung fällt immer in die Ebene der Seiteneindrücke.

Hieraus folgt mit Nothwendigkeit, dass wenn zwei Eindrücke auf einen Körper wirken, deren Richtungen in dieselbe Gerade fallen, die Richtung des Gesammteindruckes auch noch in diese Gerade fallen muss. Denn wenn die Eindrücke a, $-a$ und b nach derselben Geraden wirken, so ist der Gesammteindruck b und fällt in dieselbe Gerade, da a und $-a$ sich heben. Verbindet man nun erst b mit $-a$, so sei z der Totaleindruck und es mache derselbe mit der ersten Richtung den Winkel φ, wenn er mit ihr nicht zusammenfällt. Indem man nun wieder z mit a verbindet, entsteht nach 1) der Eindruck b, dessen Richtung mit der von a zusammenfällt. Daher kann auch nach 3) z mit a keinen Winkel machen, oder es ist $\varphi = 0$.

4) Wenn zwei gleiche Eindrücke unter einem beliebigen Winkel gegeben werden, so fällt die Richtung der Resultante allemal in die Linie, welche den Winkel der Componenten halbirt, entweder nach der einen oder nach der anderen Seite vom Scheitel. Dieses ist schon durch den Satz des zureichenden Grundes klar, obschon sich noch eine Art Beweis geben liesse.

5) Wenn zwei Eindrücke nach einerlei Richtung gegeben werden, so ist der Totaleindruck der Summe beider gleich und folgt derselben Richtung.

Daher muss nothwendig die Resultante zweier Eindrücke, die nach entgegengesetzten Richtungen gegeben werden, der Differenz beider gleich sein und der Richtung des Grösseren folgen. Denn hat man die Eindrücke b, a und $-a$, so ist b die Resultante. Verbindet man aber erst b und a, so entsteht $b+a$, und wenn noch $-a$ dazu kommt, so entsteht wieder b, d. h. $(b+a)-a$.

Nach dieser logischen Spielerei komme ich zur Demonstration des Parallelogrammes der Eindrücke. Man habe drei Eindrücke

a, b, c und es sei x der Winkel zwischen a und b, y der zwischen b und c. Welche Grösse und Richtung nun der aus a und b unter dem Winkel x entstehende Eindruck r auch haben mag, so lässt sich doch beides immer durch die Diagonale eines Parallelogrammes erhalten, wenn man nur die Componenten a und b gehörig abändert, ohne dass man desshalb auch statt des Winkels x einen andern zu setzen genöthigt ist. Gesetzt man müsse ma statt a und $m_1 b$ statt b setzen und es mache r mit b den Winkel l, so ist

$$6)\begin{cases} r \sin l = ma \sin x \\ r \cos l = ma \cos x + m_1 b. \end{cases}$$

Indem wir ferner r und c unter dem Winkel $l+y$ verbinden, um den Totaleindruck R für alle drei Componenten zu erhalten, müsse man, um nach dem Parallelogramm zu rechnen, $m_2 r$ statt r und $m_3 c$ statt c setzen. Macht R mit c den Winkel g, so hat man

$$R \sin g = m_2 r \sin(l+y)$$
$$R \cos g = m_2 r \cos(l+y) + m_3 c$$

oder wenn man $\sin(l+y)$ und $\cos(l+y)$ auflöst und statt $r \sin l$ und $r \cos l$ ihre Werthe aus 6) setzt:

$$7)\begin{cases} R \sin g = mm_2 a \sin(x+y) + m_1 m_2 b \sin y \\ R \cos g = mm_2 a \cos(x+y) + m_1 m_2 b \cos y + m_3 c. \end{cases}$$

Wir ändern nun die Ordnung der Verbindung. Indem c und b unter dem Winkel y verbunden werden, entstehe der Eindruck ϱ und es mache derselbe mit b den Winkel λ. Muss nun μc und $\mu_1 b$ statt c und b gesetzt werden, um nach dem Parallelogramm zu rechnen, so ist

$$8)\begin{cases} \varrho \sin \lambda = \mu c \sin y \\ \varrho \cos \lambda = \mu c \cos y + \mu_1 b, \end{cases}$$

und indem wir wieder ϱ und a unter dem Winkel $\lambda + x$ verbinden und, um nach dem Parallelogramm zu rechnen, $\mu_2 \varrho$ und $\mu_3 a$ statt ϱ und a setzen, erhalten wir, wenn R mit a den Winkel γ macht:

$$R \sin \gamma = \mu_2 \varrho \sin(\lambda + x)$$
$$R \cos \gamma = \mu_2 \varrho \cos(\lambda + x) + \mu_3 a,$$

woraus mit Hülfe von 8) folgt:

$$9)\begin{cases} R \sin \gamma = \mu\mu_2 c \,.\, \sin(x+y) + \mu_1 \mu_2 b \sin x \\ R \cos \gamma = \mu\mu_2 c \,.\, \cos(x+y) + \mu_1 \mu_2 b \cos x + \mu_3 a. \end{cases}$$

Weil aber $\gamma = x + y - g$, so findet man aus 9) nach dem bekannten Eliminationsverfahren:

$$10)\begin{cases} R \sin g = \mu_3 a \sin(x+y) + \mu_1 \mu_2 b \sin y \\ R \cos g = \mu_3 a \cos(x+y) + \mu_1 \mu_2 b \cos y + \mu\mu_2 c. \end{cases}$$

Aus 7) und 10) folgen nun die beiden Gleichungen, welche die Bedingung ausdrücken, dass nach beiden Combinationsfolgen doch einerlei Grösse und Richtung der Resultante herauskommen muss, nämlich:

$$11)\quad \begin{cases} mm_2 a \sin(x+y) + m_1 m_2 b \sin y = \mu_3 a \sin(x+y) + \mu_1 \mu_2 b \sin y \\ mm_2 a \cos(x+y) + m_1 m_2 b \sin y = \mu_3 a \sin(x+y) + \mu_1 \mu_2 b \sin y \\ \qquad + m_3 c \qquad\qquad\qquad\qquad + \mu\mu_2 c. \end{cases}$$

Die weiteren Bestimmungen aber gehen aus der anderen Bedingung in Grundsatz 1. hervor, dass nämlich die Grösse und Richtung der Resultante zweier Eindrücke von allen noch gegebenen Eindrücken unabhängig sein soll. Dieser Bedingung wird nur dadurch genügt, wenn in den Gleichungen 11) die Coefficienten gleicher Sinus und Cosinus gleich sind, nämlich wenn $mm_2 = \mu_3$, $m_1 m_2 = \mu_1 \mu_2$ und $m_3 = \mu\mu_2$ ist. Um aber dieses zu beweisen, müssen wir noch einen vierten Eindruck d zugeben, welcher mit c den Winkel z machen mag *). Um für diesen Fall den Totaleindruck P zu erhalten, hat man R und d unter dem Winkel $z + g$ zu verbinden. Es mache P mit d den Winkel h und man müsse, um nach dem Parallelogramm zu rechnen, $m_4 R$ statt R und $m_5 d$ statt d setzen, so hat man

$$P \sin h = m_4 R \sin(z + g).$$

Löst man hier $\sin(z + g)$ auf und setzt statt $R \sin g$ und $R \cos g$ einmal die Werthe aus 7), dann aber auch aus 10), so findet sich:

$$P \sin h = m_4 (mm_2 a \sin(x+y+z) + m_1 m_2 b \sin(y+z) + m_3 c \sin z)$$

und

$$P \sin h = m_4 (\mu_3 a \sin(x+y+z) + \mu_1 \mu_2 b \sin(y+z) + \mu\mu_2 c \sin z).$$

Darum hat man aber

$$12)\quad \begin{cases} mm_2 a \sin(x+y+z) + m_1 m_2 b \sin(y+z) + m_3 c \sin z \\ = \mu_3 a \sin(x+y+z) + \mu_1 \mu_2 b \sin(y+z) + \mu\mu_2 c \sin z \end{cases}$$

und diese Gleichung gilt für jeden Werth von z. Da aber kein m und μ nach Grundsatz 1. von z abhängt, so müssen die Coefficienten gleicher Sinus nothwendig gleich sein. Denn wenn man auch annehmen wollte, es wäre dem nicht so, so könnte man doch z so wählen, dass z. B.

$$mm_2 a \sin(x+y+z) + m_1 m_2 b \sin(y+z)$$
$$= \mu_3 a \sin(x+y+z) + \mu_1 \mu_2 b \sin(y+z)$$

---

*) Es würde hinreichen, die erste der Gleichungen 7) mit $\cos z$, die andere mit $\sin z$ zu multipliciren und die Producte zu addiren und dasselbe Verfahren auch bei den Gleichungen 10) anzuwenden. Ich wählte statt dieses Calculs die obige Darstellung, um zugleich seine Beziehung zur Sache nachzuweisen.

würde; man brauchte nur

$$tgz = -\frac{(mm_2 - \mu_3)a \sin(x+y) + (m_1 m_2 - \mu_1\mu_2)b \sin y}{(mm_2 - \mu_3)a \cos(x+y) + (m_1 m_2 - \mu_1\mu_2)b \cos y}$$

zu nehmen. Aber dann würde doch $\mu\mu_2 = \mu_3$ werden, und der Werth von z auf alle m und μ keinen Einfluss hat, so ist d Gleichung $\mu\mu_2 = m_3$ allgemein. Darum ist nun

$$13) \quad mm_2 = \mu_3,\ m_1 m_3 = \mu_1\mu_2,\ m_3 = \mu\mu_2$$

und dieses sind die Gleichungen, welche der Grundsatz 1. bedin Ich verlasse aber jetzt die allgemeine Betrachtung, weil es mei Absicht nicht ist, diesen Aufsatz mit weitläufigen Rechnungen füllen. Ich bringe vielmehr sogleich den Grundsatz 5. in Anwendun und setze zu dem Behufe den Winkel $x=0$, um b in die Ric von a zu bringen. Alsdann ist $a+b$ die Resultante von a und und es ist desshalb $m = m_1 = 1$, so dass die Gleichungen 13) folgende übergehen:

$$14) \quad m_2 = \mu_3,\ m_2 = \mu_1\mu_2,\ m_3 = \mu\mu_2.$$

Darnach ist $\frac{m_2}{m_3} = \frac{\mu_1}{\mu}$. Nehme ich aber noch $c = b$, so wird na Grundsatz 4. nothwendig $\mu_1 = \mu$ und daher $m_2 = m_3$. Davon der Sinn folgender: Bringt man an den beliebigen Ei drücken $a+b$ und b, die unter dem beliebigen Wink y wirken, die Factoren m_2 und m_3 an, um die Resultan nach dem Parallelogramm zu berechnen, so ist allem $m_2 = m_3$. Darum ist auch μ_1 in allen Fällen $= \mu$ und $\mu_3 = \mu$ und die Gleichungen 14) liefern folgende:

$$m_2 = \mu_2 \text{ und } m_2 = \mu\mu_2,$$

woraus $\mu_2 = m_2 = \mu = 1$ folgt. Hiermit ist aber das Parallel gramm der Eindrücke vollständig bewiesen.

Ich habe diesen Beweis nicht in der Meinung abgefasst, u damit meinen Vorgängern den Rang abzulaufen; meine Absicht ge vorzüglich nur auf die Erörterung der Principien der Wissenscha Für diessmal schliesse ich aber die Betrachtungen, um sie bei d nächsten Gelegenheit weiter fortzuführen.

XXII.

Lösung einer interessanten geometrischen Aufgabe.

Von dem

Herrn Professor Hessel

in Marburg.

Aufgabe.

Es ist gegeben ein Winkel A (Taf. IV. Fig. 3.) und ein Punkt a, der zwischen dessen Schenkeln irgendwo liegt; man soll die gerade Linie man ziehen, welche die kleinste der Linien ist, die durch den Punkt a so gezogen werden können, dass sie ihre Enden, wie m und n, in den Schenkeln von A haben.

Auflösung.

Es sei, in Taf. IV. Fig. 4., A der gegebene Winkel und a der gegebene Punkt, wie in Taf. IV. Fig. 3. Man ziehe zuerst durch a die $K'aK$ so, dass $\angle AK'a = AKa = k (= 90^\circ - \frac{1}{2}A)$ ist. Hierdurch wird $AK' = AK$. Man ziehe ferner durch a die iap senkrecht zu aK und die laq senkrecht zu AK'. Der Winkel Kan, den die gesuchte Linie man mit $K'aK$ macht, heisse φ, und die Winkel Anm und Amn mögen mit n und m bezeichnet werden. Es ist dann $n = k + \varphi$ und $m = k - \varphi$, und man hat:

$$1)\quad am = \frac{aq}{\sin m} = \frac{aq}{\sin(k-\varphi)},$$

$$2)\quad an = \frac{ap}{\sin n} = \frac{ap}{\sin(k+\varphi)};$$

also

$$3)\quad mn = am + an = \frac{aq}{\sin(k-\varphi)} + \frac{ap}{\sin(k+\varphi)}.$$

Das Differenzial von mn, wenn φ veränderlich ist, wird also sein

$$4)\quad d.mn = \left(\frac{aq.\cos(k-\varphi)}{\sin(k-\varphi)^2} - \frac{ap.\cos(k+\varphi)}{\sin(k+\varphi)^2}\right)d\varphi.$$

Setzen wir den Differentialquotienten $\frac{d.mn}{d\varphi} = 0$, so ist

$$5)\quad \frac{aq \,.\, \cos m}{\sin m^2} = \frac{ap \,.\, \cos n}{\sin n^2}$$

oder

$$6)\quad \frac{aq}{\sin m} \,.\, \cot m = \frac{ap}{\sin n} \,.\, \cot n,$$

und man erhält, wenn man statt $\frac{aq}{\sin m}$ und statt $\frac{ap}{\sin n}$ deren
the aus 1. und 2. setzt (während man ohne diesen Kunstgr
verwickelten Ausdrücken kommt), die äusserst einfache Gleicl

$$7)\quad am \,.\, \cot m = an \,.\, \cot n$$

oder

$$8)\quad am : an = \cot n : \cot m.$$

Wird nun As senkrecht zu mn angenommen, so ist ms
$= \cot m : \cot n$; es muss also

$$9)\quad ms : ns = an : am,$$

also

$$(ms + ns) : ns = (am + an) : am,$$

also, da $ms + ns = am + an = mn$ ist, auch

$$10)\quad am = ns,$$

mithin auch

$$an = ns$$

sein. Man hat sonach zur Bestimmung des Punktes s, mithin
a gegeben ist, zur Bestimmung der Lage der gesuchten
$masn$, folgende zwei Bestimmungsstücke:

I) s liegt so, dass $\angle asA$ ein rechter Winkel ist;

II) s liegt in der durch a gehenden gesuchten Linie ma
dass $ns = am$ ist.

Der ersten Bedingung entsprechen die Punkte des H
kreises $aspA$ über dem Durchmesser Aa.

Der zweiten Bedingung genügen die Punkte der Hype
$\sigma'' as' \sigma'' s \sigma \sigma'$ *), welche AK und AK' zu Asymptoten hat
durch den Punkt a geht; und diese ist gemäss der Gleic
$n's' = am'$, in welcher $n's'$ und am' die betreffenden Stücke
willkührlichen, durch a gelegten, die Hyperbel $as's$ in den
Punkten a und s' schneidenden Linie $m'n'$ bedeuten, sehr leicl
construiren.

Der Punkt s in der gesuchten Linie $masn$ ist also
Durchschnittspunkt jenes Kreises mit dieser Hyperb

Da nun allgemein für jede durch a gehende Linie $m'n'$
den Gleichungen 1. und 2.

$$am' = \frac{aq}{\sin (k - q')} \text{ und } an' = \frac{ap}{\sin (k + q')},$$

---

*) Vergleiche Burg Artikel Hyperbel.

st der veränderliche Radius as' der hier erwähnten Hyperbel immt durch die Gleichung

$$11)\quad as' = \frac{ap}{\sin(k+\varphi')} - \frac{aq}{\sin(k-\varphi')},$$

φ' den veränderlichen Winkel bedeutet, den as' mit der Basis K' des gleichschenklichen Dreiecks $AK'K$ macht.

XXIII.

Zur Theorie der Kegelschnitte.

Von

Herrn C. Adams,

Lehrer der Mathematik an der Gewerbschule zu Winterthur.

Herr Dr. Schlömilch zu Jena beweist im 3ten Bande des Archivs S. 386. einige Sätze von Sechsecken, welche in oder um einen Kegelschnitt beschrieben sind. Seine Beweise stützen sich auf die Theorie der projektivischen Gebilde, auf jene schönen Sätze, welche Steiner in seiner „Abhängigkeit geometrischer Gestalten" in strenger systematischer Folgerichtigkeit entwickelt hat. — Es dürfte nun für die Leser des Archivs nicht uninteressant sein, zur Vergleichung der verschiedenen Methoden in der Beweisführung dieselben Sätze auf andere Weise, nämlich mit Hülfe der Transversalen bewiesen zu sehen, sei es auch nur, um auf die Wichtigkeit dieser Lehre von Neuem aufmerksam zu werden. — Die Sätze, die ich als bekannt voraussetze, und deren Beweise in Carnot, Poncelet, Steiner, Plückers analytisch geometrischen Entwickelungen oder auch in meiner eigenen „Lehre von den Transversalen" nachgesehen werden können, sind folgende:

1) Wenn die Seiten eines Dreiecks oder auch ihre Verlängerungen von einer beliebigen geradlinigen Transversale geschnitten werden, so theilt diese Transversale jede Seite des Dreiecks in zwei solche Abschnitte, dass das Product aus drei nicht an einander liegenden Abschnitten gleich ist dem Producte der drei anderen.

2) Umgekehrt werden auf zwei Seiten eines Dreiecks und der Verlängerung der dritten Seite oder auch auf den Verlängerungen aller drei Seiten drei Punkte so angenommen, dass das Product aus drei nicht an einander liegenden Abschnitten der Seiten gleich

ist dem Producte der drei anderen, so liegen diese Punkte in g der Linie.

3) Wenn zwei Dreiecke eine solche Lage haben, dass die bindungslinien ihrer Ecken je zwei und zwei in demselben Pu zusammenlaufen, so liegen die Durchschnittspunkte ihrer ent chenden Seiten in gerader Linie.

4) Umgekehrt, wenn zwei Dreiecke eine solche Lage ha dass die Durchschnittspunkte von je zwei entsprechenden Seite gerader Linie liegen, so schneiden sich die Verbindungslinien entsprechenden Ecken in einem und demselben Punkte.

5) Wenn die Seiten eines Dreiecks von einem beliebigen gelschnitte geschnitten werden, so entstehen auf jeder Seite Abschnitte, welche eine solche Beziehung zu einander haben, das Product der einen Hälfte gleich ist dem Producte der and Hälfte, vorausgesetzt, dass in einem und demselben Producte solche Abschnitte vorkommen, welche einen Punkt des Kegelsch zum gemeinsamen Endpunkt haben.

6) Der Durchschnitt zweier Polaren in Bezug auf irgend Kegelschnitt ist der Pol für die Verbindungslinie der Pole j Polaren.

7) Liegen mehrere Punkte in gerader Linie, so schneiden ihre Polaren für irgend einen beliebigen Kegelschnitt in einem demselben Punkte, dem Pol jener Geraden.

8) In jedem einem Kegelschnitte einbeschriebenen Sechs liegen die drei Durchschnittspunkte der gegenüber liegenden ten in gerader Linie.

9) In jedem einem Kegelschnitte umschriebenen Sechsecke sc den sich die drei Diagonalen, welche die gegenüber liegenden E verbinden, in einem und demselben Punkte.

Die Lehrsätze des Herrn Dr. Schlömilch sind nun folgend

I) Wenn man in einem dem Kegelschnitte einbeschrieb Sechsecke $ABCDEF$ die drei Hauptdiagonalen AD, BE, zieht, von welchen eine jede das Sechseck in zwei Vierecke tl und sodann in diesen Vierecken die der Hauptdiagonale des Se ecks gegenüber liegende Seite bis zum Durchschnitt mit dieser gonale verlängert, so erhält man sechs Durchschnittspunkte M' P', M'', N'', P'', von denen sowohl die drei ersten als die letzten in gerader Linie liegen.

Beweis. Taf. IV. Fig. 5. Man betrachte drei nicht an ei der anstossende Seiten AB, CD, EF einzeln als Transver des Dreiecks abc, so hat man nach Lehrsatz 1.:

$$aM'.bA.cB=aB.bM'.cA$$
$$aC.bD.cP'=aP'.bC.cD$$
$$aF.bN'.cE=aE.bF.cN'.$$

Multiplicirt man diese drei Gleichungen in einander, so erhält

$$\text{(I)}\quad aM'.bN'.cP'.aC.aF.bA.bD.cB.cE$$
$$=aP'.bM'.cN'.aB.aE.bC.bF.cA.$$

Nun ist aber nach Lehrsatz 5.:

$$\text{(II)}\quad aC.aF.bA.bD.cB.cE=aB.aE.bC.bF.cA.c$$

Dividirt man (I) durch (II), so erhält man:

$$aM'.bN'.cP' = aP'.bM'.cN'.$$

Da nun die Punkte M', N', P' einzeln auf den Seiten des)reiecks abc liegen, so sind dieselben nach Lehrsatz 2. in gerader .inie. Ebenso wird bewiesen, dass die Punkte M'', N'', P'' in ge- ıder Linie liegen.

II) Die Gerade MN, welche nach Lehrsatz 6. die Durchschnitts- ınkte der drei Paare gegenüber liegender Seiten verbindet, geht ıgleich durch den Durchschnitt der im vorigen Lehrsatze erwähnten eraden $M'N'$ und $M''N''$.

Beweis. Bezeichnet man die Durchschnitte von BE und CF, F und DE, AB und CD einzeln mit a, d, f, so sind wegen s einbeschriebenen Sechsecks $AFCDEB$ diese Punkte in gera- r Linie (Lehrsatz 6.). In denselben drei Punkten a, d, f schnei- n sich zugleich die Seiten der Dreiecke $M'M''M$ und $P'P''P$; thin gehen nach Lehrsatz 4. die Verbindungslinien ihrer Ecken, h. die Geraden $M'P'$, $M''P''$, MP, durch einen und denselben ınkt. Denkt man sich durch die Ecken des Sechsecks $ABCDEF$ ıngenten an den Kegelschnitt gezogen, so erhält man ein um- hriebenes Sechseck, das mit dem einbeschriebenen im Verhältniss r polaren Reciprocität steht; die Anwendung der Sätze 6. und 7. ıf die beiden letzten Sätze führt demnach zu folgendem Satze:

III) Wenn man in einem dem Kegelschnitte umschriebenen echsecke die gegenüber liegenden Seiten verlängert, bis sie sich ızeln in drei Punkten durchschneiden, und man zieht von jedem ieser Durchschnittspunkte Gerade nach den beiden übrigen Ecken es Sechsecks, so schneiden sich von diesen sechs Geraden drei ıd drei in einem und demselben Punkte, und diese beiden neuen 'unkte liegen mit dem Durchschnitte der drei Hauptdiagonalen des echsecks (Lehrsatz 9.) in einer und derselben Geraden.

IV) Verlängert man in einem dem Kegelschnitte einbeschriebe- en Sechsecke diejenigen Diagonalen, welche von demselben ein Dreieck abschneiden, und bestimmt die Durchschnitte Q, R, S je weier gegenüber liegenden Diagonalen dieser Art, so liegen je wei dieser Durchschnitte mit einem der Durchschnitte M, N, P der Gegenseiten des Sechsecks in einer und derselben Geraden.

Beweis. Da die Durchschnitte g, a, h der Gegenseiten des Sechsecks $ACFDBE$ in gerader Linie liegen, so haben die Drei- ecke EFh und BCg die in Lehrsatz 3. bezeichnete Lage; mithin liegen nach demselben Satze die Durchschnitte N, R, Q ihrer ent- sprechenden Seiten in gerader Linie. — Eben so wird bewiesen, dass die Punkte

$$M,\quad Q,\quad S$$
$$P,\quad R,\quad S$$

einzeln in gerader Linie liegen.

Die Anwendung der Sätze 6. und 7. auf IV) führt noch zu fol- em Satze:

V) Verlängert man in einem dem Kegelschnitte umschriebenen secke die erste, dritte und fünfte Seite, bis sie unter sich ein ck bilden, eben so die zweite, vierte und sechste Seite, bis

auch diese ein Dreieck bilden, so schneiden sich die Verbindung-
linien der gegenüber liegenden Ecken dieser Dreiecke je zwei u
zwei auf den drei Diagonalen des Sechsecks.

Der Beweis dieses Satzes kann auch direkt aus dem Brian-
chon'schen Satze (Lehrsatz 9.) hergeleitet werden. Siehe mein
Lehre der Transversalen, Lehrsatz LXXXIII.

XXIV.

Ueber die Reihen, welche den Cosinus und Sinus durch Potenzen des Bogens ausdrücken.

Von

Herrn Doctor O. Schlömilch,

Privatdocenten an der Universität zu Jena.

In den Supplementen zu Klügels mathematischen Wörterbuch
gründet der Herr Herausgeber des Archivs den Beweis der Reihen

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots,$$

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots$$

auf die folgenden rein goniometrischen Sätze:

$$\left.\begin{aligned}\cos n\Theta = n_0 - n_2(2\sin\tfrac{1}{2}\Theta)^2\cos\tfrac{2}{2}\Theta + n_4(2\sin\tfrac{1}{2}\Theta)^4\cos\tfrac{4}{2}\Theta - \ldots\\ - n_1(2\sin\tfrac{1}{2}\Theta)\sin\tfrac{1}{2}\Theta + n_3(2\sin\tfrac{1}{2}\Theta)^3\sin\tfrac{3}{2}\Theta - \ldots\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned}\sin n\Theta = n_1(2\sin\tfrac{1}{2}\Theta)\cos\tfrac{1}{2}\Theta - n_3(2\sin\tfrac{1}{2}\Theta)^3\cos\tfrac{3}{2}\Theta + \ldots\\ - n_2(2\sin\tfrac{1}{2}\Theta)^2\sin\tfrac{2}{2}\Theta + n_4(2\sin\tfrac{1}{2}\Theta)^4\sin\tfrac{4}{2}\Theta - \ldots\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

in welchen n eine positive ganze Zahl sein muss und n_0, n_1
u. s. w. die Binomialcoefficienten des Exponenten n bedeuten. D
ser Beweis der Cosinus- und Sinusreihen hat die grossen Vorz
ebensowohl von der Anwendung imaginärer Grössen, als von
Methode der unbestimmten Coefficienten frei zu sein, sobald
die Gültigkeit der Gleichungen (1) und (2) auf elementarem W

nachgewiesen hat. Diess geschieht a. a. O. mittelst des Schlusses von n auf $n+1$, welcher bei aller Evidenz doch das Unangenehme hat, dass man nicht weiss, wie man zu jenen Gleichungen gelangt ist. Es dürfte daher nicht überflüssig sein, eine elementare Ableitung derselben mitzutheilen.

In einem früheren Aufsatze über die Binomialcoefficienten, Archiv I. Theil, S. 431. u. f. habe ich gezeigt, dass man auf elementarem Wege, durch ein Verfahren, welches mit dem der Differenzenrechnung Aehnlichkeit hat, zu folgenden Gleichungen gelangen kann:

$$(2\cos x)^m . \cos mx = m_0 \cos 2mx + m_1 \cos(2m-2)x + m_2 \cos(2m-4)x + \ldots\ldots$$

oder, weil $m_0 = m_m$, $m_1 = m_{m-1}$, $m_2 = m_{m-2}$ u. s. w. ist:

$$(2\cos x)^m \cos mx = m_0 + m_1 \cos 2x + m_2 \cos 4x + \ldots . \quad (3)$$

und ebenso:

$$(2\cos x)^m \sin mx = m_1 \sin 2x + m_2 \sin 4x + m_3 \sin 6x + \ldots . \quad (4)$$

welche für $x = \frac{\pi - u}{2}$ in die folgenden übergehen:

$$(2\sin \frac{u}{2})^m \cos \frac{m(\pi-u)}{2} = m_0 - m_1 \cos u + m_2 \cos 2u - \ldots . \quad (5)$$

$$(2\sin \frac{u}{2})^m \sin \frac{m(\pi-u)}{2} = m_1 \sin u - m_2 \sin 2u + m_3 \sin 3u - \ldots . \quad (6)$$

In der Reihe (5) setzen wir nun m successive $= 0, 1, 2, 3 \ldots .$ bis zu einer beliebigen Zahl n und multipliciren die entstehenden Gleichungen mit $+n_0$, $-n_1$, $+n_2$, $-n_3$ u. s. w., so kommt:

$$n_0 = +n_0$$

$$-n_1(2\sin\tfrac{1}{2}u) \sin\tfrac{1}{2}u = -n_1(1_0 - 1_1 \cos u)$$

$$-n_2(2\sin\tfrac{1}{2}u)^2 \cos\tfrac{2}{2}u = +n_2(2_0 - 2_1 \cos u + 2_2 \cos 2u)$$

$$+n_3(2\sin\tfrac{1}{2}u)^3 \sin\tfrac{3}{2}u = -n_3(3_0 - 3_1 \cos u + 3_2 \cos 2u - 3_3 \cos 3u)$$

$$+n_4(2\sin\tfrac{1}{2}u)^4 \cos\tfrac{4}{2}u = +n_4(4_0 - 4_1 \cos u + 4_2 \cos 2u - 4_3 \cos 3u + 4_4 \cos 4u)$$

. . . .

$$\pm n_n(2\sin\tfrac{1}{2}u)^n \cos\frac{n(\pi-u)}{2} = \pm n_n(n_0 - n_1 \cos u + n_2 \cos 2u - \ldots . \pm n_n \cos nu).$$

[We]nn wir jetzt Alles addiren und die Glieder auf der rechten Seite [nac]h den Cosinus ordnen, so wird:

$$\left.\begin{array}{l} n_0 - n_2(2\sin\tfrac{1}{2}u)^2\cos\tfrac{2}{2}u + n_4(2\sin\tfrac{1}{2}u)^4\cos\tfrac{4}{2}u - \ldots \\ \quad - n_1(2\sin\tfrac{1}{2}u)\ \sin\tfrac{1}{2}u + n_3(2\sin\tfrac{1}{2}u)^3\sin\tfrac{3}{2}u - \ldots \\ = n_0 - n_1 + n_2 - n_3 + \ldots \\ \quad + \cos u(n_1.1_1 - n_2.2_1 + n_3.3_1 - n_4.4_1 + \ldots) \\ \quad + \cos 2u(n_2.2_2 - n_3.3_2 + n_4.4_2 - n_5.5_2 + \ldots) \\ \quad + \cos 3u(n_3.3_3 - n_4.4_3 + n_5.5_3 - n_6.6_3 + \ldots) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \cos nu\,.\,n_n\,.\,n_n \end{array}\right\} \quad (7)$$

Der Coefficient eines Cosinus $\cos pu$, wo p eine positive ganze Zahl ist, würde sein

$$n_p\,.\,p_p - n_{p+1}(p+1)_p + n_{p+2}(p+2)_p - \ldots . \quad (8)$$

Die Summe dieser Reihe ist sehr leicht zu finden. Man bemerke zunächst, dass für ganze positive m und r immer $m_r = m_{m-r}$, mithin die obige Reihe auch gleich der folgenden ist:

$$n_p\,.\,p_0 - n_{p+1}(p+1)_1 + n_{p+2}(p+2)_2 - \ldots .$$

Drückt man hier n_{p+1}, n_{p+2} u. s. w. durch n_p aus und setzt für p_0, $(p+1)_1$, $(p+2)_2$ u. s. w. ihre Werthe, so ist unsere Reihe auch

$$= n_p[1 - \frac{n-p}{p+1}\,.\,\frac{p+1}{1} + \frac{(n-p)(n-p-1)}{(p+1)(p+2)}\,.\,\frac{(p+2)(p+1)}{1.2} - \ldots]$$

$$= n_p[1 - \frac{n-p}{1} + \frac{(n-p)(n-p-1)}{1.2} - \ldots]$$

Die Grössen innerhalb der Klammer sind aber nichts Anderes, als die successiven Binomialcoefficienten des Exponenten $n-p$. Das Aggregat derselben mit wechselnden Zeichen genommen ist Null, sobald $n > p$ ist. Wir haben daher auch in (8):

$$0 = n_p\,.\,p_p - n_{p+1}(p+1)_p + n_{p+2}(p+2)_p - \ldots,\ n > p.$$

Substituiren wir diess Resultat in die Gleichung (7) für $p = 0$, $1, 2, 3, \ldots, n-1$, so findet sich, dass die Coefficienten von $\cos 0u$, $\cos u$, $\cos 2u$, ... $\cos(n-1)u$ sämmtlich $= 0$ sind. Der Coefficient des letzten Gliedes dagegen, worin $n = p$ ist, wird 1, und folglich geht die Gleichung (7) in die einfachere über:

$$\left.\begin{array}{l} n_0 - n_2(2\sin\tfrac{1}{2}u)^2\cos\tfrac{2}{2}u + n_4(2\sin\tfrac{1}{2}u)^4\cos\tfrac{4}{2}u - \ldots \\ \quad - n_1(2\sin\tfrac{1}{2}u)\ \sin\tfrac{1}{2}u + n_3(2\sin\tfrac{1}{2}u)^3\sin\tfrac{3}{2}u - \ldots \\ \qquad = \cos nu \end{array}\right\} \quad (9)$$

Behandelt man ebenso die Gleichung (6), so ergiebt sich:

$$\left.\begin{array}{l} n_1(2\sin\tfrac{1}{2}u)\cos\tfrac{1}{2}u - n_3(2\sin\tfrac{1}{2}u)^3\cos\tfrac{3}{2}u + \ldots \\ - n_2(2\sin\tfrac{1}{2}u)^2\sin\tfrac{2}{2}u + n_4(2\sin\tfrac{1}{2}u)^4\sin\tfrac{4}{2}u - \ldots \\ = \sin nu \end{array}\right\} (10)$$

Diese Gleichungen sind es, deren Ableitung gegeben werden sollte und welche für $n = \Theta$ in die a. a. O. gebrauchten übergehen.

Die Entwickelung der Cosinus und Sinusreihen aus denselben ist in kurzer Andeutung folgende. Man nehme in Formel (9) $nu = x$, also $n = \frac{x}{u}$, und setze diess in die Werthe von

$$n_1 = \frac{n}{1},\ n_2 = \frac{n(n-1)}{1.2},\ n_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}, \ldots$$

so wird:

$$\cos x = 1 - \frac{x(x-u)}{1.2}\left(\frac{2\sin\frac{1}{2}u}{u}\right)^2\cos\tfrac{2}{2}u$$
$$+ \frac{x(x-u)(x-2u)(x-3u)}{1.2.3.4}\left(\frac{2\sin\frac{1}{2}u}{u}\right)^4\cos\tfrac{4}{2}u - \ldots$$
$$- n_1\frac{x}{1}\left(\frac{2\sin\frac{1}{2}u}{u}\right)\sin\tfrac{1}{2}u$$
$$+ \frac{x(x-u)(x-2u)}{1.2.3}\left(\frac{2\sin\frac{1}{2}u}{u}\right)^3\sin\tfrac{3}{2}u - \ldots$$

Dabei sind x und u im Ganzen beliebig und nur der Bedingung unterworfen, dass $\frac{x}{u}$ eine ganze positive Zahl ist, welche aber von willkührlicher Grösse sein kann. Zugleich ist klar, dass die Reihe um so mehr Glieder haben wird, je kleiner u, d. h. je grösser $\frac{x}{u}$ ist. Die Reihe (9) hat nämlich $n+1$ Glieder, folglich die obige $\frac{x}{u}+1$ Glieder, eine Anzahl, die immer zunimmt, je kleiner u wird. Lassen wir endlich u zur Gränze 0 übergehen, so ist

$$\text{Lim}\,\frac{2\sin\frac{1}{2}u}{u} = \text{Lim}\,\frac{\sin\frac{1}{2}u}{\frac{1}{2}u} = 1,$$

folglich auch

$$\text{Lim}\left(\frac{2\sin\frac{1}{2}u}{u}\right)^m = 1;$$

ferner haben wir dann

$$\cos\tfrac{2}{2}u = \cos\tfrac{4}{2}u \text{ u. s. w. } \ldots = 1$$
$$\sin\tfrac{1}{2}u = \sin\tfrac{3}{2}u \text{ u. s. w. } \ldots = 0,$$

und wenn wir auch in den Coefficienten $u = 0$ nehmen:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots \quad (11)$$

und diese Reihe ist jetzt eine unendliche, weil die Gliederanzahl $\frac{x}{u}+1$ unendlich geworden ist.

Durch Anwendung des nämlichen Verfahrens auf die Gleichung (10) erhält man ebenso leicht:

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots \quad (12)$$

Im systematischen Vortrage der Analysis bietet die vorige Darstellung den Vortheil dar, dass sie den natürlichsten Uebergangspunkt in das Gebiet der imaginären Grössen bildet. Man kennt schon die Reihen

$$\frac{e^{\alpha x}+e^{-\alpha x}}{2} = 1 - \frac{\alpha^2 x^2}{1.2} + \frac{\alpha^4 x^4}{1.2.3.4} - \ldots$$

$$\frac{e^{\alpha x}-e^{-\alpha x}}{2\alpha} = \frac{x}{1} - \frac{\alpha^2 x^3}{1.2.3} + \frac{\alpha^4 x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots$$

und braucht in denselben nur $\alpha = \sqrt{-1}$ zu nehmen, um sogleich zu den Formeln zu gelangen:

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}}{2} = \cos x, \quad \frac{e^{x\sqrt{-1}}-e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \sin x,$$

aus welchen man wieder die folgenden:

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\sin x, \quad e^{-x\sqrt{-1}} = \cos x - \sqrt{-1}\sin x$$

ableitet. Setzt man hierauf μx für μ, so ergiebt sich ganz allgemein für jedes μ die Gleichung:

$$(\cos x \pm \sqrt{-1}\sin x)^{\mu} = \cos \mu x \pm \sqrt{-1}\sin \mu x,$$

von der man gewöhnlich auszugehen pflegt, um die Cosinus und Sinusreihe aufzufinden.

XXV.

Nachtrag zu der Abhandlung Thl. V. No. XVIII.

Von

Herrn Fr. Seydewitz,

Oberlehrer am Gymnasium zu Heiligenstadt.

Nachdem die Abhandlung Th. V. No. XVIII. schon abgedruckt war, hat mir der Herr Verfasser dieser Abhandlung den folgenden, nach seiner eigenen Aeusserung „zwei wesentliche Verbesserungen" enthaltenden Nachtrag zu derselben gesandt, und rücksichtlich derselben die Bestimmung gegeben, dass die mit A. bezeichnete Verbesserung die Stelle von §. 6. 1 — 2 (exclus.), und die mit B. bezeichnete Verbesserung die Stelle der unmittelbar auf §. 7. 3. folgenden Betrachtung und der Sätze 4. und 5. einnehmen soll.

G.

A.

1. **Wenn in einer Ebene zwei Involutionen von Punkten und ausserdem ein beliebiger Punkt gegeben sind, einen Kegelschnitt zu finden, welcher durch diesen Punkt geht, und für welchen die zugeordneten Punktenpaare jener beiden Involutionen zugeordnete harmonische Pole sind.**

Auflösung. Sind die Gebilde beider Involutionen ungleichliegend, so suche man deren Hauptpunkte und sofort einen Kegelschnitt $\mathfrak{A}$, welcher durch diese vier und durch den gegebenen Punkt geht; so ist $\mathfrak{A}$ der verlangte. In jedem anderen Falle dagegen verbinde man den gegebenen Punkt B mit zwei zugeordneten Punktenpaaren $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}'$; $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}'$ und $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}'_1$; $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}'_1$ einer jeden der zwei gegebenen Involutionen

1. **Wenn in einer Ebene zwei Involutionen von Strahlen und ausserdem eine beliebige Gerade gegeben sind, einen Kegelschnitt zu finden, welcher diese Gerade berührt, und für welchen die zugeordneten Strahlenpaare jener beiden Involutionen zugeordnete harmonische Polaren sind.**

Auflösung. Sind die Gebilde beider Involutionen ungleichliegend, so suche man deren Hauptstrahlen und sofort einen Kegelschnitt $\mathfrak{A}$, welcher diese vier und die gegebene Gerade berührt; so ist $\mathfrak{A}$ der verlangte. In jedem anderen Falle dagegen suche man auf der gegebenen Geraden A das gemeinschaftliche Paar zugeordneter Punkte zweier Involutionen, welche durch die Durchschnitte $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}'$; $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}'$ und $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}'_1$;

durch die Geraden a, a'; b, b' und a_1, a'_1; b_1, b'_1 und suche das gemeinschaftliche Paar zugeordneter Strahlen e, e' zweier Involutionen, welche durch a, a'; b, b' und a_1, a'_1; b_1, b'_1 bestimmt werden; so sind diese Strahlen e, e' nach §. 3. 5. nothwendig vorhanden. Sodann suche man in den gegebenen Involutionen diejenigen Punkte $\mathfrak{q}, \mathfrak{q}_1$, welche dem Durchschnitte p ihrer Richtungslinien S, S_1 zugeordnet sind, verbinde diese Punkte mit einander durch eine Gerade P und die Punkte B_1, B_2, wo P von e, e' geschnitten wird, mit je zwei zugeordneten Punktenpaaren $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}'$; $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}'$; $\mathfrak{c}, \mathfrak{c}'$; $\mathfrak{d}, \mathfrak{d}'$ .... irgend einer der gegebenen Involutionen durch die Geraden a_1, a_2; b_1, b_2; c_1, c_2; d_1, d_2 ....; so schneiden sich die letzteren paarweise auf dem Umfange des verlangten Kegelschnittes $\mathfrak{A}$.

$\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}'_1$ der Geraden zugeordneten Strahl a'; b, b' und a_1, a' ner jeden der zwe Involutionen bestim so sind diese Punkt §. 3. 5. nothwendig Sodann suche man i benen Involutionen Strahlen q, q_1, wel bindungslinie P ihrer s, s_1 zugeordnet si den Durchschnitt p len q, q_1 mit den I durch die Geraden endlich die Punkte $\mathfrak{a}$ $\mathfrak{a}'_1, \mathfrak{b}'_1, \mathfrak{c}'_1, \mathfrak{d}'_1$ ...., den Strahlen a, b, b', c', d' .... irgend gebenen Involutionen wird, mit den en Punkten $\mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{c}_2, \mathfrak{d}$ $\mathfrak{c}'_2, \mathfrak{d}'_2$ ...., wo A_2 geordneten Strahlen a, b, c, d .... ders tion geschnitten wir rade Linien, so si Tangenten des ver gelschnittes $\mathfrak{A}$.

Beweis (links). Da $B_1(a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots.) \equiv S(\mathfrak{a}$ $\equiv S'(\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}', \mathfrak{d}' \ldots.) \equiv B_2(a_2, b_2, c_2, d_2 \ldots.)$ ist, so

$$B_1(a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots.) = B_2(a_2, b_2, c_2, d_2 \ldots$$

also liegen die Punkte B_1, B_2 und die Durchschnitte b_1, b_2 .... auf einem Kegelschnitte $\mathfrak{A}$; und da auch B_1B_2, B_2p; B_1p, B_2B_1; e, e' entsprechende Strahl B_1, B_2 sind, so muss $\mathfrak{A}$ die Geraden B_2p und B_1p i ten B_2, B_1 berühren und auch durch den Punkt B dient man sich zur Construction von $\mathfrak{A}$ der Punktenpa $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}'_1$; $\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}'_1$; $\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}'_1$ ...., so fällt der neue Kegelsch vorigen zusammen, indem beide den Punkt B, die Tan B_2p und deren Berührungspunkte gemein haben. Da harmonische Pol von P für $\mathfrak{A}$ ist, also P durch die h Pole von S, S_1 für $\mathfrak{A}$ geht, so sind nach §. 4. 2. die P $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}'$; $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}'$; $\mathfrak{c}, \mathfrak{c}'$; $\mathfrak{d}, \mathfrak{d}'$ .... und $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}'_1$; $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}'_1$; $\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}'_1$; zugeordnete harmonische Pole für $\mathfrak{A}$.

Vertauscht man den Punkt B links und die Gera nach und nach mit anderen Punkten und Geraden, ohn benen Involutionen zu ändern, so erhält man links ein Kegelschnitten mit zwei zugeordneten gemeinschaftlich S, S_1, und rechts eines mit zwei zugeordneten gemein Tangentendurchschnitten s, s_1, welche reell oder ideal s

dem die gegebenen Involutionen aus ungleichliegenden oder aus gleichliegenden Gebilden bestehen. Jeder Punkt oder jede Gerade in der Ebene eines solchen Systemes gehört einem der dazu gehörigen Kegelschnitte an; hieraus und aus §. 5. ergiebt sich:

2. 2.

B.

Eine beliebige Gerade A werde von der gemeinschaftlichen Sekante S der Kegelschnitte $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ .... im Punkte $\mathfrak{s}$, und von den harmonischen Polaren a', b', c', d' .... ihres gemeinschaftlichen Tangentendurchschnittes s in den Punkten $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ .... geschnitten, wobei vorausgesetzt wird, dass a', b', c', d' .... durch einerlei Punkt p gehen; es seien a, b, c, d .... die harmonischen Polaren der Punkte $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ .... für $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ ...., welche also sämmtlich durch s gehen müssen; und a_1, b_1, c_1, d_1 .... seien die Strahlen, welche von s nach $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ .... gehen; endlich seien a'', b'', c'', d'' .... die harmonischen Polaren des Punktes $\mathfrak{s}$ für $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ ...., welche also sämmtlich durch einerlei Punkt B'' der gemeinschaftlichen Sekante S und einzeln durch die harmonischen Pole $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ .... von S für $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ .... gehen müssen. Diess vorausgesetzt, so schneiden sich je zwei Strahlen a, a''; b, b''; c, c''; d, d'' .... im harmonischen Pole der Geraden A für $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ .... Aber die Strahlen a, b, c, d .... bilden einen Strahlbüschel s oder B, welcher mit dem von a_1, b_1, c_1, d_1 .... gebildeten Strahlbüschel B_1 involutorisch ist, indem je zwei Strahlen a, a_1; b, b_1 .... zugeordnete harmonische Polaren von s für sämmtliche Kegelschnitte sind; der letztere wieder ist mit dem von a', b', c', d' .... gebildeten, p oder B', perspectivisch, und dieser zufolge des vorigen Satzes mit dem von a'', b'', c'', d'' .... gebildeten, B'', projectivisch; also ist auch $B(a, b, c, d \ldots.) = B''(a'', b'', c'', d'' \ldots.)$. Bedenkt man nun noch, indem man die Durchschnitte von S und derjenigen Strahlen von B, welche den Strahlen sp, $s\mathfrak{s}$ des Strahlbüschels B_1 entsprechen, mit q, $\mathfrak{s}_1$ bezeichnet, dass in den Strahlbüscheln B, B_1, B', B'' der Reihe nach sich die Strahlen sq, sp, sp, $B''s$ und $s\mathfrak{s}_1$, $s\mathfrak{s}$, $p\mathfrak{s}$, $B''\mathfrak{s}$ entsprechen, so erhält man links, und ähnlicher Weise rechts, den Satz:

4. Hat eine Schaar von Kegelschnitten eine reelle oder ideale Sekante und einen reellen oder idealen Tangentendurchschnitt gemein,

so liegen a) die harmonishen Pole einer beliebigen Geraden ihrer Ebene in Bezug auf alle diese Kegelschnitte auf den Umfängen zweier Kegelschnitte, welche die gemeinschaftliche Sekante in den nämlichen zwei Punkten schneiden, und welche beide durch den gemeinschaftlichen Tangentendurchschnitt gehen. Der

so umhüllen a) die harmonischen Polaren eines beliebigen Punktes ihrer Ebene in Bezug auf alle diese Kegelschnitte zwei neue Kegelschnitte, welche die nämlichen zwei Strahlen des gemeinschaftlichen Tangentendurchschnittes und beide die gemeinschaftliche Sekante berühren. Der eine von jenen zwei Strahlen ist die der Verbindungs-

eine von jenen zwei Punkten ist der dem Durchschnitte jener Geraden und der gemeinschaftlichen Sekante zugeordnete harmonische Pol; der andere liegt auf demjenigen Strahle des gemeinschaftlichen Tangentendurchschnittes, dessen zugeordnete harmonische Polare nach jenem Durchschnitte geht. Der eine dieser beiden Kegelschnitte berührt im gemeinschaftlichen Tangentendurchschnitte die eine, der andere die andere der beiden Geraden, welche die harmonischen Pole der gemeinschaftlichen Sekante für die betreffenden Gruppen von Kegelschnitten enthalten. Daher haben b) alle Kegelschnitte, welche den verschiedenen Geraden in der Ebene der ersten Schaar entsprechen, einen und denselben Punkt gemein und berühren in diesem Punkte die eine oder die andere von zwei festen Geraden. c) Unter diesen befinden sich auch zwei Kegelschnitte, welche, indem sie der unendlich-entfernten Geraden der Ebene entsprechen, die Mittelpunkte aller Kegelschnitte der ersten Schaar enthalten.

linie jenes Punktes und des gemeinschaftlichen Tangentendurchschnittes zugeordnete harmonische Polare; der andere geht nach demjenigen Punkte der gemeinschaftlichen Sekante, dessen zugeordneter harmonischer Pol auf jener Verbindungslinie liegt. Der eine dieser beiden Kegelschnitte berührt die gemeinschaftliche Sekante in dem einen, der andere in dem anderen der beiden Punkte, in welchen die harmonischen Polaren des gemeinschaftlichen Tangentendurchschnittes für die betreffenden Gruppen von Kegelschnitten convergiren. Daher haben b) alle Kegelschnitte, welche den verschiedenen Punkten in der Ebene der ersten Schaar entsprechen, eine und dieselbe Tangente gemein und berühren dieselbe in dem einen oder dem anderen von zwei festen Punkten. c) Unter diesen befinden sich auf solche, welche paarweise von den, einerlei Richtung zugeordneten Durchmessern aller Kegelschnitte der ersten Schaar umhüllt werden, indem sie den unendlich-entfernten Punkten der verschiedenen Geraden der Ebene entsprechen.

(Der nun folgende Satz 5. nebst der beigefügten Note ist wegzulassen.)

XXVI.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Von dem Herrn Doctor Schlömilch, Privatdocenten an der Universität zu Jena.

1) Sei das gleichschenkliche Dreieck MNO (Taf. IV. Fig. 6.) das Profil eines geraden Kegels, AB das einer ihn schneidenden Ebene. Der Schnitt sei so geführt, dass die entstehende Durchschnittfigur eine Ellipse bildet, von welcher AB die grosse Achse darstellt. Die zur Construction der Ellipse noch nöthige kleine Achse findet man durch folgendes Verfahren: Man halbire AB in C und ziehe durch diesen Punkt eine Gerade parallel OP, und eine zweite parallel MN, welche letztere die Gerade OP in G und MO in H schneidet. Mit GH als Halbmesser beschreibe man aus G als Mittelpunkt einen Kreisbogen, der die durch C gezogene Senkrechte in K schneidet; CK ist dann die kleine Halbachse der Ellipse. Nimmt man also $CD = CE = CK$ senkrecht auf AB, so hat man in AB die grosse, in DE die kleine Achse der entstandenen Ellipse, die nun leicht gezeichnet werden kann.

Wie lässt sich die Richtigkeit dieses Verfahrens beweisen? Welche Modification tritt ein, wenn der Kegel ein schiefer ist?

2) In (Taf. IV. Fig. 7.) stelle die gezeichnete Curve eine gleichseitige Hyperbel dar; von einem Punkte P derselben sind nach den Endpunkten A und B der Achse die Geraden AP, BP gezogen. Errichtet man in einem beliebigen Punkte M der verlängerten Achse, welcher aber zwischen B und Q liegt, eine Senkrechte MN, welche von AP und BP in D und C geschnitten wird, so ist $\angle PCD = \angle PAB$ und folglich auch $\angle PDC = \angle PBA$. Wie lässt sich diess zeigen? (Beide Sätze sind sehr leicht zu beweisen, wenn man ihnen eine projectivische Bedeutung abgewinnt.)

Algebraische Sätze, welche zu beweisen sind.

Für jede ungerade Zahl > 1 ist

$$\tfrac{1}{2} - \frac{m^2-1^2}{2^2}\cdot\tfrac{1}{4} + \frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{2^2.4^2}\cdot\tfrac{1}{6} - \ldots = 0$$

und für jede gerade Zahl >0:

$$\tfrac{1}{3}-\frac{m^2-2^2}{3^2}\cdot\tfrac{1}{5}+\frac{(m^2-2^2)(m^2-4^2)}{3^2.5^2}\cdot\tfrac{1}{7}-\ldots\ldots=\frac{1}{m^2-1}.$$

Beide Reihen werden so weit fortgesetzt, bis sie von selbst abbrechen.

Einige Berichtigungen zu Theil IV.

S. 187. Z. 1. statt $\cos\beta'$ s. m. $\cos\gamma'$.
S. 191. Z. 6. „ Reflexion s. m. Refraction.

Berichtigungen zu der Abhandlung No. XXXII. von Herrn Dr. E. G. Björling.

S. 293. Z. 1. v. u. statt $U_{,,}$ und $V_{,,}$ s. m. $u_{,,}$ und $v_{,,}$.
„ 296. Z. 1. v. u. „ $(1+4p_1q_1)^3$ s. m. $(1+4p_1q_1)^{\frac{3}{2}}$.
„ 298. Z. 5. v. o. „ $\int(\alpha-\beta\psi'''(\beta)d\beta)$ s. m. $\int(\alpha-\beta)\psi'''(\beta)d\beta$.
„ 299. Z. 10. v. o. „ $\frac{1}{4}\{1-4\alpha^2)\varphi''$ s. m. $\frac{1}{4}\{(1-4\alpha^2)\varphi''$.
„ „ „ 12. v. o. „ $\frac{1}{4}\{1+4\alpha^2)\varphi''$ s. m. $\frac{1}{4}\{(1+4\alpha^2)\varphi''$.
„ 300. Z. 5. v. o. „ $d\alpha$ s. m. da.
„ „ „ 11. v. o. „ 2ψ s. m. $2\psi'''$.
„ 301. Z. 7. v. u. „ $f'_1 \; f'f_2$ s. m. $f'_1-f'f_2$.
„ 304. Z. 13. v. o. „ $=c$, s. m. $=0$,
„ 306. Z. 6. v. o. „ $w=$ s. m. $w=-$.
„ 313. Z. 18. v. o. „ (44) s. m. (42).
„ 314. Z. 4. v. u. „ xy-plano s. m. xz-plano.

XXVII.

Ueber die Theorie des Dipleidoscops.

Von

Herrn Gustav Schmidt

zu Wien.

(Von Herrn Director C. L. v. Littrow in Wien dem Herausgeber zur Aufnahme in das Archiv mitgetheilt.)

Das von E. Dent in London (82, Strand) angegebene Dipleidoscop ist so einfach in seiner Anwendung und verspricht so genaue Resultate, dass man eine allgemeine Einführung dieses Mittels, die Zeit zu bestimmen, mit Zuversicht erwarten kann. Es besteht dasselbe bekanntlich in einem von drei plan - parallelen Glasplatten gebildeten gleichschenkligen Prisma, das wir hier der Einfachheit wegen zugleich als rechtwinklig annehmen wollen; es bilden sich so von jedem leuchtenden Punkte, der vor der Hypotenusen - Fläche sich befindet, zwei reflectirte Bilder, deren eines von dieser Hypotenusenfläche des Prisma's zurückgeworfen wird, und deren anderes durch doppelte Reflexion an den Kathetenflächen entsteht. Diese beiden Bilder werden, wie aus der Natur der Sache hervorgeht, sich bei einer gewissen Bewegung des leuchtenden Gegenstandes immer gegen einander bewegen oder sich von einander entfernen, und somit auch in einer gewissen Lage dieses Gegenstandes sich decken. Ist nun ein solches Prisma einmal z. B. in Bezug auf den Meridian richtig aufgestellt, so erfolgt die Deckung auch immer wieder zur Zeit des wahren Mittags. Da eine solche Deckung mit grosser Schärfe beobachtet werden kann, und selbst die Bewaffnung des Auges mit einem Fernrohre erlaubt, da ferner die Vorrichtung bei ihrer Kleinheit durchaus keinem schädlichen Einflusse der Temperatur unterliegt, so kommen dem Dipleidoscope die Vorzüge eines Gnomons in erhöhtem Maassstabe zu, ohne dass es deshalb seine Nachtheile besässe.

Unter diesen Umständen, glaubten wir, würde ein analytischer Beweis für die Theorie dieses Instrumentes, die sich übrigens auch auf elementarem Wege entwickeln lässt, nicht ohne Interesse sein. Es handelt sich aber hier um folgenden

Lehrsatz.

Bei einem geraden Prisma von gleichschenkliger rechtwinkliger Basis decken sich die beiden Sonnenbilder zur wahren Mittagszeit, unabhängig von der Höhe der Sonne, wenn die Hypotenusenfläche senkrecht auf dem Meridian steht, und die Seitenkanten parallel zu der Ebene desselben liegen.

Beweis.

Es sei (Taf. IV. Fig. 1.) die Ebene XZ parallel zum Meridian. Das Prisma, dessen Basis ABC sei, stehe senkrecht auf der Ebene XY, und so, dass die Vorderfläche $ABA'B$ mit der Ebene YZ, und die Kante AA' mit der Axe AZ zusammenfalle. Man hat nun aus Taf. IV. Fig. 2. die Gleichung

$$\text{der Ebene}\begin{cases} AB \dots . \; x = 0 \\ BC \dots . \; x + y = a \\ AC \dots . \; x - y = 0. \end{cases}$$

Die zur Ebene XZ parallelen Lichtstrahlen, welche die Sonne im Meridian auf das Prisma wirft, sollen unter dem Winkel α gegen die Halbaxe der positiven x geneigt sein. Führen wir einen derselben durch den willkührlichen Punkt $(\xi\eta\zeta)$, so sind seine Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} y - \eta = 0 \\ z - \zeta = (x - \xi)\operatorname{tg}\alpha \end{array}\right\} \dots . \; 1).$$

Dieser Lichtstrahl 1) schneidet die Ebene $x = 0$ in dem Punkte

$$x_1 = 0$$
$$y_1 = \eta$$
$$z_1 = \zeta - \xi\operatorname{tg}\alpha.$$

Die Linie 1) kann daher auch so ausgedrückt werden:

$$\left.\begin{array}{l} y - y_1 = 0 \\ z - z_1 = x\operatorname{tg}\alpha \end{array}\right\} \dots . \; 1).$$

Es ist leicht einzusehen, dass dieser Lichtstrahl 1) in der Linie

$$\left.\begin{array}{l} y - y_1 = 0 \\ z - z_1 = -x\operatorname{tg}\alpha \end{array}\right\} \dots . \; 2)$$

von der Ebene YZ oder $x = 0$ reflectirt werde; somit wird an

ein zu 1) paralleler Lichtstrahl, der die Ebene $x=0$ im Punkte $(y'''z''')$ trifft, von dieser spiegelnden Fläche in der Linie

$$\left.\begin{array}{l} y-y'''=0 \\ z-z'''=-x\operatorname{tg}\alpha \end{array}\right\} \ldots . \quad 3)$$

reflectirt.

Es sind nun die folgenden allgemeinen Aufgaben einzuschalten.

I. Auf die durch den Punkt $(x'y'z')$ gelegte Ebene

$$M(x-x')+N(y-y')+P(z-z')=0$$

im Punkte $(x'y'z')$ ein Perpendikel zu errichten.

Man erhält leicht

$$y-y'=\frac{N}{M}(x-x'),$$

$$z-z'=\frac{P}{M}(x-x')$$

als Gleichungen des verlangten Lothes.

II. Den Neigungswinkel δ zweier sich im Punkte $(x'y'z')$ schneidender Geraden

$$\left.\begin{array}{l} y-y'=A(x-x') \\ z-z'=B(x-x') \end{array}\right\} \ldots . \quad L)$$

und

$$\left.\begin{array}{l} y-y'=A'(x-x') \\ z-z'=B'(x-x') \end{array}\right\} \ldots . \quad L')$$

anzugeben.

Dieser wird gegeben durch

$$\cos\delta=\frac{1+AA'+BB'}{\sqrt{(1+A^2+B^2)(1+A'^2+B'^2)}}.$$

III. Durch zwei sich schneidende Gerade L und L' eine Ebene zu legen

Diese ist:

$$(AB'-A'B)(x-x')+(B-B')(y-y')=(A-A')(z-z').$$

Verfolgen wir nun den Lichtstrahl 1) weiter, so finden wir, dass er die Ebene $x+y=a$ trifft, wenn nur ξ, η, ζ schicklich gewählt sind, und zwar im Punkte:

$$x'=a-\eta,$$
$$y'=\eta,$$
$$z'=\zeta+(a-\xi-\eta)\operatorname{tg}\alpha.$$

Wir können die Gleichungen 1) und $x+y=a$ den Formeln I., II., III. besser anpassen, wenn wir ihnen die Gestalt geben:

$$\left.\begin{array}{l} y-y'=0 \\ z-z'=(x-x')\operatorname{tg}\alpha \end{array}\right\} \ldots\ldots 1)$$

und der Ebene

$$(x-x')+(y-y')=0.$$

Im Durchschnittspunkte $(x'y'z')$ errichten wir ein Loth auf die Ebe BC. Dieses ist nach I.

$$y-y'=x-x',$$
$$z-z'=0.$$

Durch dieses Loth und die Linie 1) legen wir eine Ebene. U der Formel III. bedienend, erhalten wir als Gleichung derselben

$$-(x-x')\operatorname{tg}\alpha+(y-y')\operatorname{tg}\alpha+(z-z')=0\ \ldots\ldots\ 4)$$

Wir müssen nun noch den Neigungswinkel des Lothes gegen Linie 1) kennen lernen. Dieser wird gemessen durch

$$\cos\delta=\frac{1}{\sqrt{2(1+\operatorname{tg}\alpha^2)}}=\frac{\cos\alpha}{\sqrt{2}}.$$

Man muss jetzt eine Linie durch $(x'y'z')$ in der Ebene 4) ziehe welche mit dem Einfallslothe den Winkel $360^\circ-\delta$ einschlies Diese Linie sei:

$$\left.\begin{array}{l} y-y'=A(x-x') \\ z-z'=B(x-x') \end{array}\right\} \ldots\ldots 5).$$

Zur Bestimmung von A und B hat man

$$-\operatorname{tg}\alpha+A\operatorname{tg}\alpha+B=0$$

und

$$\frac{\cos\alpha}{\sqrt{2}}=\frac{1+A}{\sqrt{2(1+A^2+B^2)}},$$

woraus

$$B=(1-A)\operatorname{tg}\alpha$$

und

$$1+A^2-2A\sin\alpha^2=1+2A+A^2$$

folgt. Man hat also entweder

$$\left.\begin{array}{l} A=0 \\ B=\operatorname{tg}\alpha \end{array}\right\} \quad \text{oder} \quad \left.\begin{array}{l} A=\infty \\ B=-A\operatorname{tg}\alpha \end{array}\right\}.$$

Die beiden ersten Werthe verwandeln 5) in 1), also gehören letzteren dem ausfallenden Strahle an, und seine Gleichung sind somit:

$$\left.\begin{aligned} y-y' &= A(x-x') \\ z-z' &= -A(x-x')\operatorname{tg}\alpha \\ A &= \infty \end{aligned}\right\} \dots\; 5)$$

mithin auch

$$z-z' = -(y-y')\operatorname{tg}\alpha,$$

und da $y-y'$ nicht ∞ ist, muss $x-x'=0$ sein. Die endlichen Gleichungen des von dem Spiegel BC reflectirten Strahls sind daher:

$$\left.\begin{aligned} x-x' &= 0 \\ z-z' &= -(y-y')\operatorname{tg}\alpha \end{aligned}\right\} \dots\; 5)$$

Dieser Strahl 5) trifft die Ebene AC oder $x-y=0$ im Punkte:

$$\left.\begin{aligned} x'' &= x' \\ y'' &= x' \\ z'' &= z'-(x'-y')\operatorname{tg}\alpha \end{aligned}\right\} \text{ oder } \begin{aligned} x'' &= a-\eta \\ y'' &= a-\eta \\ z'' &= \zeta-(\xi-\eta)\operatorname{tg}\alpha. \end{aligned}$$

Um anzuzeigen, dass dieser Punkt $(x''y''z'')$ der Linie 5) und der Ebene $x-y=0$ angehöre, geben wir den Gleichungen folgende Form:

$$\left.\begin{aligned} x-x'' &= 0 \\ z-z'' &= -(y-y'')\operatorname{tg}\alpha \end{aligned}\right\} \dots\; 5) \text{ und } AC \dots (x-x'')-(y-y'')=0.$$

Das Einfallsloth im Punkte $(x''y''z'')$ ist:

$$\left.\begin{aligned} x-x'' &= -(y-y'') \\ z-z'' &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Legt man durch dieses Loth und die Linie 5) eine Ebene, so erhält man:

$$(x-x'')\operatorname{tg}\alpha + (y-y'')\operatorname{tg}\alpha + (z-z'') = 0 \dots\; 6)$$

Der Neigungswinkel des Einfallsloths gegen 5) ist gegeben durch:

$$\cos\delta = \frac{1}{\sqrt{2(1+\operatorname{tg}\alpha^2)}} = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{2}}.$$

Es ist jetzt nur noch übrig, eine in der Ebene 6) liegende Gerade

$$\left.\begin{aligned} y-y'' &= A(x-x'') \\ z-z'' &= B(x-x'') \end{aligned}\right\} \dots\; 7)$$

zu ziehen, deren Winkel mit dem Lothe durch

$$\cos\delta = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{2}}$$

bestimmt ist. Man erhält

$$B = -(1 + A) \operatorname{tg} \alpha, \quad \frac{\cos \alpha}{\sqrt{2}} = \frac{1 - A}{\sqrt{2(1 + A^2 + B^2)}},$$

also

$$1 + A^2 + 2A \sin \alpha^2 = 1 - 2A + A^2,,$$

woraus zwei Auflösungen:

$$\left.\begin{array}{l} A = 0 \\ B = -\operatorname{tg} \alpha \end{array}\right\} \text{ und } \left.\begin{array}{l} A = \infty \\ B = -A \operatorname{tg} \alpha \end{array}\right\}$$

folgen, von welchen die zweite dem einfallenden, somit die e dem ausfallenden Strahle angehört. Die Gleichungen des vom S gel AC das zweite Mal reflectirten Strahles sind daher:

$$\left.\begin{array}{l} y - y'' = 0 \\ z - z'' = -(x - x'') \operatorname{tg} \alpha \end{array}\right\} \ldots\ldots 7)$$

Dieser trifft die Glasfläche $x = 0$ im Punkte

$$\begin{array}{l} x''' = 0, \\ y''' = y'', \\ z''' = z'' + x'' \operatorname{tg} \alpha. \end{array}$$

Führt man in 7) die Grössen x''', y''', z''' statt x'', y'', z'' ein, erhält man

$$\left.\begin{array}{l} y - y''' = 0 \\ z - z''' = -x \operatorname{tg} \alpha \end{array}\right\} \ldots\ldots 7)$$

Dieser zweimal reflectirte Strahl 7) fällt daher mit dem einmal flectirten Strahle 3):

$$\left.\begin{array}{l} y - y''' = 0 \\ z - z''' = -x \operatorname{tg} \alpha \end{array}\right\}$$

genau zusammen, was zu beweisen war.

XXVIII.

Ueber die Theorie des Dipleidoscops.

Von

dem Herausgeber.

Die in der vorhergehenden Abhandlung *) gegebene sehr einfache Analysis hat mich zu einigen allgemeineren Betrachtungen über das Dipleidoscop veranlasst, welche ich, um zugleich dem Hrn. Verfasser dieser Abhandlung das Interesse zu beweisen, mit dem ich dieselbe gelesen habe, und denselben zu weiteren Mittheilungen zu ermuntern, in dem vorliegenden Aufsatze mittheilen werde.

I.

Wir wollen, allen unseren folgenden Untersuchungen ein rechtwinkliges Coordinatensystem der xyz zum Grunde legend, zuerst einige allgemeine Betrachtungen über Strahlen anstellen, welche auf eine auf der Ebene der xy senkrecht stehende Ebene fallen und von derselben reflectirt werden.

Die Gleichung einer jeden auf der Ebene der xy senkrecht stehenden Ebene hat bekanntlich die Form

$$1)\quad Ax+By+C=0.$$

Die Gleichungen eines diese Ebene in dem Punkte (pqr) treffenden Strahls, wo also

$$2)\quad Ap+Bq+C=0$$

ist, seien

$$3)\quad \frac{x-p}{\cos\alpha}=\frac{y-q}{\cos\beta}=\frac{z-r}{\cos\gamma},$$

wo α, β, γ die 180° nicht übersteigenden Winkel bezeichnen sollen, welche der als von dem Punkte (pqr) ausgehend gedachte einfallende Strahl mit den positiven Theilen dreier durch den Punkt (pqr) gelegter, den primitiven Axen paralleler Axen einschliesst.

Die Gleichung der durch den einfallenden Strahl gelegten, also durch den Punkt (pqr) gehenden, auf der gegebenen Ebene 1) senkrecht stehenden Ebene sei

$$4)\quad A'(x-p)+B'(y-q)+C'(z-r)=0.$$

---

*) Ohne diese Abhandlung vorher gelesen zu haben, wird die vorliegende nicht ganz verständlich sein.

Da in dieser Ebene der einfallende Strahl liegt, so ist wegen der Gleichungen 3) für jedes x

$$(A' \cos\alpha + B' \cos\beta + C' \cos\gamma)(x - p) = 0,$$

also

$$5) \quad A' \cos\alpha + B' \cos\beta + C' \cos\gamma = 0.$$

Da ferner die Ebene 4) auf der Ebene 1) senkrecht steht, so ist nach den Principien der analytischen Geometrie

$$6) \quad AA' + BB' = 0.$$

Um also die Gleichung der durch den einfallenden Strahl 3) gelegten, auf der gegebenen Ebene 1) senkrecht stehenden Ebene zu finden, muss man die Grössen A', B', C' aus den drei Gleichungen

$$\begin{aligned} &AA' + BB' = 0,\\ &A' \cos\alpha + B' \cos\beta + C' \cos\gamma = 0,\\ &A'(x-p) + B'(y-q) + C'(z-r) = 0 \end{aligned}$$

eliminiren.

Multiplicirt man zu dem Ende diese drei Gleichungen nach der Reihe mit

$$\begin{aligned} &(y-q)\cos\alpha - (x-p)\cos\beta,\\ &B(x-p) - A(y-q),\\ &A\cos\beta - B\cos\alpha; \end{aligned}$$

und addirt dieselben dann zu einander, so erhält man

$$\left\{\begin{aligned} &(B(x-p) - A(y-q))\cos\gamma\\ +&(A\cos\beta - B\cos\alpha)(z-r) \end{aligned}\right\} C' = 0,$$

und folglich, wenn nicht $C' = 0$ ist:

$$7) \quad \left.\begin{aligned} &\{B(x-p) - A(y-q)\}\cos\gamma\\ +&(A\cos\beta - B\cos\alpha)(z-r) \end{aligned}\right\} = 0.$$

Wenn $C' = 0$ ist, so hat man nach dem Obigen die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} &AA' + BB' + 0,\\ &A' \cos\alpha + B' \cos\beta = 0,\\ &A'(x-p) + B'(y-q) = 0; \end{aligned}$$

aus denen man leicht die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} &(A\cos\beta - B\cos\alpha)A' = 0,\\ &\{B(x-p) - A(y-q)\}A' = 0; \end{aligned}$$

so wie auch die beiden Gleichungen

$$(A\cos\beta - B\cos\alpha)B' = 0,$$
$$\{B(x-p) - A(y-q)\}\,B' = 0$$

erhält. Ist nun nicht zugleich $A' = 0$ und $B' = 0$, so ist

$$A\cos\beta - B\cos\alpha = 0,$$
$$B(x-p) - A(y-q) = 0;$$

also auch

$$8)\quad \left.\begin{array}{l}\{B(x-p) - A(y-q)\}\cos\gamma \\ +(A\cos\beta - B\cos\alpha)(z-r)\end{array}\right\} = 0,$$

welches daher wieder die Gleichung der durch den einfallenden Strahl 3) gelegten, auf der gegebenen Ebene 1) senkrecht stehenden Ebene ist.

Wäre zugleich $A' = 0$ und $B' = 0$, so hätte, da auch $C' = 0$ ist, die Gleichung der durch den einfallenden Strahl 3) gelegten, auf der gegebenen Ebene 1) senkrecht stehenden Ebene nach 4) die ganz unbestimmte Form $0 = 0$, welches offenbar nur dann der Fall sein könnte, wenn der einfallende Strahl 3) auf der gegebenen Ebene 1) senkrecht stände. In diesem Falle wäre, da die gegebene Ebene 1) auf der Ebene der xy senkrecht steht, wie sogleich erhellet, $\cos\gamma = 0$, und wegen der beiden Gleichungen

$$Ax + By + C = 0,$$
$$(x-p)\cos\beta = (y-q)\cos\alpha$$

wäre nach den Principien der analytischen Geometrie

$$A\cos\beta - B\cos\alpha = 0,$$

also wieder

$$9)\quad \left.\begin{array}{l}\{B(x-p) - A(y-q)\}\cos\gamma \\ +(A\cos\beta - B\cos\alpha)(z-r)\end{array}\right\} = 0$$

die Gleichung der durch den einfallenden Strahl 3) gelegten, auf der gegebenen Ebene 1) senkrecht stehenden Ebene.

Nach 7), 8), 9) ist daher immer

$$10)\quad \left.\begin{array}{l}\{B(x-p) - A(y-q)\}\cos\gamma \\ +(A\cos\beta - B\cos\alpha)(z-r)\end{array}\right\} = 0$$

die Gleichung der durch den einfallenden Strahl 3) gelegten, auf der gegebenen Ebene 1) senkrecht stehenden Ebene.

Die Gleichungen des von dem Punkte (pqr) ausgehenden reflectirten Strahls seien nun

$$11)\quad \frac{x-p}{\cos\varphi} = \frac{y-q}{\cos\psi} = \frac{z-r}{\cos\chi},$$

wo φ, ψ, χ die 180° nicht übersteigenden Winkel bezeichnen sollen, welche der reflectirte Strahl mit den positiven Theilen dreier

durch den Punkt (pqr) gelegter, den primitiven Axen paralleler Axen einschliesst.

Weil dieser Strahl ganz in der Ebene 10) liegt, so ist wegen der vorhergehenden Gleichungen für jedes x

$$\left.\begin{array}{r}(B\cos\varphi - A\cos\psi)\cos\gamma\,.\,(x-p)\\ +(A\cos\beta - B\cos\alpha)\cos\chi\,.\,(x-p)\end{array}\right\} = 0,$$

also

$$12)\quad (A\cos\beta - B\cos\alpha)\cos\chi - (A\cos\psi - B\cos\varphi)\cos\gamma = 0,$$

oder

$$13)\quad \frac{A\cos\beta - B\cos\alpha}{A\cos\psi - B\cos\varphi} = \frac{\cos\gamma}{\cos\chi};$$

oder

$$14)\quad A(\cos\beta\cos\chi - \cos\gamma\cos\psi) - B(\cos\alpha\cos\chi - \cos\gamma\cos\varphi) = 0,$$

oder

$$15)\quad \frac{\cos\alpha\cos\chi - \cos\gamma\cos\varphi}{\cos\beta\cos\chi - \cos\gamma\cos\psi} = \frac{A}{B};$$

oder auch

$$16)\quad B\cos\gamma\cos\varphi - A\cos\gamma\cos\psi + (A\cos\beta - B\cos\alpha)\cos\chi = 0.$$

Bezeichnen wir den Neigungswinkel des einfallenden Strahls 3) gegen die gegebene Ebene 1) durch i, so ist nach den Principien der analytischen Geometrie

$$\sin i = \pm\frac{A\dfrac{\cos\alpha}{\cos\gamma} + B\dfrac{\cos\beta}{\cos\gamma}}{\sqrt{(A^2+B^2)\{1+(\dfrac{\cos\alpha}{\cos\gamma})^2+(\dfrac{\cos\beta}{\cos\gamma})^2\}}},$$

und folglich, weil bekanntlich

$$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1$$

ist:

$$17)\quad \sin i = \pm\frac{A\cos\alpha + B\cos\beta}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Ganz eben so hat man, weil i auch der Neigungswinkel des reflectirten Strahls 11) gegen die gegebene Ebene 1) ist, ohne Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander:

$$18)\quad \sin i = \pm\frac{A\cos\varphi + B\cos\psi}{\sqrt{A^2+B^2}};$$

und aus 16), 17), 18) ergeben sich daher die beiden folgenden Gleichungen:

$$A\cos\varphi + B\cos\psi = \pm(A\cos\alpha + B\cos\beta),$$
$$B\cos\gamma\cos\varphi - A\cos\gamma\cos\psi = (B\cos\alpha - A\cos\beta)\cos\chi.$$

Daher haben wir jetzt die drei folgenden Gleichungen:

$$(A^2 + B^2)\cos\gamma\cos\varphi = \pm A(A\cos\alpha + B\cos\beta)\cos\gamma + B(B\cos\alpha - A\cos\beta)\cos\chi,$$
$$(A^2 + B^2)\cos\gamma\cos\psi = \pm B(A\cos\alpha + B\cos\beta)\cos\gamma - A(B\cos\alpha - A\cos\beta)\cos\chi,$$
$$(A^2 + B^2)\cos\gamma\cos\chi = (A^2 + B^2)\cos\gamma\cos\chi.$$

Quadrirt man diese drei Gleichungen und addirt sie dann zu einander, so erhält man mit Rücksicht darauf, dass

$$\cos\varphi^2 + \cos\psi^2 + \cos\chi^2 = 1$$

ist, die Gleichung

$$(A^2 + B^2)\cos\gamma^2 = (A\cos\alpha + B\cos\beta)^2\cos\gamma^2 + \{(A^2+B^2)\cos\gamma^2 + (B\cos\alpha - A\cos\beta)^2\}\cos\chi^2,$$

und folglich

$$\cos\chi^2 = \frac{A^2 + B^2 - (A\cos\alpha + B\cos\beta)^2}{(A^2 + B^2)\cos\gamma^2 + (B\cos\alpha - A\cos\beta)^2}\cos\gamma^2,$$

also, weil

$$\cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1 - \cos\alpha^2 = \sin\alpha^2,$$
$$\cos\alpha^2 + \cos\gamma^2 = 1 - \cos\beta^2 = \sin\beta^2$$

ist, wie man leicht findet:

$$\cos\chi^2 = \frac{A^2\sin\alpha^2 + B^2\sin\beta^2 - 2AB\cos\alpha\cos\beta}{A^2\sin\alpha^2 + B^2\sin\beta^2 - 2AB\cos\alpha\cos\beta}\cos\gamma^2,$$

d. i. $\cos\chi = \pm\cos\gamma$.

Setzt man nun mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander

$$\cos\chi = \pm\cos\gamma,$$
$$A\cos\varphi + B\cos\psi = \pm(A\cos\alpha + B\cos\beta),$$
$$B\cos\gamma\cos\varphi - A\cos\gamma\cos\psi = (B\cos\alpha - A\cos\beta)\cos\chi;$$

also

$$A\cos\varphi + B\cos\psi = \pm(A\cos\alpha + B\cos\beta),$$
$$B\cos\varphi - A\cos\psi = \pm(B\cos\alpha - A\cos\beta);$$

so ist, wie man hieraus leicht findet, mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander:

$$\cos\varphi = \pm\cos\alpha,\quad \cos\psi = \pm\cos\beta,\quad \cos\chi = \pm\cos\gamma;$$

und die Gleichungen des reflectirten Strahls wären also nach 11)

$$\frac{x-p}{\cos\alpha}=\frac{y-q}{\cos\beta}=\frac{z-r}{\cos\gamma},$$

d. h. der reflectirte Strahl fiele mit dem einfallenden Strahle 3) zusammen, was offenbar, wenigstens im Allgemeinen, ungereimt ist. Daher müssen wir mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander

$$\cos\chi=\mp\cos\gamma,$$
$$A\cos\varphi+B\cos\psi=\pm(A\cos\alpha+B\cos\beta),$$
$$B\cos\gamma\cos\varphi-A\cos\gamma\cos\psi=\quad(B\cos\alpha-A\cos\beta)\cos\chi;$$

d. i.

$$A\cos\varphi+B\cos\psi=\pm(A\cos\alpha+B\cos\beta),$$
$$B\cos\varphi-A\cos\psi=\mp(B\cos\alpha-A\cos\beta)$$

setzen, und erhalten hieraus ohne Schwierigkeit:

$$\cos\varphi=\pm\frac{(A^2-B^2)\cos\alpha+2AB\cos\beta}{A^2+B^2},$$
$$\cos\psi=\mp\frac{(A^2-B^2)\cos\beta-2AB\cos\alpha}{A^2+B^2},$$
$$\cos\chi=\mp\cos\gamma.$$

Weil aber nach der oben den Winkeln α, β, γ und φ, ψ, χ beigelegten Bedeutung offenbar nicht $\chi=\gamma$ sein kann, sondern $\chi=180^\circ-\gamma$ sein muss, so muss man in den vorhergehenden Gleichungen die obern Zeichen nehmen, und daher

$$19)\quad\begin{cases}\cos\varphi=\dfrac{(A^2-B^2)\cos\alpha-2AB\cos\beta}{A^2+B^2},\\ \cos\psi=-\dfrac{(A^2-B^2)\cos\beta-2AB\cos\alpha}{A^2+B^2},\\ \cos\chi=-\cos\gamma\end{cases}$$

setzen.

Setzt man

$$20)\quad \operatorname{tang}\omega=\frac{B}{A},$$

so ist, wie man leicht findet:

$$21)\quad\begin{cases}\cos\varphi=\cos\alpha\cos2\omega+\cos\beta\sin2\omega,\\ \cos\psi=\cos\alpha\sin2\omega-\cos\beta\cos2\omega,\\ \cos\chi=-\cos\gamma;\end{cases}$$

und folglich, wenn man nun noch, was offenbar verstattet ist:

$$22) \begin{cases} \cos\alpha = \cos\lambda\cos\mu, \\ \cos\beta = \sin\lambda\cos\mu, \\ \cos\gamma = \sin\mu \end{cases}$$

setzt:

$$23) \begin{cases} \cos\varphi = \cos(2\omega - \lambda)\cos\mu, \\ \cos\psi = \sin(2\omega - \lambda)\cos\mu, \\ \cos\chi = -\sin\mu. \end{cases}$$

Also sind nach 11) die Gleichungen des reflectirten Strahls:

$$24) \begin{cases} x - p = -(z - r)\cos(2\omega - \lambda)\cot\mu, \\ y - q = -(z - r)\sin(2\omega - \lambda)\cot\mu. \end{cases}$$

II.

Indem wir der eigentlichen Theorie des Dipleidoscopes jetzt näher treten, wollen wir, was offenbar verstattet ist, das System der xyz so annehmen, dass die Ebene der xy auf den drei Seitenflächen des Prismas senkrecht steht, und dieser Annahme zufolge die Gleichungen der drei Seitenflächen des Prismas, die wir nach der Ordnung, in welcher die drei folgenden Gleichungen geschrieben sind, die erste, zweite, dritte Seitenfläche nennen wollen, durch

$$25) \begin{cases} Ax + By + C = 0, \\ A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$$

bezeichnen. Die Gleichungen des einfallenden, die erste Seitenfläche in dem Punkte (pqr) treffenden Strahls seien wie vorher

$$26) \quad \frac{x-p}{\cos\alpha} = \frac{y-q}{\cos\beta} = \frac{z-r}{\cos\gamma},$$

wo α, β, γ ganz dieselbe Bedeutung haben wie oben; so ist, wenn für den von der ersten Seitenfläche reflectirten Strahl auch φ, ψ, χ ganz dieselbe Bedeutung wie vorher behalten, und

$$27) \quad \tang\omega = \frac{B}{A},$$

so wie

$$28) \begin{cases} \cos\alpha = \cos\lambda\cos\mu, \\ \cos\beta = \sin\lambda\cos\mu, \\ \cos\gamma = \sin\mu \end{cases}$$

gesetzt wird, nach 23)

$$29) \begin{cases} \cos\varphi = \cos(2\omega - \lambda)\cos\mu, \\ \cos\psi = \sin(2\omega - \lambda)\cos\mu, \\ \cos\chi = -\sin\mu; \end{cases}$$

und die Gleichungen des von der ersten Seitenfläche reflectirt Strahls sind nach 24):

$$30)\quad \begin{cases} x-p=-(z-r)\cos(2\omega-\lambda)\cot\mu, \\ y-q=-(z-r)\sin(2\omega-\lambda)\cot\mu. \end{cases}$$

Die Gleichungen eines dem Strahle 26) parallelen, die erste S tenfläche in dem Punkte $(p'q'r')$ treffenden Strahls sind

$$31)\quad \frac{x-p'}{\cos\alpha}=\frac{y-q'}{\cos\beta}=\frac{z-r'}{\cos\gamma}.$$

Trifft nun dieser Strahl die zweite Seitenfläche in dem Punk (p'_1, q'_1, r'_1), so hat man zur Bestimmung der Coordinaten p'_1, q r'_1 die Gleichungen

$$A_1 p'_1 + B_1 q'_1 + C_1 = 0,$$
$$\frac{p'_1-p'}{\cos\alpha}=\frac{q'_1-q'}{\cos\beta}=\frac{r'_1-r'}{\cos\gamma}$$

oder

$$A_1(p'_1-p')+B_1(q'_1-q')+A_1p'+B_1q'+C_1=0,$$
$$\frac{p'_1-p'}{\cos\alpha}=\frac{q'_1-q'}{\cos\beta}=\frac{r'_1-r'}{\cos\gamma};$$

aus denen sich

$$32)\quad \begin{cases} p'_1-p'=-\dfrac{A_1p'+B_1q'+C_1}{A_1\cos\alpha+B_1\cos\beta}\cos\alpha, \\ q'_1-q'=-\dfrac{A_1p'+B_1q'+C_1}{A_1\cos\alpha+B_1\cos\beta}\cos\beta, \\ r'_1-r'=-\dfrac{A_1p'+B_1q'+C_1}{A_1\cos\alpha+B_1\cos\beta}\cos\gamma; \end{cases}$$

oder

$$33)\quad \begin{cases} p'_1-p'=-\dfrac{A_1p'+B_1q'+C_1}{A_1\cos\lambda+B_1\sin\lambda}\cos\lambda, \\ q'_1-q'=-\dfrac{A_1p'+B_1q'+C_1}{A_1\cos\lambda+B_1\sin\lambda}\sin\lambda, \\ r'_1-r'=-\dfrac{A_1p'+B_1q'+C_1}{A_1\cos\lambda+B_1\sin\lambda}\operatorname{tang}\mu; \end{cases}$$

oder, wenn der Kürze wegen

$$34)\quad k_1=\frac{A_1p'+B_1q'+C_1}{A_1\cos\lambda+B_1\sin\lambda}$$

gesetzt wird,

$$35)\quad \begin{cases} p'_1=p'-k_1\cos\lambda, \\ q'_1=q'-k_1\sin\lambda, \\ r'_1=r'-k_1\operatorname{tang}\mu \end{cases}$$

ergiebt.

Bezeichnen wir die 180° nicht übersteigenden Winkel, welche der von dem Punkte (p'_1, q'_1, r'_1) ausgehende, von der zweiten Seitenfläche reflectirte Strahl mit den positiven Theilen dreier durch den Punkt (p'_1, q'_1, r'_1) gelegter, den primitiven Axen paralleler Axen einschliesst, durch φ_1, ψ_1, χ_1; so ist, wenn

$$36)\quad \operatorname{tang} \omega_1 = \frac{B_1}{A_1}$$

gesetzt wird, nach 23)

$$37)\quad \begin{cases} \cos \varphi_1 = \cos(2\omega_1 - \lambda) \cos \mu, \\ \cos \psi_1 = \sin(2\omega_1 - \lambda) \cos \mu, \\ \cos \chi_1 = -\sin \mu; \end{cases}$$

und die Gleichungen dieses von der zweiten Seitenfläche reflectirten Strahls sind folglich

$$38)\quad \begin{cases} x - p'_1 = -(z - r'_1) \cos(2\omega_1 - \lambda) \cot \mu, \\ y - q'_1 = -(z - r'_1) \sin(2\omega_1 - \lambda) \cot \mu; \end{cases}$$

d. i. nach 35)

$$39)\quad \begin{cases} x - p' + k_1 \cos\lambda = -(z - r' + k_1 \operatorname{tang}\mu) \cos(2\omega_1 - \lambda) \cot \mu, \\ y - q' + k_1 \sin\lambda = -(z - r' + k_1 \operatorname{tang}\mu) \sin(2\omega_1 - \lambda) \cot \mu. \end{cases}$$

Ist nun $(p'_2 q'_2 r'_2)$ der Durchschnittspunkt dieses reflectirten Strahls mit der dritten Seitenfläche, so hat man zur Bestimmung der Coordinaten p'_2, q'_2, r'_2 die Gleichungen

$$A_2 p'_2 + B_2 q'_2 + C_2 = 0,$$

$$p'_2 - p' + k_1 \cos\lambda = -(r'_2 - r' + k_1 \operatorname{tang}\mu) \cos(2\omega_1 - \lambda) \cot\mu,$$

$$q'_2 - q' + k_1 \sin\lambda = -(r'_2 - r' + k_1 \operatorname{tang}\mu) \sin(2\omega_1 - \lambda) \cot\mu;$$

oder

$$\left.\begin{array}{l} A_2(p'_2 - p' + k_1 \cos\lambda) + B_2(q'_2 - q' + k_1 \sin\lambda) \\ + A_2(p' - k_1 \cos\lambda) + B_2(q' - k_1 \sin\lambda) + C_2 \end{array}\right\} = 0,$$

$$p'_2 - p' + k_1 \cos\lambda = -(r'_2 - r' + k_1 \operatorname{tang}\mu) \cos(2\omega_1 - \lambda) \cot\mu,$$

$$q'_2 - q' + k_1 \sin\lambda = -(r'_2 - r' + k_1 \operatorname{tang}\mu) \sin(2\omega_1 - \lambda) \cot\mu;$$

aus denen sich leicht

$$40)\quad \begin{cases} p'_2 - p' + k_1 \cos\lambda \\ = -\dfrac{A_2(p' - k_1 \cos\lambda) + B_2(q' - k_1 \sin\lambda) + C_2}{A_2 \cos(2\omega_1 - \lambda) + B_2 \sin(2\omega_1 - \lambda)} \cos(2\omega_1 - \lambda), \\ q'_2 - q' + k_1 \sin\lambda \\ = -\dfrac{A_2(p' - k_1 \cos\lambda) + B_2(q' - k_1 \sin\lambda) + C_2}{A_2 \cos(2\omega_1 - \lambda) + B_2 \sin(2\omega_1 - \lambda)} \sin(2\omega_1 - \lambda), \\ r'_2 - r' + k_1 \operatorname{tang}\mu \\ = \dfrac{A_2(p' - k_1 \cos\lambda) + B_2(q' - k_1 \sin\lambda) + C_2}{A_2 \cos(2\omega_1 - \lambda) + B_2 \sin(2\omega_1 - \lambda)} \operatorname{tang}\mu; \end{cases}$$

oder, wenn der Kürze wegen

$$41)\quad k_2 = \frac{A_2(p'-k_1\cos\lambda) + B_2(q'-k_1\sin\lambda) + C_2}{A_2\cos(2\omega_1-\lambda) + B_2\sin(2\omega_1-\lambda)}$$

gesetzt wird:

$$42)\quad \begin{cases} p'_2 = p' - k_1\cos\lambda - k_2\cos(2\omega_1-\lambda), \\ q'_2 = q' - k_1\sin\lambda - k_2\sin(2\omega_1-\lambda), \\ r'_2 = r' - (k_1-k_2)\tang\mu \end{cases}$$

ergiebt.

Die 180° nicht übersteigenden Winkel, welche der von der zweiten Seitenfläche reflectirte Strahl, wenn man sich denselben von seinem Durchschnittspunkte $(p'_2q'_2r'_2)$ mit der dritten Seitenfläche ausgehend denkt, mit den positiven Theilen dreier durch den Punkt $(p'_2q'_2r'_2)$ gelegter, den primitiven Axen paralleler Axen einschliesst, sind offenbar $180^\circ-\varphi_1$, $180^\circ-\psi_1$, $180^\circ-\chi_1$; und nach 37) ist folglich

$$\begin{aligned} \cos(180^\circ-\varphi_1) &= -\cos(2\omega_1-\lambda)\cos\mu, \\ \cos(180^\circ-\psi_1) &= -\sin(2\omega_1-\lambda)\cos\mu, \\ \cos(180^\circ-\chi_1) &= \sin\mu \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \cos(180^\circ-\varphi_1) &= \cos(180^\circ+2\omega_1-\lambda)\cos\mu, \\ \cos(180^\circ-\psi_1) &= \sin(180^\circ+2\omega_1-\lambda)\cos\mu, \\ \cos(180^\circ-\chi_1) &= \sin\mu. \end{aligned}$$

Bezeichnen nun φ_2, ψ_2, χ_2 die 180° nicht übersteigenden Winkel, welche der von dem Punkte $(p'_2q'_2r'_2)$ ausgehende, von der dritten Seitenfläche reflectirte Strahl mit den positiven Theilen dreier, durch den Punkt $(p'_2q'_2r'_2)$ gelegter, den primitiven paralleler Axen einschliesst; so ist für

$$43)\quad \tang\omega_2 = \frac{B_2}{A_2}$$

nach 23):

$$\begin{aligned} \cos\varphi_2 &= \cos(2\omega_2-2\omega_1+\lambda-180^\circ)\cos\mu, \\ \cos\psi_2 &= \sin(2\omega_2-2\omega_1+\lambda-180^\circ)\cos\mu, \\ \cos\chi_2 &= -\sin\mu \end{aligned}$$

oder

$$44)\quad \begin{cases} \cos\varphi_2 = -\cos(2\omega_2-2\omega_1+\lambda)\cos\mu, \\ \cos\psi_2 = -\sin(2\omega_2-2\omega_1+\lambda)\cos\mu, \\ \cos\chi_2 = -\sin\mu; \end{cases}$$

und die Gleichungen des von der dritten Seitenfläche reflectirten Strahls sind folglich

$$x - p'_2 = (z - r'_2)\cos(2\omega_2 - 2\omega_1 + \lambda)\cot\mu,$$
$$y - q'_2 = (z - r'_2)\sin(2\omega_2 - 2\omega_1 + \lambda)\cot\mu;$$

also, wenn man die aus 42) bekannten Ausdrücke der Coordinaten p'_2, q'_2, r'_2 einführt:

$$45)\quad\begin{cases} x - p' + k_1\cos\lambda + k_2\cos(2\omega_1 - \lambda) \\ = \{z - r' + (k_1 - k_2)\tan\mu\}\cos(2\omega_2 - 2\omega_1 + \lambda)\cot\mu, \\ y - q' + k_1\sin\lambda + k_2\sin(2\omega_1 - \lambda) \\ = \{z - r' + (k_1 - k_2)\tan\mu\}\sin(2\omega_2 - 2\omega_1 + \lambda)\cot\mu. \end{cases}$$

Die Parallellität der von der ersten und dritten Seitenfläche reflectirten Strahlen wird vermöge der Gleichungen 30) und 45) dieser Strahlen vollständig durch die beiden Gleichungen

$$\cos(2\omega_2 - 2\omega_1 + \lambda) = -\cos(2\omega - \lambda),$$
$$\sin(2\omega_2 - 2\omega_1 + \lambda) = -\sin(2\omega - \lambda)$$

bedingt. Diese beiden Gleichungen bringt man leicht auf die Form

$$\{\cos 2(\omega_2 - \omega_1) + \cos 2\omega\}\cos\lambda$$
$$= \{\sin 2(\omega_2 - \omega_1) - \sin 2\omega\}\sin\lambda,$$
$$\{\sin 2(\omega_2 - \omega_1) + \sin 2\omega\}\cos\lambda$$
$$= -\{\cos 2(\omega_2 - \omega_1) - \cos 2\omega\}\sin\lambda;$$

d. i. nach einer bekannten goniometrischen Verwandlung auf die Form

$$\cos(\omega_2 - \omega_1 + \omega)\cos(\omega_2 - \omega_1 - \omega)\cos\lambda$$
$$= \cos(\omega_2 - \omega_1 + \omega)\sin(\omega_2 - \omega_1 - \omega)\sin\lambda,$$
$$\sin(\omega_2 - \omega_1 + \omega)\cos(\omega_2 - \omega_1 - \omega)\cos\lambda$$
$$= \sin(\omega_2 - \omega_1 + \omega)\sin(\omega_2 - \omega_1 - \omega)\sin\lambda;$$

und unsere beiden Bedingungsgleichungen reduciren sich daher auf die eine Gleichung

$$\cos(\omega_2 - \omega_1 - \omega)\cos\lambda = \sin(\omega_2 - \omega_1 - \omega)\sin\lambda$$

oder

$$\cos(\omega + \omega_1 - \omega_2)\cos\lambda + \sin(\omega + \omega_1 - \omega_2)\sin\lambda = 0,$$

d. i.

$$46)\quad \cos(\omega + \omega_1 - \omega_2 - \lambda) = 0,$$

welches also die Bedingungsgleichung für die Parallellität der von der ersten und dritten Seitenfläche reflectirten Strahlen ist.

Nach 25) sind

$$A x + B y + C = 0,$$
$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0,$$
$$A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$$

oder

$$x = -\frac{B}{A}y - \frac{C}{A},$$
$$x = -\frac{B_1}{A_1}y - \frac{C_1}{A_1},$$
$$x = -\frac{B_2}{A_2}y - \frac{C_2}{A_2}$$

die Gleichungen der drei Seiten der Grundfläche des Prismas. Weil nun nach dem Obigen

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{B}{A}, \operatorname{tang}\omega_1 = \frac{B_1}{A_1}, \operatorname{tang}\omega_2 = \frac{B_2}{A_2};$$

also

$$\operatorname{tang}(360^\circ - \omega) = -\frac{B}{A},$$
$$\operatorname{tang}(360^\circ - \omega_1) = -\frac{B_1}{A_1},$$
$$\operatorname{tang}(360^\circ - \omega_2) = -\frac{B_2}{A_2}$$

ist; so kann man nach den Principien der analytischen Geometrie für $360^\circ - \omega$, $360^\circ - \omega_1$, $360^\circ - \omega_2$ die Winkel setzen, die der eine der beiden Theile, in welche die Seiten der Grundfläche des Prismas durch beliebige in denselben angenommene Punkte getheilt werden, mit dem positiven Theile der zweiten Axe eines durch einen jeden dieser Punkte gelegten, dem primitiven Systeme parallelen Systems einschliesst, indem man diese Winkel von den positiven Theilen der zweiten Axen der in Rede stehenden Systeme an nach den positiven Theilen der ersten Axen hin von 0 bis 360° zählt; und für ω, ω_1, ω_2 kann man also die Ergänzungen dieser Winkel zu 360° setzen, welche von den positiven Theilen der zweiten Axen an nach den negativen Theilen der ersten Axen hin von 0 bis 360° gezählt werden. Leicht wird aber erhellen, dass die goniometrischen Tangenten dieser Winkel immer den goniometrischen Tangenten der von den negativen Theilen der zweiten Axen an nach den positiven Theilen der ersten Axen hin von 0 bis 360° bis zu denselben Linien gezählten Winkel gleich sind, weshalb man also auch diese letzteren Winkel, wie von nun an fortwährend geschehen soll, für ω, ω_1, ω_2 setzen kann.

Die der ersten, zweiten und dritten Seite der Grundfläche des Prismas gegenüberstehenden inneren Winkel dieser Grundfläche wollen wir respective durch Θ, Θ_1, Θ_2 bezeichnen, und die Spitze des Winkels Θ_1 als Anfang der xyz annehmen. Auch wollen wir uns die positiven Theile der Axen der x und y so angenommen denken, dass man sich, um von dem Winkel Θ_1 durch den Winkel Θ zu dem Winkel Θ_2 zu gelangen, nach derselben Richtung hin be-

wegen muss, nach welcher man sich bewegen muss, um von dem negativen Theile der Axe der y durch den von dem positiven Theile der Axe der x und dem negativen Theile der Axe der y eingeschlossenen rechten Winkel hindurch zu dem positiven Theile der Axe der x zu gelangen.

Alles dieses vorausgesetzt, wird nun leicht erhellen, dass immer entweder

$$\omega - \omega_2 = \Theta_1$$

oder

$$\omega - \omega_2 = \Theta_1 - 360^\circ$$

ist; und eben so leicht wird, wenn man sich durch die Spitze des Winkels Θ_2 ein dem primitiven Systeme paralleles Coordinatensysteme gelegt denkt, erhellen, dass immer, übrigens ohne alle Beziehung zu dem Vorhergehenden, entweder

$$\omega_1 - (\omega \pm 180^\circ) = \Theta_2$$

oder

$$\omega_1 - (\omega \pm 180^\circ) = \Theta_2 - 360^\circ$$

ist. Aus diesen und den vorhergehenden Gleichungen ergiebt sich nun durch Addition, dass, wenn n eine gewisse positive oder negative ganze Zahl bezeichnet, immer

$$\omega + \omega_1 - \omega_2 = \omega + \Theta_1 + \Theta_2 + n\,.\,180^\circ,$$

also, weil

$$\Theta_1 + \Theta_2 = 180^\circ - \Theta$$

ist, immer

$$\omega + \omega_1 - \omega_2 = \omega - \Theta + (n+1)\,.\,180^\circ$$

ist. Daher ist mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander

$$\cos(\omega + \omega_1 - \omega_1) = \pm\cos(\omega - \Theta),$$
$$\sin(\omega + \omega_1 - \omega_2) = \pm\sin(\omega - \Theta);$$

also ebenfalls mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander

$$\cos(\omega + \omega_1 - \omega_2)\cos\lambda = \pm\cos(\omega - \Theta)\cos\lambda,$$
$$\sin(\omega + \omega_1 - \omega_2)\sin\lambda = \pm\sin(\omega - \Theta)\sin\lambda;$$

und folglich

$$\cos(\omega + \omega_1 - \omega_2)\cos\lambda + \sin(\omega + \omega_1 - \omega_2)\sin\lambda$$
$$= \pm\{\cos(\omega - \Theta)\cos\lambda + \sin(\omega - \Theta)\sin\lambda\},$$

d. i.

$$\cos(\omega + \omega_1 - \omega_2 - \lambda) = \pm\cos(\omega - \Theta - \lambda).$$

Daher verwandelt sich die Bedingungsgleichung 46) in die Bedingungsgleichung

$$47)\quad \cos(\omega-\Theta-\lambda)=0.$$

Für $\sin\lambda=0$, also $\cos\lambda=\pm 1$, wird diese Bedingungsgleichung

$$48)\quad \cos(\omega-\Theta)=0.$$

Weil nach 28) in diesem Falle $\cos\beta=0$, also $\beta=90^\circ$ ist, so sind die parallelen einfallenden Strahlen 26) und 31) der Ebene der xz parallel. Da nun die Bedingungsgleichung

$$\cos(\omega-\Theta)=0$$

von allen Elementen, durch welche die Lage der parallelen einfallenden Strahlen bestimmt wird, ganz unabhängig ist, so ergiebt sich aus dem Vorhergehenden, dass, wenn diese Bedingungsgleichung erfüllt ist, für alle unter sich und mit der Ebene der xz parallel einfallende Strahlen die von der ersten und dritten Seitenfläche des Prismas reflectirten Strahlen einander parallel sind.

Nehmen wir, alle im Vorhergehenden gemachten Voraussetzungen auch jetzt fortwährend festhaltend, nun noch an, dass die Punkte, von denen die unter sich und mit der Ebene der xz parallel einfallenden Strahlen ausgehen, auf der negativen Seite der Ebene der yz liegen, so wird leicht erhellen, dass die erste Seitenfläche des Prismas von diesen Strahlen unmittelbar, d. h. ohne dass vorher eine andere Seitenfläche des Prismas von denselben geschnitten wird, nur dann getroffen werden kann, wenn

$$90^\circ<\omega<270^\circ,$$

also

$$90^\circ-\Theta<\omega-\Theta<270^\circ-\Theta$$

ist. Nun ist aber immer $\Theta<180^\circ$, also

$$90^\circ-\Theta>-90^\circ,\ 270^\circ-\Theta<270^\circ;$$

und folglich

$$-90^\circ<\omega-\Theta<270^\circ;$$

also, wenn

$$\cos(\omega-\Theta)=0$$

sein soll, nothwendig

$$49)\quad \omega-\Theta=90^\circ.$$

Für $\Theta=90^\circ$ muss folglich $\omega=180^\circ$ sein, d. h. die Hypotenuse der rechtwinkligen Grundfläche des Prismas muss mit dem positiven Theile der Axe der y zusammenfallen, wenn für alle unter sich und mit der Ebene der xz parallel einfallende Strahlen die von

der ersten und dritten Seitenfläche des Prismas reflectirten Strahlen einander parallel sein sollen *).

Wir wollen nun noch den Fall etwas genauer betrachten, wenn die Grundfläche des Prismas ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck ist, dessen Hypotenuse mit dem positiven Theile der Axe der y zusammenfällt, indem wir zugleich annehmen, dass der leuchtende Punkt der Mittelpunkt der Sonne ist. In diesem Falle kann offenbar $\omega = 180^\circ$, $\omega_1 = 45^\circ$, $\omega_2 = 135^\circ$ gesetzt werden, und es ist folglich

$$\cos(2\omega - \lambda) = \cos\lambda,\ \sin(2\omega - \lambda) = -\sin\lambda;$$
$$\cos(2\omega_1 - \lambda) = \sin\lambda,\ \sin(2\omega_1 - \lambda) = \cos\lambda;$$
$$\cos(2\omega_2 - 2\omega_1 + \lambda) = -\cos\lambda,\ \sin(2\omega_2 - 2\omega_1 + \lambda) = -\sin\lambda;$$

also nach 29) und 44)

$$\cos\varphi = \cos\lambda\cos\mu,$$
$$\cos\psi = -\sin\lambda\cos\mu,$$
$$\cos\chi = -\sin\mu$$

und

$$\cos\varphi_2 = \cos\lambda\cos\mu,$$
$$\cos\psi_2 = \sin\lambda\cos\mu,$$
$$\cos\chi_2 = -\sin\mu.$$

Nehmen wir nun die Ebene der xy horizontal an, denken uns durch den Punkt (pqr) ein dem primitiven Systeme der xyz paralleles System gelegt, und bezeichnen in diesem Systeme die Coordinaten der Sonne, deren Entfernung von dem Punkte (pqr) durch ϱ bezeichnet werden mag, durch ξ, η, ζ; so ist offenbar in völliger Allgemeinheit

$$\xi = \varrho\cos\alpha,\ \eta = \varrho\cos\beta,\ \zeta = \varrho\cos\gamma.$$

Bezeichnen wir aber den von der Projection der Entfernung ϱ auf der Ebene der $\xi\eta$ mit dem positiven Theile der Axe der ξ eingeschlossenen Winkel, indem wir diesen Winkel von dem positiven Theile der Axe der ξ an nach dem positiven Theile der Axe der η hin von 0 bis 360° zählen, durch Ω, und die Höhe der Sonne durch H; so ist offenbar in völliger Allgemeinheit

$$\xi = \varrho\cos\Omega\cos H,$$
$$\eta = \varrho\sin\Omega\cos H,$$
$$\zeta = \varrho\sin H;$$

also nach dem Vorhergehenden

$$\cos\alpha = \cos\Omega\cos H,$$
$$\cos\beta = \sin\Omega\cos H,$$
$$\cos\gamma = \sin H.$$

*) Dies ist der im vorhergehenden Aufsatze betrachtete Fall, wenn zugleich $\Theta_1 = \Theta_2$ ist.

Daher kann man wegen der Gleichungen 22) offenbar $\lambda = \Omega$, $\mu = H$ setzen, und hat also nach dem Vorhergehenden die Gleichungen

$$50) \begin{cases} \cos\varphi = \cos\Omega\cos H, \\ \cos\psi = -\sin\Omega\cos H, \\ \cos\chi = -\sin H \end{cases}$$

und

$$51) \begin{cases} \cos\varphi_2 = \cos\Omega\cos H, \\ \cos\psi_2 = \sin\Omega\cos H, \\ \cos\chi_2 = -\sin H. \end{cases}$$

Legt man nun durch das Auge ein dem primitiven Systeme paralleles System, und bezeichnet die 180° nicht übersteigenden Winkel, welche die von dem Auge nach der Seite des Prismas hin mit den von dessen erster und dritter Seitenfläche reflectirten Strahlen parallel gezogenen Linien mit den positiven Theilen der Axen des in Rede stehenden Systems einschliessen, respective durch φ', ψ', χ' und $\varphi'_2, \psi'_2, \chi'_2$; so ist offenbar

$$\varphi' = 180^\circ - \varphi,\ \psi' = 180^\circ - \psi,\ \chi' = 180^\circ - \chi$$

und

$$\varphi'_2 = 180^\circ - \varphi_2,\ \psi'_2 = 180^\circ - \psi_2,\ \chi'_2 = 180^\circ - \chi_2;$$

also nach dem Vorhergehenden

$$52) \begin{cases} \cos\varphi' = -\cos\Omega\cos H, \\ \cos\psi' = \sin\Omega\cos H, \\ \cos\chi' = \sin H \end{cases}$$

und

$$53) \begin{cases} \cos\varphi'_2 = -\cos\Omega\cos H, \\ \cos\psi'_2 = -\sin\Omega\cos H, \\ \cos\chi'_2 = \sin H; \end{cases}$$

also immer

$$\varphi' = \varphi'_2,\ \psi' = 180^\circ - \psi'_2,\ \chi' = \chi'_2.$$

Für $\Omega = 180^\circ$ ist $\psi' = 90^\circ$, $\psi'_2 = 90^\circ$, also

$$\varphi' = \varphi'_2,\ \psi' = \psi'_2,\ \chi' = \chi'_2;$$

und die beiden von dem Auge aus den beiden reflectirten Strahlen parallel gezogenen Linien fallen daher in diesem Falle mit einander zusammen.

Der Einfachheit wegen wollen wir nun den positiven Theil der Axe der y uns so angenommen denken, dass man sich, um von dem positiven Theile der Axe der x durch den Coordinatenwinkel hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y zu gelangen, nach derselben Richtung hin bewegen muss, nach welcher

sich die Sonne am Himmel bewegt, und die Werthe von Ω und H für die sich in der Ebene der xz befindende Sonne durch Ω und H selbst, die Werthe dieser Grössen für die Sonne vor und nach ihrem Durchgange durch die Ebene der xz in der Nähe derselben aber respective durch

$$\ldots.\ \Omega^{(4)},\ \Omega^{(3)},\ \Omega^{(2)},\ \Omega^{(1)};$$
$$\ldots.\ H^{(4)},\ H^{(3)},\ H^{(2)},\ H^{(1)}$$

und

$$\Omega_1,\ \Omega_2,\ \Omega_3,\ \Omega_4,\ \ldots.;$$
$$H_1,\ H_2,\ H_3,\ H_4,\ \ldots.$$

bezeichnen.

Ist, dies vorausgesetzt, die Ebene der xz die Ebene des Meridians, so ist

$$\ldots.\ \sin\Omega^{(2)} > \sin\Omega^{(1)} > \sin\Omega < -\sin\Omega_1 < -\sin\Omega_2\ \ldots.$$
$$\ldots.\ \cos H^{(2)} > \cos H^{(1)} > \cos H < \quad \cos H_1 < \quad \cos H_2\ \ldots.$$

Ist dagegen die Ebene der xz nicht die Ebene des Meridians, so ist entweder

$$\ldots.\ \sin\Omega^{(2)} > \sin\Omega^{(1)} > \sin\Omega < -\sin\Omega_1 < -\sin\Omega_2\ \ldots.$$
$$\ldots.\ \cos H^{(2)} > \cos H^{(1)} > \cos H > \quad \cos H_1 > \quad \cos H_2\ \ldots.$$

oder

$$\ldots.\ \sin\Omega^{(2)} > \sin\Omega^{(1)} > \sin\Omega < -\sin\Omega_1 < -\sin\Omega_2\ \ldots.$$
$$\ldots.\ \cos H^{(2)} < \cos H^{(1)} < \cos H < \quad \cos H_1 < \quad \cos H_2\ \ldots.$$

Hieraus sieht man, dass in dem ersten Falle, wenn nämlich die Ebene der xz die Ebene des Meridians ist, der absolute Werth des Productes $\sin\Omega\cos H$ sich nach beiden Seiten der Ebene der xz hin von Null an am Stärksten ändert, so dass sich also auch in diesem Falle die beiden einander zu 180° ergänzenden Winkel ψ' und ψ'_2 nach beiden Seiten der Ebene der xz hin von 90° an am Stärksten ändern werden, weshalb also offenbar in diesem Falle die Beobachtungen die grösste Genauigkeit gewähren werden.

Wir wollen nun noch die primitiven Coordinaten p'', q'', r'' des von der dritten Seitenfläche des Prismas reflectirten Strahls mit der ersten Seitenfläche bestimmen. Die Gleichungen der drei Seitenflächen sind, wenn wir die Hypotenuse der Grundfläche des Prismas durch a bezeichnen:

$$x=0,\ x+y-a=0,\ x-y=0\ ^{*}).$$

---

*) M. s. den vorhergehenden Aufsatz.

Also ist

$$A = 1,\ B = 0,\ C = 0;$$
$$A_1 = 1,\ B_1 = 1,\ C_1 = -a;$$
$$A_2 = 1,\ B_2 = -1,\ C_2 = 0;$$

und folglich

$$k_1 = \frac{q' - a}{\sin\lambda + \cos\lambda},\ k_2 = k_1 - \frac{q'}{\sin\lambda - \cos\lambda};$$

also

$$k_1 - k_2 = \frac{q'}{\sin\lambda - \cos\lambda}\ ^{*}).$$

Hieraus ergiebt sich

$$k_1 \cos\lambda + k_2 \cos(2\omega_1 - \lambda) = q' - a - \frac{q' \sin\lambda}{\sin\lambda - \cos\lambda},$$

$$k_1 \sin\lambda + k_2 \sin(2\omega_1 - \lambda) = q' - a - \frac{q' \cos\lambda}{\sin\lambda - \cos\lambda}.$$

Weil nun $p'' = 0$ ist, so ergiebt sich mittelst der ersten der Gleichungen 45) leicht

$$r'' = r' + a \sec\lambda \tang\mu,$$

und mittelst der zweiten der Gleichungen 45) ergiebt sich dann ferner

$$q'' = a - q' - a \tang\lambda.$$

Also ist nach dem Obigen

$$54)\quad \begin{cases} p'' = 0, \\ q'' = a - q' - a \tang\Omega, \\ r'' = r' + a \sec\Omega \tang H. \end{cases}$$

Für $\Omega = 180^\circ$ ist $q'' = a - q'$. Setzt man $\frac{1}{2}a + q'$, $\frac{1}{2}a + q''$ für q', q'', d. h. nimmt man die Mitte der Hypotenuse der Grundfläche des Prismas als Anfang der Coordinaten an, so wird im vorliegenden Falle $q'' = -q'$, welches ein leicht zu deutendes Resultat ist.

*) Man hat hierbei zu bemerken, dass im vorliegenden Falle $p' = 0$ ist.

XXIX.

ine Aufgabe aus der analytischen Geometrie.

Von dem

Herrn Professor C. G. Wunder

an der Königl. Sächs. Landesschule St. Afra zu Meissen.

---

1. In dem 4ten Hefte des 2ten Theiles des Archives befindet h (S. 419. f.) eine Auflösung der Aufgabe: Es ist irgend ein egelschnitt und ein Punkt gegeben. Ziehet man durch n Punkt gerade Linien, welche den Kegelschnitt in rei Punkten durchschneiden; so fragt es sich, auf welem geometrischen Orte die Halbirungspunkte der von m Kegelschnitte begränzten Stücke der letzteren lien? Veranlasst durch die von dem Herrn Herausgeber des Arves am Schlusse dieses Aufsatzes gegebene Nachschrift habe ich e andere von der allgemeinen Gleichung der Linien des zweiten ades ausgehende Behandlung dieser Aufgabe versucht, welche ich r mittheile. Der Kürze und Klarheit wegen halte ich für nög, der Auflösung der Aufgabe selbst folgende allgemeine Bemerngen über die Gleichungen der Kegelschnitte vorauszuschicken.

2. Wenn p der Parameter einer Parabel, $2a$ die grosse oder upt-Axe, $2b$ die kleine oder Neben-Axe einer Ellipse oder Hyrbel bezeichnet, und $a:b=r:s$ gesetzt wird, wo nun r und s ne Zahlen bedeuten; so hat man bekanntlich als einfachste Gleiungen

für die Parabel: $\quad y^2-px=0$ .... (I)

für die Ellipse: $\quad r^2y^2+s^2x^2-r^2b^2=0$ .... (II)

für die Hyperbel: $\quad r^2y^2-s^2x^2+r^2b^2=0$ .... (III)

e senkrechten Coordinaten x, y beziehen sich auf die Axen des egelschnittes, und haben als Anfangspunkt bei der Parabel den heitel der Axe, bei der Ellipse und Hyperbel den Mittelpunkt des gelschnittes; dieser Anfangspunkt sei immer durch K bezeichnet. eraus erhält man die allgemeinste Form der Gleichung für irgend en Kegelschnitt zwischen senkrechten Coordinaten t und u, wenn n $x=t\cos\varphi-u\sin\varphi+\beta$, $y=t\sin\varphi+u\cos\varphi+\alpha$ subtuirt, wo nämlich die Coordinaten t und u sich beziehen auf en Anfangspunkt z, dessen auf die ursprünglichen (in obigen eichungen vorausgesetzten) Coordinatenaxen sich beziehenden ordinaten $x=\beta$ und $y=\alpha$ sind, und auf eine Abscissenaxe

(Axe der t), welche mit der Axe der ersten Abscissen x einen Winkel $= \varphi$ bildet; (der Winkel φ ist von dem positiven Theile der ersten Abscissenaxe aus nach der Seite der positiven Ordinaten hin gerechnet). Die Gleichung, welche man durch Ausführung dieser Substitution und Ordnung der Glieder nach den Potenzen von u und t erhält, soll kurz für die Parabel durch (P), für die Ellipse durch (E), für die Hyperbel durch (H) angedeutet werden.

3. Die allgemeine Gleichung des 2ten Grades zwischen zwei senkrechten Coordinaten u und t hat die Form:

$$Au^2 + Btu + Ct^2 + Du + Et + F = 0 \;\ldots\ldots\; (\mathfrak{A}).$$

Insofern nun dieselbe eine Parabel, oder eine Ellipse, oder eine Hyperbel ausdrückt, sind ihre Coefficienten gleich zu setzen denen der Gleichung (P), oder der Gleichung (E), oder der Gleichung (H). Sieht man die Gleichung ($\mathfrak{A}$) als identisch mit der Gleichung (P) an, so ergiebt sich: $4AC = 4 \sin\varphi^2 \cos\varphi^2 = B^2$. Betrachtet man die Gleichung ($\mathfrak{A}$) als einerlei mit der Gleichung (E), so findet man $4AC = (r^2 - s^2)^2 \sin 2\varphi^2 + 4r^2s^2$, $B^2 = (r^2 - s^2)^2 \sin 2\varphi^2$, also $4AC > B^2$. Setzt man endlich die Coefficienten der Gleichung ($\mathfrak{A}$) gleich denen der Gleichung (H), so ist $4AC = (r^2 + s^2)^2 \sin 2\varphi^2 - 4r^2s^2$, $B^2 = (r^2 + s^2)^2 \sin 2\varphi^2$, also $4AC < B^2$. Demnach wird die Gleichung ($\mathfrak{A}$) nur dann eine Parabel vorstellen können, wenn $4AC = B^2$, eine Ellipse, wenn $4AC > B^2$, eine Hyperbel, wenn $4AC < B^2$ ist.

4. In der Voraussetzung, dass ($\mathfrak{A}$) mit (P) identisch ist, also ($\mathfrak{A}$) eine Parabel bezeichnet, findet man ferner $\sin 2\varphi = B$; dagegen ergiebt sich $\sin 2\varphi = \frac{B}{\sqrt{(A-C)^2 + B^2}}$, wenn die Gleichung ($\mathfrak{A}$) eine Ellipse oder Hyperbel ausdrücken, also mit (E) oder (H) identisch sein soll.

Bezeichnet i die Ordinate (u), k die Abscisse (t) des ursprünglichen Anfangspunktes K, bezogen auf die Coordinatenaxen des neuen Systemes; so findet sich, wenn ($\mathfrak{A}$) eine Parabel ausdrückt:

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} i = \dfrac{-AD^2\sqrt{C} + 2ADE\sqrt{A} + E^2(2A + C)\sqrt{C} - 4F\sqrt{C}}{4(D\sqrt{C} - E\sqrt{A})} \\[2ex] k = -\dfrac{D^2(1 + C)\sqrt{A} - E^2C\sqrt{A} + CDE\sqrt{C} - 4F\sqrt{A}}{4(D\sqrt{C} - E\sqrt{A})}. \end{cases}$$

Wenn aber ($\mathfrak{A}$) eine Ellipse oder Hyperbel bezeichnet, so ist:

$$\text{(II)} \quad i = \frac{BE - 2CD}{4AC - B^2}, \quad k = \frac{BD - 2AE}{4AC - B^2}.$$

Durch φ, i und k wird die Lage der Axen des Kegelschnittes gegen die Axen der Coordinaten u und t, und für die Parabel die Lage ihres Scheitels, für die Ellipse und Hyperbel die Lage des Mittelpunktes bestimmt. Ebenso findet man durch Gleichsetzung der entsprechenden Coefficienten die allgemeinen Formeln zur Bestimmung des Parameters oder der Axen des Kegelschnittes durch die Coefficienten der Gleichung ($\mathfrak{A}$), nämlich:

für die Parabel: (III) $p = D\sqrt{C} - E\sqrt{A}$;

für die Ellipse:

$$(\text{IV})\quad \frac{r}{s}=\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{4AC-B^2}}{A+C-\sqrt{(A-C)^2+B^2}}$$

$$(\text{V})\quad a^2=\frac{CD^2+AE^2-2BDE-(4AC-B^2)F}{(4AC-B^2)\left[\frac{1}{2}(A+C)-\frac{1}{2}\sqrt{(A-C)^2+B^2}\right]}$$

$$(\text{VI})\quad b^2=\frac{CD^2+AE^2-2BDE-(4AC-B^2)F}{(4AC-B^2)\left[\frac{1}{2}(A+C)+\frac{1}{2}\sqrt{(A-C)^2+B^2}\right]}$$

für die Hyperbel:

$$(\text{VII})\quad \frac{r}{s}=\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{B^2-4AC}}{-\frac{1}{2}(A+C)+\frac{1}{2}\sqrt{(A-C)^2+B^2}}$$

$$(\text{VIII})\quad a^2=\frac{CD^2+AE^2-2BDE+(B^2-4AC)F}{(B^2-4AC)\left[-\frac{1}{2}(A+C)+\frac{1}{2}\sqrt{(A-C)^2+B^2}\right]}$$

$$(\text{IX})\quad b^2=\frac{CD^2+AE^2-2BDE+(B^2-4AC)F}{(B^2-4AC)\left[\frac{1}{2}(A+C)+\frac{1}{2}\sqrt{(A-C)^2+B^2}\right]}$$

5. Indem wir uns nun zu unserer Aufgabe wenden, setzen wir für immer fest, dass der gegebene Punkt durch Z, seine auf die Axen des Kegelschnittes und bei der Parabel auf den Scheitel der Axe, bei der Ellipse und Hyperbel auf den Mittelpunkt als Anfangspunkt sich beziehenden Coordinaten durch α und β, der Scheitel der Parabel aber, so wie der Mittelpunkt der Ellipse und Hyperbel durch K bezeichnet werde. Ferner nehmen wir an, was offenbar verstattet ist, der gegebene Kegelschnitt sei ausgedrückt durch eine Gleichung zwischen rechtwinklichen Coordinaten u und t, für welche der gegebene Punkt Z der Anfangspunkt ist; die Gleichung (𝔄) in §. 3. kann also im Allgemeinen die Gleichung des gegebenen Kegelschnittes vorstellen, und jede durch Z gelegte gerade Linie wird nun bezeichnet durch die Gleichung:

$$u=Pt\;\ldots.\quad(1)$$

Durch Verbindung der Gleichungen (𝔄) und (1) findet man für die Coordinaten der Punkte, in welchen eine solche gerade Linie den Kegelschnitt schneidet, die Werthe:

$$t=-\frac{DP+E}{2(AP^2+BP+C)}\pm\frac{\sqrt{(DP+E)^2-4(AP^2+BP+C)F}}{2(AP^2+BP+C)}$$

$$u=-\frac{(DP+E)P}{2(AP^2+BP+C)}\pm\frac{P\sqrt{(DP+E)^2-4(AP^2+BP+C)F}}{2(AP^2+BP+C)F}.$$

Der rationale Theil des Werthes von t bezeichnet die Abscisse, des Werthes von u die Ordinate des Punktes, in welchem der zwischen den Kegelschnitt fallende Abschnitt der geraden Linie halbirt wird;

deutet man also die Abscisse durch t', die Ordinate durch u' an, so hat man die Gleichungen:

$$(2)\quad t' = -\frac{DP+E}{2(AP^2+BP+C)} \quad \text{und} \quad (3)\quad u' = -\frac{(DP+E)P}{2(AP^2+BP+C)}.$$

Die Werthe von t' und u' ändern sich mit dem Werthe von P; eliminirt man aber P aus den Gleichungen (2) und (3), so drückt das Resultat die Beziehung zwischen den beiden Coordinaten jedes solchen Punktes aus, welcher den zwischen den Kegelschnitt fallenden Abschnitt der geraden Linie halbirt, die durch diesen Punkt selbst und den Punkt Z gelegt wird; das Resultat ist also die Gleichung der gesuchten Curve. Entwickelt man die Gleichungen (2) und (3), ordnet die Glieder nach Potenzen von P, und subtrahirt sie von einander, nachdem man ein Mal (2) durch $(Au'+\frac{1}{2}D)$, (3) durch At', und dann (2) durch Cu', (3) durch $(Ct'+E)$ multiplicirt hat; so erhält man leicht zwei Gleichungen, davon jede nur die erste Potenz von P enthält. Durch Elimination der Grösse P aus diesen letzten Gleichungen erhält man ein Resultat, welches, nach Potenzen von u' und t' geordnet, durch (AE^2+CD^2-BDE) theilbar ist; so gelangt man zuletzt, wenn die Accente von u und t weggelassen werden, zu der Gleichung:

$$Au^2+Btu+Ct^2+\tfrac{1}{2}Du+\tfrac{1}{2}Et=0 \;\ldots.\; (\mathfrak{B})$$

welches die Gleichung der gesuchten Curve ist.

6. Durch Betrachtung der Gleichung ($\mathfrak{B}$) ergiebt sich Folgendes:

I. Da die drei ersten Coefficienten der Gleichung ($\mathfrak{B}$) ganz dieselben sind, als in der Gleichung ($\mathfrak{A}$), und nach §. 3. nur von diesen die Art des durch die Gleichung ausgedrückten Kegelschnittes abhängt; so ist die neue Curve immer ein Kegelschnitt von derselben Art, als der gegebene.

II. Dieser neue Kegelschnitt, der nun immer der zweite genannt werden soll, gehet allezeit durch den Punkt Z; denn in der Gleichung ($\mathfrak{B}$) fehlt das beständige Glied.

III. Die Axen des zweiten Kegelschnittes sind immer parallel mit den Axen des gegebenen; denn die Formeln zur Bestimmung des Winkels φ geben für die beiden Gleichungen ($\mathfrak{A}$) und ($\mathfrak{B}$) ganz dieselben Werthe (vergl. §. 4.).

IV. Wenn der erste Kegelschnitt eine Ellipse oder Hyperbel ist, so liegt der Mittelpunkt des zweiten Kegelschnittes immer in der Mitte der geraden Linie, welche die Punkte K und Z verbindet; denn sind i' und k' die Coordinaten des Mittelpunktes des zweiten Kegelschnittes, so findet man nach §. 4.: $i'=\frac{1}{2}i$, $k'=\frac{1}{2}k$.

V. Ist der erste Kegelschnitt eine Parabel, so ist der Parameter der zweiten Parabel die Hälfte des Parameters der ersten (folgt aus §. 4. III., weil $D'=\frac{1}{2}D$, $E'=\frac{1}{2}E$ ist, wenn D', E' Coefficienten der Gleichung ($\mathfrak{B}$) bezeichnen); ist er aber eine Ellipse oder Hyperbel, so ist das Verhältniss der beiden Axen, also auch die Excentricität in dem zweiten Kegelschnitte dieselbe als im ersten (folgt aus §. 4. IV. und VII.).

7. Offenbar ist es willkührlich, welche Lage man den Axen der Coordinaten u und t geben will, wenn nur Z als Anfangspunkt genommen wird. Um daher die weiteren Betrachtungen zu vereinfachen, darf man annehmen, dass die Axen der Coordinaten u und t parallel seien den ursprünglichen Axen der y und x, d. i. den Axen des Kegelschnittes, in welchem Falle $\varphi = 0$ ist. Hierdurch erhält man nach §. 2. als Gleichung des ersten gegebenen Kegelschnittes
für die Parabel:

$$u^2 + 2\alpha u - pt + \alpha^2 - p\beta = 0 \;\ldots\ldots\; (\mathfrak{P})$$

für die Ellipse:

$$r^2u^2 + s^2t^2 + 2\alpha r^2 u + 2\beta s^2 t + r^2\alpha^2 + s^2\beta^2 - r^2b^2 = 0 \;\ldots\; (\mathfrak{E})$$

für die Hyperbel:

$$r^2u^2 - s^2t^2 + 2\alpha r^2 u - 2\beta s^2 t + r^2\alpha^2 - s^2\beta^2 + r^2b^2 = 0 \;\ldots\; (\mathfrak{H})$$

Wie diese drei Gleichungen enthalten sind in der allgemeinen Gleichung ($\mathfrak{A}$) (§. 3.), so soll der zweite Kegelschnitt überhaupt ausgedrückt sein durch die Gleichung:

$$A'u^2 + B'tu + C't^2 + D'u + E't + F' = 0 \;\ldots\; (\mathfrak{C})$$

so dass also nach der Gleichung ($\mathfrak{B}$) in §. 5. immer ist:

$$A' = A,\; B' = B,\; C' = C,\; D' = \tfrac{1}{2}D,\; E' = \tfrac{1}{2}E,\; F' = 0.$$

Ebenso sollen die Buchstaben a', b', r', s', p', i', k' dieselbe Bedeutung in Beziehung auf den zweiten Kegelschnitt haben, als die entsprechenden a, b, r, s, p, i, k für den ersten.

8. Ehe wir uns zu den besonderen Arten der Kegelschnitte wenden, mögen noch die allgemeinen Formeln für die Coordinaten der Punkte angegeben werden, in welchen der erste Kegelschnitt von dem zweiten geschnitten wird. Man erhält dieselben durch Verbindung der Gleichungen ($\mathfrak{A}$) und ($\mathfrak{B}$), nämlich:

$$t = \frac{(BD - 2AE)F \pm D\sqrt{F}\sqrt{(B^2 - 4AC)F + M^2}}{M^2} \;\ldots\; (\mathrm{I})$$

$$u = \frac{(BE - 2CD)F \mp E\sqrt{F}\sqrt{(B^2 - 4AC)F + M^2}}{M^2} \;\ldots\; (\mathrm{II})$$

wo $M^2 = AE^2 + CD^2 - BDE$ gesetzt ist.

9. Sei nun zuerst der gegebene Kegelschnitt, also auch der zweite eine Parabel. Die erste Parabel wird durch die Gleichung ($\mathfrak{P}$) §. 7. ausgedrückt, so dass also hier $A = 1$, $B = 0 = C$, $D = 2\alpha$, $E = -p$, $F = \alpha^2 - p\beta$ ist. Demnach hat man für die zweite Parabel $A' = 1$, $B' = 0 = C'$, $D' = \alpha$, $E' = -\frac{1}{2}p$, $F' = 0$. Man findet daher ausser $p' = \frac{1}{2}p$ (§. 4. III.), was nach §. 6. V. schon bekannt ist, weiter nach §. 4. I.:

$$(\mathrm{I})\;\; i' = -\tfrac{1}{2}\alpha; \quad (\mathrm{II})\;\; k' = -\frac{\alpha^2}{2p}.$$

Aus (I) ergiebt sich, dass die Axe der zweiten Parabel, welche ¦ rallel mit der Axe der ersten ist (§. 6. III.), durch die Mitte ¦ Verbindungslinie KZ geht. Hierdurch mit Rücksicht auf (II) w sehr leicht der Scheitel der zweiten Parabel gefunden.

10. Für die Schneidungspunkte der beiden Parabeln sind n §. 8. die Coordinaten:

$$u = \pm \sqrt{\alpha^2 - p\beta}, \quad t = \frac{\alpha^2 - p\beta}{\frac{1}{2}p} \pm \frac{\alpha\sqrt{\alpha^2 - p\beta}}{\frac{1}{2}p},$$

welche Werthe immer möglich sind, wenn $\alpha^2 - p\beta > 0$, d. i. w Z ausserhalb der ersten Parabel liegt. Bei $\alpha^2 - p\beta = 0$ berüh sich beide Parabeln in dem Punkte Z. Da die Ordinaten die Schneidungspunkte absolut gleiche aber entgegengesetzte Wer haben; so muss die Verbindungslinie derselben, d.i. die gemeinsa Sehne beider Parabeln durch die Abscissenaxe (Axe der t) hal werden. Hieraus folgt wieder nach einer bekannten Eigensch der Parabel, dass die gerade Linie, welche die zweite Parabel dem Punkte Z berührt, und ebenso die gerade Linie, welche erste Parabel in dem Punkte berührt, wo die erste Parabel von Axe der t geschnitten wird, parallel sein muss mit der Verb dungslinie jener Schneidungspunkte. Dasselbe findet man auch folgende Weise. Seien L und N jene beiden Schneidungspunk so dass für L die Coordinaten $u_1 = \sqrt{\alpha^2 - p\beta}$ und $t_1 = \frac{\alpha^2 -}{\frac{1}{2}p}$ $+ \frac{\alpha\sqrt{\alpha^2 - p\beta}}{\frac{1}{2}p}$, für N aber $u_2 = -\sqrt{\alpha^2 - p\beta}$ und $t_2 = \frac{\alpha^2 -}{\frac{1}{2}p}$ $- \frac{\alpha\sqrt{\alpha^2 - p\beta}}{\frac{1}{2}p}$ sind. Da nun $\frac{u_1 - u_2}{t_1 - t_2} = \frac{p}{2\alpha}$ ist, so hat man für durch L und N gehende gerade Linie die Gleichung:

$$u - u_1 = \frac{p}{2\alpha}(t - t_1) \ldots . \quad (1)$$

Nach der bekannten Eigenschaft der Parabel findet man für Gerade, welche die zweite Parabel im Punkte Z berührt, zunäc die Gleichung: $u = \frac{i'}{2k'}t$; setzt man nun hier die oben (§. 9.) ¦ fundenen Werthe für i' und k', so erhält man für diese Tange die Gleichung:

$$u = \frac{p}{2\alpha}t \ldots . \quad (2)$$

Für den Punkt O, in welchem die erste Parabel von der A der t geschnitten wird, sind die auf die Axe und den Scheitel di ser Parabel bezogenen Coordinaten $y' = \alpha$, $x' = \frac{\alpha^2}{p}$; daher ergi sich für die Gerade, welche die erste Parabel in O berührt, Gleichung: $u = \frac{y'}{2x'}[t - (x' - \beta)]$, d. i. durch obige Werthe:

$$u = \frac{p}{2\alpha}\left[t - \left(\frac{\alpha^2}{p} - \beta\right)\right] \ldots . \quad (3)$$

Da nun in allen drei Gleichungen (1), (2), (3) der Coefficient von t derselbe $= \frac{p}{2\alpha}$ ist, so folgt hieraus, dass die geraden Linien, welche diesen Gleichungen entsprechen, sämmtlich unter einander parallel sind.

11. Wenn Z ausserhalb der ersten Parabel liegt, also $\alpha^2 - p\beta > 0$ ist, so wird die erste Parabel von der geraden Linie ZL in L, von der geraden Linie ZN in N berührt. Wenn wieder u_1 und t_1 die Coordinaten des Punktes L bezeichnen, so hat man für die gerade Linie ZL die Gleichung: $u = \frac{u_1}{t_1}t$, oder zwischen Coordinaten x, y auf den Anfangspunkt K und die Axe der Parabel bezogen, und wenn man für $\frac{u_1}{t_1}$ den aus §. 10. sich ergebenden Werth substituirt:

$$y - \alpha = \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - p\beta}}{2\beta}(x - \beta).$$

Für $y = 0$ findet man hieraus für x den Werth: $x = -\frac{(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - p\beta})^2}{p}$. Da aber für den Punkt L die auf die Axe der ersten Parabel bezogene Ordinate $= \alpha + u_1 = \alpha + \sqrt{\alpha^2 - p\beta}$ ist, so wird für denselben Punkt die Abscisse, auf der Axe vom Scheitel aus genommen, ausgedrückt durch $\frac{(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - p\beta})^2}{p}$. Vergleicht man dieses mit obigem Werthe von x, d. i. mit der Abscisse des Punktes, in welchem die Axe der Parabel von ZL geschnitten wird, so ergiebt sich aus der Natur der Parabel, dass sie in L von ZL berührt wird. Ganz ähnlich ist der Beweis für die Linie ZN.

12. Wenn der gegebene Punkt Z auf der ersten Parabel liegt, also $\alpha^2 - p\beta = 0$ ist, so hat man für den Scheitel der zweiten Parabel nach §. 9. die Coordinaten $i' = -\frac{1}{2}\alpha$, $k' = -\frac{1}{2}\beta$; der Scheitel der zweiten Parabel liegt also dann in der Mitte der Verbindungslinie der Punkte K und Z. Leicht erkennt man nun auch das Umgekehrte als richtig: wenn man von irgend einem Punkte einer Parabel beliebig viele Sehnen zieht, und jede Sehne um ein ihrer eignen Grösse gleiches Stück verlängert, so liegen die Endpunkte dieser Verlängerungen wieder auf einer Parabel, deren Parameter das Doppelte von dem Parameter der ersten Parabel ist; die Axen beider Parabeln sind parallel, und der Scheitel der zweiten ist der Endpunkt der Verlängerung von der Sehne, welche nach dem Scheitel der ersten gezogen ist; in dem Punkte Z berühren sich beide Parabeln (vergl. §. 10.).

13. Sei nun der gegebene Kegelschnitt eine Ellipse, also ausgedrückt durch die Gleichung (𝔈) in §. 7.; demnach ist jetzt $A = r^2$, $B = 0$, $C = s^2$, $D = 2\alpha r^2$, $E = 2\beta s^2$, $F = r^2\alpha^2 + s^2\beta^2 - r^2b^2$, daher für den zweiten Kegelschnitt, ebenfalls eine Ellipse, $A' = r^2$, $B' = 0$, $C' = s^2$, $D' = \alpha r^2$, $E' = \beta s^2$, $F' = 0$, folglich die Gleichung dieser Ellipse:

$$r^2u^2 + s^2t^2 + \alpha r^2 u + \beta s^2 t = 0.$$

Die **Lage** des Mittelpunktes und der Axen der zweiten Ellipse sind nach §. 6. III. und IV. schon bestimmt; für die **Grösse** der Axen hat man jetzt nach §. 4. V. und VI.:

$$a'^2 = \frac{r^2\alpha^2 + s^2\beta^2}{4s^2} = \left(\frac{r}{s}\cdot\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{2}\right)^2 \;\ldots.\; \text{(I)}$$

$$b'^2 = \frac{r^2\alpha^2 + s^2\beta^2}{4r^2} = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(\frac{s}{r}\cdot\frac{\beta}{2}\right)^2 \;\ldots.\; \text{(II)}$$

Der Parameter p' der zweiten Ellipse ist daher

$$p' = \frac{2b'^2}{a'} = \frac{s}{r}\sqrt{\alpha^2 + (\frac{s}{r}\beta)^2} \;\ldots.\; \text{(III)}$$

14. Sind wieder L und N die Schneidungspunkte der beiden Ellipsen, u_1 und t_1 für L, u_2 und t_2 für N die Coordinaten, und setzt man der Kürze wegen $r^2\alpha^2 + s^2\beta^2 - r^2b^2 = m^2$, also $r^2\alpha^2 + s^2\beta^2 = m^2 + r^2b^2 = m^2 + s^2a^2$; so ist nach §. 8.:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \frac{-\alpha m^2 - sb\beta m}{r^2\alpha^2 + s^2\beta^2}, & t_1 &= \frac{-\beta m^2 + ra\alpha m}{r^2\alpha^2 + s^2\beta^2} \\ u_2 &= \frac{-\alpha m^2 + sb\beta m}{r^2\alpha^2 + s^2\beta^2}, & t_2 &= \frac{-\beta m^2 - ra\alpha m}{r^2\alpha^2 + s^2\beta^2} \end{aligned}\right\} \text{(I)}$$

Daher für dieselben Punkte die Coordinaten y_1, x_1, y_2, x_2 auf den Mittelpunkt und die Axen der ersten Ellipse bezogen:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \frac{r^2b^2\alpha - sb\beta m}{r^2\alpha^2 + s^2\beta^2}, & x_1 &= \frac{s^2a^2\beta + ra\alpha m}{r^2\alpha^2 + s^2\beta^2} \\ y_2 &= \frac{r^2b^2\alpha + sb\beta m}{r^2\alpha^2 + s^2\beta^2}, & x_2 &= \frac{s^2a^2\beta - ra\alpha m}{r^2\alpha^2 + s^2\beta^2} \end{aligned}\right\} \text{(II)}$$

Diese doppelten Werthe werden gleich, d. h. die Punkte L und N fallen in **einen** zusammen, in welchem die Ellipsen sich berühren, wenn $m = 0$, d. i. wenn $r^2\alpha^2 + s^2\beta^2 = r^2b^2 = s^2a^2$ ist, also der Punkt Z auf der ersten Ellipse selbst liegt; es wird dann $y_1 = y_2 = \alpha$, $x_1 = x_2 = \beta$. Unmöglich aber werden beide Werthe, wenn $r^2\alpha^2 + s^2\beta^2 < r^2b^2$, also $\alpha < \frac{s}{r}\sqrt{a^2 - \beta^2}$ ist, d. h. wenn der gegebene Punkt Z innerhalb der ersten Ellipse liegt.

15. Durch Benutzung obiger Werthe für y_1, x_1, y_2, x_2 erhält man für die durch L und N gehende Gerade die Gleichung: $y = -\frac{s^2\beta}{r^2\alpha}x + \frac{b^2}{\alpha}$. Für $y = 0$ findet sich hiernach $x = \frac{r^2b^2}{s^2\beta} = \frac{a^2}{\beta}$. Hieraus ergiebt sich nach einer bekannten Eigenschaft der Ellipse, dass die Linie LN die verlängerte grosse Axe der ersten Ellipse in demselben Punkte schneidet, in welchem diese Axe geschnitten wird von einer Tangente der ersten Ellipse, deren Berührungspunkt die Abscisse $= \beta$ hat; es ist dieses einer der Punkte, in welchen der von Z auf die grosse Axe gefällte Perpendikel die erste Ellipse schneidet, wenn nur $\beta < a$ ist.

16. Legt man durch Z eine gerade Linie (λ) parallel mit LN, so findet man mit Rücksicht auf die Gleichung der Linie LN (§. 15.) für (λ) die Gleichung:

$$y=-\frac{s^2\beta}{r^2\alpha}x+\frac{r^2\alpha^2+s^2\beta^2}{r^2\alpha}\ \ldots\ldots\ (\mathrm{I})$$

Oder wenn man den Mittelpunkt $\mathfrak{K}$ der zweiten Ellipse als Anfangspunkt, die Axen dieser Ellipse als Coordinatenaxen annimmt, und die darauf sich beziehenden Coordinaten durch $'y$ und $'x$ bezeichnet, so erhält man für (λ) die Gleichung:

$$'y=-\frac{s^2\beta}{r^2\alpha}{}'x+\frac{r^2\alpha^2+s^2\beta^2}{2r^2\alpha}\ \ldots\ldots\ (\mathrm{II})$$

Setzt man in dieser letzten Gleichung $'y=0$, so findet man für den Punkt, in welchem die verlängerte grosse Axe der zweiten Ellipse von (λ) geschnitten wird, den Werth der Abscisse: $'x=\frac{r^2\alpha^2+s^2\beta^2}{2s^2\beta}=\frac{a'^2}{\frac{1}{2}\beta}$ (vergl. §. 13. I.). Da aber $\frac{1}{2}\beta$ die Abscisse des Punktes Z der zweiten Ellipse ist, durch welchen die Linie (λ) gehet, so ergiebt sich aus dem hier gefundenen Werthe von $'x$ nach der schon vorhin benutzten Eigenschaft der Ellipse, dass die zweite Ellipse von der Linie (λ) in Z berührt wird. Demnach ist die gemeinsame Sehne beider Ellipsen mit der dem Punkte Z zugehörigen Tangente der zweiten Ellipse parallel, und wird folglich durch die gerade Linie KZ halbirt.

17. Für die Punkte G und G', in welchen die erste Ellipse von der Geraden KZ geschnitten wird, findet man leicht die Coordinaten $y=\pm\frac{rb\alpha}{\sqrt{r^2\alpha^2+s^2\beta^2}}$, $x=\pm\frac{rb\beta}{\sqrt{r^2\alpha^2+s^2\beta^2}}$. Daher wird die durch einen dieser Punkte, z. B. durch G gehende gerade Linie, welche parallel ist mit der gemeinsamen Sehne LN, ausgedrückt durch die Gleichung $y=-\frac{s^2\beta}{r^2\alpha}x+\frac{b}{r\alpha}\sqrt{r^2\alpha^2+s^2\beta^2}$. Setzt man hier wieder $y=0$, so findet man für den Punkt, in welchem diese Linie die verlängerte grosse Axe der ersten Ellipse schneidet, die Abscisse:

$$x=\frac{rb\sqrt{r^2\alpha^2+s^2\beta^2}}{s^2\beta}=\frac{a\sqrt{r^2\alpha^2+s^2\beta^2}}{s\beta}=a^2:\frac{rb\beta}{\sqrt{r^2\alpha^2+s^2\beta^2}}.$$

Da aber $\frac{rb\beta}{\sqrt{r^2\alpha^2+s^2\beta^2}}$ die Abscisse des Punktes G der Ellipse ist, durch welchen die betrachtete gerade Linie gehet, so ergiebt sich aus dem hier gefundenen Werthe von x, dass diese Gerade die Ellipse in G berührt. Aehnliches gilt von der durch den anderen Punkt G' gelegten Parallele mit LN. Immer also sind die den Punkten Z und K zugehörigen Tangenten der zweiten Ellipse parallel mit den Tangenten der ersten für die Punkte, in welchen die erste Ellipse von der geraden Linie KZ geschnitten wird; und wenn Z ausserhalb der ersten Ellipse liegt, also beide Ellipsen sich

schneiden, so ist auch die ihnen gemeinsame Sehne p rallel mit jenen Tangenten.

18. Wenn Z ausserhalb der ersten Ellipse liegt, und $\beta <$ ist, so ergiebt sich aus §. 15. und §. 17. ein leichtes Verfahren, Schneidungspunkte L und N beider Ellipsen zu finden, ohne d die zweite Ellipse construirt zu werden braucht.

19. Liegt Z ausserhalb der ersten Ellipse, so wi letztere von der geraden Linie ZL in L, von ZN in berührt. Durch die Coordinaten des Punktes L, x_1 und (§. 14. II.) findet man, weil $r^2\alpha^2 + s^2\beta^2 = m^2 + r^2b^2 =$ $+ s^2a^2$ ist, für die Linie ZL die Gleichung: $y - \alpha = \frac{sb\beta + \alpha m}{\beta m - ra\alpha}(x -$

Für $y = 0$ erhält man hieraus: $x = \frac{ra\alpha^2 + sb\beta^2}{sb\beta + \alpha m} = \frac{r^2a^2\alpha^2 + rsa}{rsab\beta + ra\alpha}$ $= a^2 : \frac{s^2a^2\beta + ra\alpha m}{r^2\alpha^2 + s^2\beta^2}$, woraus die Richtigkeit der Behauptung ZL folgt. Aehnlich ist der Beweis für ZN.

20. Wenn der Punkt Z auf der gegebenen Ellipse liegt, al $r^2\alpha^2 + s^2\beta^2 = r^2b^2 = s^2a^2$ ist, so findet man aus den Form (I) und (II) in §. 13. leicht, dass dann die Axen der zweit Ellipse beziehungsweise gleich sind den Hälften d Axen der ersten Ellipse. Da dieses gilt, welcher Punkt Umfanges der ersten Ellipse für Z genommen werden mag, so fo nebenbei hieraus auch, dass eine Ellipse, deren Axen beziehun weise gleich sind den Hälften der Axen einer anderen Ellipse, i mer in diese andere so gelegt werden kann, dass sie durch der Mittelpunkt gehet, dieselbe in einem gegebenen Punkte berüh und ihre Axen den gleichnamigen Axen der anderen Ellipse par lel sind.

21. Durch Umkehrung des Vorausgehenden ergiebt sich n auch folgender Satz: wenn von irgend einem Punkte Z des U fanges einer Ellipse beliebig viele Sehnen gezogen, und abwä von jenem Punkte verlängert werden um ein Stück, das der Seh selbst gleich ist, so liegen die Endpunkte dieser Verlängerung auf einer Ellipse, deren Axen das Doppelte von den gleichnamig Axen der ersten Ellipse und mit diesen parallel sind; der Mitt punkt der neuen Ellipse ist der zweite Endpunkt des von Z au gehenden Durchmessers der ersten Ellipse, und beide Ellipsen b rühren sich in Z. Dieser Satz ist indessen ebenso wie der ob in §. 12. erwähnte nur ein besonderer Fall eines allgemeinere den wir nachher aussprechen und beweisen werden.

22. Alles hier in Betreff der Ellipse Gefundene gilt im Allg meinen auch, wenn der gegebene Kegelschnitt, also auch d zweite ein Kreis ist, nur mit einigen Modificationen. In diese Falle ist nämlich $a = b$, $r = s = 1$ zu setzen; wenn daher d Halbmesser des neuen Kreises durch ϱ bezeichnet wird, währe der des gegebenen $= a$ ist, so hat man hier $\varrho = \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 + \beta}$ Liegt Z ausserhalb des ersten Kreises, ist also $\alpha^2 + \beta^2 > a^2$, schneiden sich beide Kreise in zwei Punkten L und N, für der Coordinaten hier die Formeln gelten: $y = \frac{a^2\alpha \mp a\beta m}{\alpha^2 + \beta^2}$, $x = \frac{a^2\beta \pm a\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}$ wo nun $m = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - a^2}$ ist. Für die gerade Linie, we che durch diese Schneidungspunkte gehet, hat man daher die Gle

chung: $y = -\frac{\beta}{\alpha}x + \frac{a^2}{\alpha}$. Da aber für die Gerade KZ auch hier die Gleichung $y = \frac{\alpha}{\beta}x$ gilt, so ergiebt sich aus der Form dieser beiden Gleichungen, dass die gemeinsame Sehne LN unter rechten Winkeln von der Linie KZ geschnitten wird. Auf eine sehr einfache Weise folgt nun hieraus der Parallelismus dieser Sehne mit den oben bezeichneten Tangenten (vergl. §. 16. 17.).

23. Wenn der erste Kegelschnitt eine Hyperbel ist, ausgedrückt durch die Gleichung ($\mathfrak{H}$) in §. 7., so ist auch der zweite eine Hyperbel, für welche die Gleichung gilt:

$$r^2u^2 - s^2t^2 + \alpha r^2 u - \beta s^2 t = 0.$$

Für die Grösse der Axen findet man (§. 4. VIII. und IX.): $a'^2 = \frac{s^2\beta^2 - r^2\alpha^2}{4s^2}$, $b'^2 = \frac{s^2\beta^2 - r^2\alpha^2}{4r^2}$. Zu den Schneidungspunkten L und N beider Hyperbeln gehören die Coordinaten: $y = \frac{r^2b^2\alpha \pm sb\beta m}{s^2\beta^2 - r^2\alpha^2}$, $x = \frac{s^2a^2\beta \pm ra\alpha m}{s^2\beta^2 - r^2\alpha^2}$, wo $m^2 = r^2b^2 - s^2\beta^2 + r^2\alpha^2$ angenommen ist, daher auch $s^2\beta^2 - r^2\alpha^2 = r^2b^2 - m^2 = s^2a^2 - m^2$ ist. Die durch L und N gelegte gerade Linie hat zur Gleichung: $y = \frac{s^2\beta}{r^2\alpha}x - \frac{b^2}{\alpha}$. Für $y = 0$ wird $x = \frac{r^2b^2}{s^2\beta} = \frac{a^2}{\beta}$; daher gilt hier eine ähnliche Bemerkung, als oben §. 15. bei der Ellipse gemacht worden ist. Für die durch Z gelegte Parallele mit LN gilt zwischen den Coordinaten $'x$ und $'y$ auf die Axen und den Mittelpunkt der zweiten Hyperbel bezogen die Gleichung: $'y = \frac{s^2\beta}{r^2\alpha}'x - \frac{1}{2}\cdot\frac{s^2\beta^2 - r^2\alpha^2}{r^2\alpha}$. Für $'y = 0$ wird $'x = \frac{s^2\beta^2 - r^2\alpha^2}{2s^2\beta} = \frac{a'^2}{\frac{1}{2}\beta}$, woraus hervorgeht, dass diese Parallele die zweite Hyperbel in Z berührt. Zu den Punkten G und G', in welchen die erste Hyperbel von der geraden Linie KZ geschnitten wird, gehören die Coordinaten $x = \pm\frac{rb\beta}{\sqrt{s^2\beta^2 - r^2\alpha^2}}$, $y = \pm\frac{rb\alpha}{\sqrt{s^2\beta^2 - r^2\alpha^2}}$. Die durch G gehende Parallele mit LN hat zur Gleichung: $y = \frac{s^2\beta}{r^2\alpha}x - \frac{b}{r\alpha}\sqrt{s^2\beta^2 - r^2\alpha^2}$. Für $y = 0$ wird $x = \frac{rb\sqrt{s^2\beta^2 - r^2\alpha^2}}{s^2\beta} = a^2 : \frac{rb\beta}{\sqrt{s^2\beta^2 - r^2\alpha^2}}$, woraus folgt, dass diese Linie die erste Hyperbel in G berührt. Aehnliches gilt von der Parallele durch G'. Die dem Punkte Z zugehörige Tangente der zweiten Hyperbel ist also mit den Tangenten der ersten Hyperbel für die Punkte G und G' parallel, und wenn die Hyperbeln sich schneiden, so ist auch die gemeinsame Sehne mit jenen Tangenten parallel. Die durch Z und L gelegte Gerade hat zur Gleichung: $y - \alpha = \frac{\alpha m + sb\beta}{\beta m + r\alpha\alpha}(x - \beta)$; $y = 0$ wird $x = a^2 : \frac{r\alpha\alpha m + s^2a^2\beta}{s^2\beta^2 - r^2\alpha^2}$; mit Rücksicht auf den th der Abscisse des Punktes L ergiebt sich hieraus, dass die ade ZL die erste Hyperbel in L berührt. Ebenso findet

man, dass ZN die Hyperbel in N berührt; beide Mal wird aber vorausgesetzt, dass Z ausserhalb der ersten Hyperbel liegt.

24. Wenn der gegebene Punkt Z auf der Hyperbel selbst liegt, d. i. wenn $s^2\beta^2 - r^2\alpha^2 = r^2b^2 = s^2a^2$ ist, so sind die Axen der zweiten Hyperbel gleich den Hälften der gleichnamigen Axen der ersten, und durch Umkehrung lässt sich hieraus auch für die Hyperbel ein Satz, analog den in §. 12. und §. 21. ausgesprochenen, aufstellen. Es soll aber jetzt noch der allgemeinere Satz bewiesen werden, von welchem die gedachten nur besondere Fälle sind; dieser allgemeine Satz ist folgender.

25. Wenn man von einem auf dem Umfange irgend eines Kegelschnittes beliebig gewählten Punkte Z irgend wie viele Sehnen zieht, und von Z aus auf jeder Sehne selbst, oder nach der entgegengesetzten Seite hin auf ihrer Verlängerung einen Abschnitt so bestimmt, dass das Verhältniss zwischen diesem Abschnitte und der zugehörigen Sehne überall dasselbe ist, so liegen die Endpunkte aller Abschnitte auf einem zweiten Kegelschnitte von derselben Art, als der gegebene.

Beweis. Der gegebene Kegelschnitt sei ausgedrückt durch eine Gleichung zwischen rechtwinklichen Coordinaten u und t, die den Punkt Z zum Anfangspunkte haben; so muss, weil dieser Punkt auf dem Kegelschnitte selbst liegt, diese Gleichung die Form haben:

$$Au^2 + Btu + Ct^2 + Du + Et = 0 \;\ldots\ldots\; (\mathrm{I})$$

Jede von Z ausgehende gerade Linie wird vorgestellt durch die Gleichung: $u = Pt$, und schneidet den Kegelschnitt noch in einem zweiten Punkte V, dessen Coordinaten sind:

$$t = -\frac{DP+E}{AP^2+BP+C},\quad u = -\frac{(DP+E)P}{AP^2+BP+C} \;\ldots\ldots\; (\mathrm{II})$$

Wird nun auf der Sehne ZV, oder auf deren Verlängerung über Z hinaus der Abschnitt ZW so bestimmt, dass $ZV : ZW = 1 : n$ sich verhält, wo n irgend eine ganze oder gebrochene Zahl bedeutet, so erkennt man leicht, dass die dem Punkte W zugehörigen Coordinaten diese Werthe haben müssen:

$$t = -\frac{n(DP+E)}{AP^2+BP+C},\quad u = -\frac{n(DP+E)P}{AP^2+BP+C} \;\ldots\ldots\; (\mathrm{III})$$

Eliminirt man aus den beiden Gleichungen (III) die Grösse P, so muss das Resultat die Gleichung der Curve sein, welche der geometrische Ort der Endpunkte aller von Z aus bestimmten Abschnitte jener Sehnen ist (vergl. §. 5.). Die wirkliche Ausführung dieser Elimination aber giebt (auf dem in §. 5. befolgten Wege) zuletzt folgende Gleichung:

$$Au^2 + Btu + Ct^2 + nDu + nEt = 0 \;\ldots\ldots\; (\mathrm{IV})$$

Da nun die drei ersten Coefficienten dieser Gleichung identisch sind mit den entsprechenden Coefficienten der Gleichung (I), so folgt hieraus nach §. 3., dass die der Gleichung (IV) entsprechende Cur-

ein Kegelschnitt von ganz derselben Art ist, als der durch die Gleichung (I) bezeichnete.

26. Man nehme an, was offenbar erlaubt ist, dass die Axen der Coordinaten u und t der Gleichung (I), also auch die der Gleichung (IV), parallel seien den Axen des gegebenen Kegelschnittes; der Mittelpunkt dieses Kegelschnittes (bei der Parabel der Scheitel der Axe) werde wieder durch K, der Mittelpunkt des neuen durch $\mathfrak{K}$ bezeichnet, und α und β seien die Coordinaten des Punktes Z bezogen auf den Anfangspunkt K und die Axen des ersten Kegelschnittes. Die Gleichung (I) in §. 25. hat daher hier folgende Form: für die Parabel:

$$u^2 + 2\alpha u - pt = 0 \ \ldots . \ \text{(II)}$$

für die Ellipse:

$$r^2u^2 + s^2t^2 + 2\alpha r^2 u + 2\beta s^2 t = 0 \ \ldots . \ \text{(II)}$$

für die Hyperbel:

$$r^2u^2 - s^2t^2 + 2\alpha r^2 u - 2\beta s^2 t = 0 \ \ldots . \ \text{(III)}$$

Dieses in Verbindung mit der Gleichung (IV) in §. 23. giebt Folgendes zu erkennen.

27. I. Auch der neue Kegelschnitt geht durch den Anfangspunkt Z der Coordinaten u und t.

II. Die Axen des neuen Kegelschnittes sind parallel den Axen des ursprünglich gegebenen (§. 4. vergl. §. 6. III.).

III. Wenn für den Mittelpunkt $\mathfrak{K}$ des neuen Kegelschnittes (bei der Parabel für den Scheitel der Axe) die auf die Axen der u und t sich beziehenden Coordinaten wieder durch i' und k', dagegen die auf den Anfangspunkt K und die Axen des ersten Kegelschnittes bezogenen Coordinaten durch η und ϑ bezeichnet werden, so ist, von welcher Art auch der Kegelschnitt sein mag, immer

$$i' = -n\alpha, \ k' = -n\beta; \ \eta = (1-n)\alpha, \ \vartheta = (1-n)\beta.$$

Der Punkt $\mathfrak{K}$ liegt also immer auf der durch Z und K gelegten geraden Linie in dem Abstande $= (1-n)\alpha$ von der Hauptaxe des ersten Kegelschnittes.

IV. Ist der erste Kegelschnitt eine Parabel, und deren Parameter $= p$, so hat der zweite Kegelschnitt, auch eine Parabel, den Parameter $p' = np$ (§. 4. III.). Ist der erste Kegelschnitt eine Ellipse oder Hyperbel, deren Axen $2a$ und $2b$ sind, so hat der zweite Kegelschnitt die Axen $2a' = n.2a$, $2b' = n.2b$. Bedeutet also p den Parameter des ersten, p' den Parameter des zweiten Kegelschnittes, so ist in allen Fällen $p' = np$. Diese Werthe der Axen $2a'$ und $2b'$ findet man aus §. 4. V. und VI.; VIII. und IX. vergl. §. 25. IV.; §. 26. II. und III. mit Rücksicht darauf, dass hier für die Ellipse $r^2\alpha^2 + s^2\beta^2 = s^2a^2 = r^2b^2$, für die Hyperbel $s^2\beta^2 - r^2\alpha^2 = s^2a^2 = r^2b^2$ ist.

V. Die gerade Linie, welche den ersten Kegelschnitt im Punkte Z berührt, berührt in demselben Punkte auch den zweiten Kegelschnitt, daher berühren sich in Z beide Kegelschnitte selbst.

Beweis. Die gerade Linie, welche die erste Parabel im Punkte Z berührt, hat zur Gleichung: $y-\alpha=\frac{\alpha}{2\beta}(x-\beta)$. Wenn man aber den Scheitel $\mathfrak{K}$ der zweiten Parabel als Anfangspunkt, die Axe desselben als Abscissenaxe nimmt, und die entsprechenden Coordinaten durch $'x$ und $'y$ bezeichnet, so ist $x='x-(n-1)\beta$, $y='y-(n-1)\alpha$, wodurch die Gleichung der gedachten Tangente diese Form erhält: $'y-n\alpha=\frac{\alpha}{2\beta}('x-n\beta)$. Für $'y=0$ wird $'x=-n\beta$, woraus folgt, dass die gedachte Tangente auch die zweite Parabel in Z berührt. — Ist der erste Kegelschnitt eine Ellipse, so findet man für die dem Punkte Z zugehörige Tangente die Gleichung: $'y-n\alpha=-\frac{s^2\beta}{r^2\alpha}('x-n\beta)$, wo die Coordinaten $'y$ und $'x$ auf den Mittelpunkt und die Axen der zweiten Ellipse sich beziehen. Für $'y=0$ ergiebt sich $'x=\frac{n(r^2\alpha^2+s^2\beta^2)}{s^2\beta}=\frac{\alpha'^2}{n\beta}$ (No. IV.), woraus erkannt wird, dass die betrachtete Tangente auch die zweite Ellipse in Z berührt. Ganz ähnlich ist der Beweis für die Hyperbel.

XXX.

Gegen Herrn Doctor Barfuss.

Von dem

Herrn Doctor O. Schlömilch,

Privatdocenten an der Universität zu Jena.

1.

Im 3ten Hefte des 4ten Bandes dieser Zeitschrift hat Herr Dr. Barfuss die ältere Euler-Friesische Ansicht von den unendlichen Reihen, der neueren, hauptsächlich durch Cauchy's geistreichen Cours d'analyse angeregten, gegenüber zu vertreten gesucht. Die Ansicht unseres geehrten Gegners ist folgende: Bei der Rechnung mit unendlichen Reihen ist die Summirung derselben ein ganz untergeordnetes Geschäft; die Hauptsache ist, durch gewisse analytische, oder wie Fries sagt, syntaktische Operationen, die Functionen in Reihen zu entwickeln; d. h. mit andern Worten: es kommt hauptsächlich auf die Umwandelungen der Form einer Function an, wobei sie einmal als geschlossener, einmal als ins Unbestimmte

fortlaufender Ausdruck erscheint, und nicht auf ihre arithmetischen Werthe in der letzteren Gestalt.

Bevor ich diese Ansicht ausführlicher beleuchte, muss ich einige Worte über die Kritik sagen, welcher Hr. Dr. Barfuss meine Rechnungen unterworfen hat:

Mein erstes Beispiel hat derselbe gänzlich missverstanden. Will man nämlich den Ausdruck Arctan x in eine Reihe verwandeln, so benutzt man hierzu die beiden Eigenschaften Arctan x — Arctan y $=$ Arctan $\frac{x-y}{1+xy}$ und $\text{Lim}\frac{\text{Arctan}\,\delta}{\delta}=1$ für abnehmende δ. Man findet

$$\text{Arctan}\,x = x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \ldots.$$

Nimmt man aber die nämliche Rechnung mit einer gewissen Function $f(x)$ vor, welche die beiden Eigenschaften

$$f(x)-f(y)=f\left(\frac{x-y}{1+xy}\right),\ \text{Lim}\frac{f(\delta)}{\delta}=1$$

besitzt, so findet man auch

$$f(x)=x-\tfrac{1}{3}x^3+\tfrac{1}{5}x^5-\ldots.$$

Nun sagt darauf Herr Dr. Barfuss: „Die Nachweisung, dass $f(x)$ $=$ arctg x sei, hat mit der Methode der unbestimmten Coefficienten gar nichts zu schaffen (?). Und wo wollte man auch den Beweisgrund hernehmen, dass zwei verschiedene Functionen dennoch einerlei Reihenentwickelung geben könnten?". Hier ist das Missverständniss klar; ich meine im Gegentheil: wo will man den Beweisgrund hernehmen, dass derjenige Unrecht habe, welcher so capriciös wäre zu behaupten, er kenne zwei solche verschiedene Functionen, denen die genannten Eigenschaften zukommen. Darauf könnte mir Herr Dr. Barfuss erwidern, was er am Ende der Seite 226. sagt, nämlich: „es findet sich für $f(x)$ eine vollkommen bestimmte Reihe, welche zeigt, dass jedem bestimmten Werthe von x ein bestimmter Werth von $f(x)$ angehört und dass folglich die Function $f(x)$ durch die ihr beigelegten Eigenschaften vollkommen bestimmt ist". Hier wird Herr Dr. Barfuss beinahe seiner Ansicht untreu; denn er spricht von den bestimmten, also numerischen Werthen, welche die Reihe

$$x-\tfrac{1}{3}x^3+\tfrac{1}{5}x^5-\ldots.$$

für einen bestimmten Werth von x annimmt, d. h. er betrachtet auf einmal $f(x)$ als die **arithmetische Summe** der Reihe, während er sonst nur von syntaktischen Entwickelungen hören will. Aber wir können ihm auch diess zugeben, weil sein Argument nur so weit reicht, als sich jene Reihe arithmetisch summiren lässt, d. h. convergirt. Aber wie wird denn die Sache, wenn die Reihe divergirt? Wenn ich cavalièrement sagte: ja, jene beiden oder mehreren Functionen, welchen gemeinschaftlich die Eigenschaften zukommen:

$$f(x)-f(y)=f\left(\frac{x-y}{1+xy}\right),\ \text{Lim}\frac{f(\delta)}{\delta}=1$$

sind identisch bis $x=1$, von da an verschieden, etwa so wie zwei Curven innerhalb eines gewissen Intervalles sich decken, nachher aber auseinanderfahren, so fällt das Argument meines Herrn Gegners ganz weg *). Und in der That wäre eine Behauptung der Art gar nichts Neues. So hat man z. B.

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots.$$

oder auch:

$$\frac{1+x}{1+x+x^2}$$
$$=1-x^2+x^3-x^5+x^6-x^8+x^9-\ldots.$$

aus welchen für $x=1$ folgt:

$$\tfrac{1}{2}=1-1+1-1+\ldots.$$
$$\tfrac{2}{3}=1-1+1-1+\ldots.$$

Da hat man ja gleich ein Beispiel, dass zwei verschiedene Functionen die nämliche Reihe geben.

In Bezug auf die letzteren beiden Reihen hat Lagrange eine Erklärung versucht. Er sagt nämlich: man erwäge die fehlenden Glieder, so ist

$$1-x^2+x^3-x^5+x^6-x^8+x^9-\ldots.$$
$$=1+0.x-x^2+x^3+0.x^4-x^5+x^6+0.x^7-x^8+x^9+\ldots$$

Nimmt man für $x=1$ ein Glied der Reihe, so erhält man 1, nimmt man 2 Glieder wieder 1, und nimmt man 3 Glieder gar nichts zur Summe. Aus 1, 1, 0 ist aber $\frac{2}{3}$ das arithmetische Mittel. Abgesehen davon, dass diese Erklärung rein aus der Luft gegriffen ist und man gar nicht weiss, woher die Befugniss zum Mittelnehmen kommt, hilft uns diese Erklärung gar nichts. Sie schiebt die Schwierigkeit auf die Seite, aber hebt sie nicht. Eine solche Erklärung, wenn es anders eine ist, mag wohl allenfalls dann gelten, wenn man dadurch zu der Reihe $1-1+1-1$ etc. gekommen ist, dass man eine Reihe von der Form

$$x^\alpha-x^\beta+x^\gamma-x^\delta+\ldots.$$

für $x=1$ specialisirt hat. Aber was fängt man denn an, wenn man auf anderem Wege zu dieser Reihe gelangt? Gesetzt, man wollte die Summe der Reihe

$$2[\cos^2 2x-\cos^2 4x+\cos^2 6x-\ldots.]=S$$

oder auch nur diejenige Function suchen, deren syntaktische Entwickelung sie ist, so hätte man

$$2\cos^2 2x=1+\cos x$$
$$2\cos^2 4x=1+\cos 2x$$
$$2\cos^2 6x=1+\cos 3x$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

*) Mit Hülfe der Integralrechnung lässt sich zeigen, dass diess im obigen Falle unmöglich sei; aber wir befinden uns hier im Gebiete der allgemeinen Arithmetik!

folglich

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots .$$
$$+ \cos x - \cos 2x + \cos 3x - \ldots .$$

Was setzt man nun für die erste Reihe? $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ oder $\frac{m}{n}$, da auch

$$\frac{1 + x + x^2 + \ldots . + x^{m-1}}{1 + x + x^2 + \ldots . + x^{n-1}}$$
$$= 1 - x^m + x^n - x^{m+n} + x^{2n} - x^{m+2n} + \ldots .$$

mithin für $x = 1$, und für beliebige positive ganze m und n

$$\frac{m}{n} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots .$$

ist. Hier lässt uns auch Lagrange im Stiche.

Nach dieser Digression kehre ich wieder zu den „Bemerkungen" des Herrn Doctor Barfuss zurück.

Derselbe tadelt in No. 3. meine Entwickelung von

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots . = -\tfrac{1}{2},$$

indem er mich auf die allgemeinere Gleichung

$$\frac{v \cos x - v^2}{1 - 2v \cos x + v^2} = v \cos x + v^2 \cos 2x + v^3 \cos 3x + \ldots .$$

verweist. Für $v = 1$ und $x = 0$ zeigt er, dass

$$\infty = 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots .$$

herauskommt, was ich ihm gern zugebe. Wenn aber x nicht $= 0$ und nicht $= 2n\pi$ ist, so erhält man doch

$$-\tfrac{1}{2} = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots . \quad (A)$$

weil in diesem Falle $\cos x - 1 = -2\sin^2 \tfrac{1}{2}x$ und $1 - 2\cos x + 1 = 4\sin^2 \tfrac{1}{2}x$ gesetzt werden darf. Mein Herr Gegner hat also weiter nichts bewiesen, als dass die Gleichung (A) für $x = 0$ und $x = 2n\pi$ Ausnahmen erleidet. Entwickeln wir jetzt beiderseits nach Potenzen von x, so wird

$$-\tfrac{1}{2} = \;\; 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots . \quad (B)$$
$$- (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots .) \frac{x^2}{1.2}$$
$$+ (1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots .) \frac{x^4}{1.2.3.4}$$
$$- \ldots \ldots \ldots \ldots$$

und diess gilt allerdings nicht für jeden Werth von x, wie Herr Dr. Barfuss sagt, weil die Fälle $x = 0$ und $x = 2n\pi$ auszunehmen sind. Daraus schliesst derselbe, dass ich die Coefficienten beider-

seits nicht vergleichen dürfe, wobei er sich aber in einem Irrthume befindet.

Hat man nämlich für alle möglichen Werthe von x die Gleichung

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots = 0,$$

so beweist man, dass $a = b = c = d$ etc. $= 0$ sei, auf folgende höchst ungenügende Weise. Man setzt $x = 0$ und bekommt $a = 0$; und zwar ist jetzt diess Resultat für jedes x allgemein richtig, obgleich es für einen speciellen Fall von x herausgebracht wurde, weil a von x unabhängig ist. Darauf geht man weiter und beweist, dass $b = c = d$ etc. $= 0$ sind. Daraus sollte man freilich schliessen, dass der Satz dann nicht richtig wäre, wenn für $x = 0$ eine Ausnahme in der obigen Gleichung eintritt. Das ist aber total falsch. Der Satz lautet nämlich so:

Wenn die Gleichung

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots = 0$$

für alle x gilt, welche innerhalb eines, wenn auch noch so kleinen Intervalles $x = \alpha$ bis $x = \beta$ liegen, so ist

$$a = b = c = d \text{ etc. } = 0,$$

was man weit genügender mittelst der Differentialrechnung zeigen kann.

Wenn nun auch zugegeben wird, dass die Gleichung (B) oder

$$\begin{aligned} 0 = & -\tfrac{1}{2} + 1 + 1 + 1 + \ldots \\ & -(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots)\frac{x^2}{1.2} \\ & +(1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots)\frac{x^4}{1.2.3.4} \\ & - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

für $x = 0$ und $x = 2n\pi$ nicht gilt, so bleibt sie doch ausserdem richtig und das Intervall, für welches sie gilt, geht von 0 bis 2π, beide Gränzen ausgeschlossen. Es ist mir also nach dem vorigen Satze auch die Coefficientenvergleichung erlaubt und da findet sich doch wieder

$$1 + 1 + 1 + \ldots = -\tfrac{1}{2}$$
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots = 0$$
$$\text{etc.},$$

und mithin trifft mich gar nicht, was mein Herr Gegner gegen diese Resultate vorbringt.

II.

Ich will jetzt der Sache näher treten. Nach der Euler-Friesischen Ansicht ist die Bedeutung einer Gleichung wie

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots.$$

folgende: Ich kann durch Anwendung einer gewissen analytischen (syntaktischen) Operation, hier der Division, aus dem Ausdrucke links so viele Glieder der Reihe rechts herausentwickeln, als ich nur will, und zwar für jeden beliebigen Werth von x. Gehe ich nun mit dieser Operation ins Unendliche fort, so ist wirklich

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots.\text{ in inf.}$$

Daher heisst es auch in den „Bemerkungen" des Herrn Dr. Barfuss S. 231.: „Ist denn nicht $x+x^2+x^3+\ldots.$ die Entwickelung von $\frac{x}{1-x}$ und nur von diesem, auch wenn nicht hinzugefügt wird, x müsse kleiner als 1 sein." O ja, aber welche Logik lehrt uns denn, für eine solche analytische Beziehung zweier Ausdrücke ein Gleichheitszeichen zu brauchen? Wenn man durch ein gewisses Verfahren aus dem Ausdrucke $\frac{x}{1-x}$ so viel Glieder der ganz ausserhalb desselben stehenden Reihe $x+x^2+x^3+\ldots.$ hervorlocken kann, als man will, wer berechtigt uns denn, diese beiden Dinge für gleich anzusehen? Ein Gleichheitszeichen darf nur da stehen, wo zwei Dinge einander entweder identisch sind, oder sich einer solchen Identität unbegränzt nähern, oder wenn das eine bloss formell von dem anderen verschieden ist, etwa wie in der Gleichung $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$.

Das letztere will Fries in seiner Naturphilosophie (S. 161.) für unseren Fall geltend machen. Er meint, die Gleichung

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots.$$

bedeute syntaktisch weiter nichts, als dass die Reihe rechts mit $1-x$ multiplicirt 1 gebe, und in so fern sei diess nichts als ein Fall von der Umkehrung der syntaktischen Operation des Multiplicirens. Er sagt ferner, man brauche nur mit $1-x$ beiderseits zu multipliciren, um sich davon zu überzeugen; es sei dann

$$\begin{array}{l} 1=1+x+x^2+x^3+\ldots. \\ \quad\;\; -x-x^2-x^3-\ldots. \\ \hline \quad\;\; 1\quad 0\quad\; 0\quad\; 0 \end{array}$$

Bevor ich auf das Unrichtige hierin aufmerksam mache, will ich ein Paar ganz triviale Beispiele ähnlicher Art behandeln.

Wenn ich sage, ich schicke jetzt einen Boten aus, einige Zeit nachher demselben einen nach (abgesehen davon, ob derselbe eben so geschwind, langsamer oder rascher geht, als der erste) und dann frage: sind denn die Wege beider Boten gleich, sobald sie unendlich lange gegangen sind, so wird jeder Vernünftige antworten: das lässt sich so ins Unbestimmte hinein gar nicht sagen, sobald nicht das Verhältniss ihrer Geschwindigkeiten gegeben ist. Denn

wenn beide Boten gleich schnell gehen, so wird die Differenz ihrer Wege, auch wenn diese an sich unendlich sind, immer so viel betragen, als der erste dem zweiten voraus war, sind aber ihre Geschwindigkeiten verschieden, so wird sich diese Differenz beständig ändern und kann sogar unendlich gross werden.

Schreibe ich folgende beiden Reihen

$$a+b+b+b+b$$
$$b+b+b+b+b$$

mit der Forderung hin, beide ins Unendliche zu verlängern und zwar so, dass wenn ich oben ein b zusetze, diess auch unten geschehen soll, und frage dann, sind diese beiden Reihen ins Unendliche fortgesetzt identisch? so antwortet jeder, der zählen kann: Nein! Denn die obere Reihe enthält, wie weit sie auch gehen möge, ein a nebst einer gewissen Parthie b, die untere die nämliche Parthie b plus noch einem b; also ist jederzeit die Differenz $= a - b$.

In einem ähnlichen, aber noch weit schlimmeren Falle befindet sich die obige Friesische Rechnung. Denn wenn ich successive zwei, drei, vier u. s. f. Glieder der Reihe

$$1+x+x^2+x^3+\ldots.$$

mit $1-x$ multiplicire, so erhalte ich der Reihe nach

$$\left.\begin{array}{l}1+x\\ \quad -x-x^2\end{array}\right\} = 1-x^2,$$

dann

$$\left.\begin{array}{l}1+x+x^2\\ \quad -x-x^2-x^3\end{array}\right\} = 1-x^3,$$

ferner

$$\left.\begin{array}{l}1+x+x^2+x^3\\ \quad -x-x^2-x^3-x^4\end{array}\right\} = 1-x^4$$

u. s. f. gerade wie im zweiten Beispiele, wo ich unten ein Glied zusetzen muss, wenn ich es oben thue. Wenn ich nun so ins Unendliche fortgehe, werden denn dann die obere und untere Reihe, abgesehen von dem Anfangsgliede 1 identisch, was doch sein müsste, weil die Ausdrücke

$$1 \text{ und } (1-x)(1+x+x^2+\ldots.)$$

durch ein Gleichheitszeichen verbunden sind? Keineswegs im Allgemeinen, wenn ich nicht das Verhältniss kenne, nach welchem sich die Werthe von x, x^2, etc. ändern. Denn als vollständiges Product bekomme ich im Allgemeinen $1-x^n$. Ist nun $x<1$, so erhalten wir bei wachsenden n, Lim $x^n=0$, also wirklich

$$(1-x)(1+x+x^2+x^3+\ldots. \text{ in inf.}) = 1$$

ausserdem aber in keinem Falle.

Hiermit ist also genügend gezeigt, in welchem Falle man die Ausdrücke

$$\frac{1}{1-x} \text{ und } 1+x+x^2+x^3+\dots \text{ in inf.}$$

durch ein Gleichheitszeichen verbinden darf. Wenn aber die Reihe rechts divergirt, so findet allerdings immer noch eine gewisse analytische Beziehung zwischen denselben statt, aber diese ist keine Gleichheit, und dann wäre es unrichtig, mit Gleichheitszeichen weiter rechnen zu wollen. Der Unterschied zwischen der arithmetischen und syntaktischen Bedeutung der Reihen erstreckt sich also auch bis auf die Wahl der Zeichen, wobei das Gleichheitszeichen lediglich nur im ersten Falle gebraucht werden darf. Möge daher Herr Dr. Barfuss in Gottes Namen einen Calcul von der allgemeinen Entwickelung der Functionen, von den syntaktischen Beziehungen derselben, oder wie er das Ding nennen will, etabliren, möge er sich auch dazu ein beliebiges Zeichen aussuchen, dagegen wird kein Mensch etwas haben; nur wolle er uns nicht glauben machen, man könne Gleichheitszeichen brauchen, wo keine Gleichheit statt findet, und usurpire er nicht ein Zeichen, welches nur unserer Ansicht dient, und dem wir durchaus nicht gestatten können, auch anderen Herren zugleich mit aufzuwarten.

Man würde es kaum für möglich halten, dass eine so einfache Sache so lange in verkehrter Weise dargestellt worden sei, wenn man sich nicht erinnerte, dass in der Analysis die Maxime festgehalten worden ist, es müssten die Resultate immer völlig allgemein sein, und da man bald einsah, dass das der Sache, d. h. den numerischen Werthen nach nicht möglich sei, so suchte man wenigstens die Form zu retten, und erfand die geheime syntaktische Bedeutung, schimpfte wohl auch hie und da diejenigen unphilosophische Köpfe, welche darauf nicht eingehen wollten und sich allein an die unrichtigen Werthe der Reihen hielten *). Von einem Beweise jener Maxime habe ich nirgends eine Spur gefunden, die Sache ist immer nur als Meinung aufgestellt worden. Dass aber dieselbe an und für sich falsch sei, kann man sehr oft a priori einsehen. So z. B. enthält die Reihe für tan x nur ganze positive Glieder; für $x=\frac{\pi}{2}$ giebt dieselbe $\tan\frac{\pi}{2}=\infty$, was ganz in der Ordnung ist. Setze ich in derselben $x>\frac{\pi}{2}$, so muss, weil alle Glieder positiv sind und Potenzen von x enthalten, um so mehr etwas unendlich Grosses und zwar Positives herauskommen. Nun ist aber die Tangente im zweiten Quadranten, d. h. für $x>\frac{\pi}{2}$, negativ; also müsste eine unendlich grosse positive Grösse einer endlichen nega-

*) Diess soll nicht etwa in Beziehung auf Fries gesagt sein. Soviel ich diesem grossen Manne persönlich verdanke und so überzeugt ich von seinen philosophischen Ansichten bin, so habe ich doch in diesem Punkte nie mit meinem verehrungswürdigen Lehrer übereinstimmen können. Fries hatte sich hierin ganz auf Euler verlassen und stellte seine Theorie von der arithmetischen und syntaktischen Bedeutung der Reihen nur als plausiblen Erklärungsversuch, nicht aber mit dogmatischer Keckheit als unumstössliche Wahrheit hin. Obige Bemerkung geht vielmehr auf die, welche, gerade am wenigsten von der Philosophie verstehend, sich am liebsten hinter dieselbe verstecken.

tiven gleich sein. Daraus sieht man augenblicklich, dass hier die Gültigkeit der Reihe aufhört, d. h. dass das Band des Gleichheitszeichens, welches beide Ausdrücke bisher umschlungen hielt, sich an dieser Stelle löst. Eine gewisse analytische Beziehung findet deswegen immer noch statt, und es mag wohl eine syntaktische Operation geben, durch welche man aus jener negativen Tangente soviel Glieder jener unendlichen positiven Grösse entwickeln kann, als man will, nur soll man nicht von Gleichheit beider Ausdrücke reden.

III.

Ich komme jetzt an diejenige Partie des Aufsatzes von Herrn Dr. Barfuss, worin er sich die ärgsten Fehler hat zu Schulden kommen lassen, nämlich an den Abschnitt No. 5. Hier bemerkt mein Herr Gegner, ich hätte mich in dem Schlusse, dass der Rest einer Reihe in einem meiner früheren Aufsätze im Allgemeinen verschwände, geirrt. Die Sache war folgende: ich hatte zu zeigen, dass das Integral

$$\int_0^1 \frac{1-x^\mu}{1-x} x^m dx,$$

wo μ und m beliebige Grössen sein mögen, sich unbegränzt der Null nähere, wenn man m ins Unendliche wachsen lässt. Ich bewerkstelligte diess mittelst folgenden Satzes:

Wenn M und N das Maximum und Minimum einer Function $\varphi(x)$ innerhalb des Intervalles $x=a$ bis $x=b$ bedeuten und $\psi(x)$ eine Function ist, welche während des nämlichen Intervalles ihr Vorzeichen nicht ändert, so ist

$$M\int_a^b \psi(x)dx > \int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx > N\int_a^b \psi(x)\,dx.$$

Dieser Satz wurde auf das obige Problem in so fern angewendet, als ich hier

$$\varphi(x) = \frac{1-x^\mu}{1-x},\ \psi(x) = x^m$$

setzte und nun zeigte, dass das Maximum und Minimum von $\varphi(x)$ während des Intervalles $x=0$ bis $x=1$ endliche Grössen sind. Daher war jetzt

$$M\int_0^1 x^m dx > \int_0^1 \frac{1-x^\mu}{1-x} x^m dx > N\int_0^1 x^m dx$$

oder

$$\frac{M}{m+1} > \int_0^1 \frac{1-x^\mu}{1-x} x^m dx > \frac{N}{m+1},$$

und da M und N endliche Grössen sind, so nähern sich für wachsende m beide Ausdrücke, zwischen denen das Integral liegt, mithin dieses selbst, unbegränzt der Null.

Mein Herr Gegner bemerkt darauf, das gelte nur, wenn μ (welches dort $=1-2a$ war) positiv sei, denn ausserdem werde wirklich

$$\varphi(x) = \frac{1 - x^\mu}{1 - x}$$

während des Intervalles 0 bis 1 unendlich, mithin M unendlich, und daraus scheint er folgern zu wollen, dass dann der Rest nicht verschwände.

Zu diesem Irrthum ist Herr Dr. Barfuss durch die Form meines Beweises gekommen, welcher dann eine kleine Aenderung erleidet. Ist nämlich μ negativ, so hat man offenbar

$$\int_0^1 \frac{1 - x^{-\mu}}{1 - x} x^m dx = \int_0^1 \frac{x^\mu - 1}{1 - x} x^{m-\mu} dx,$$

und nun setze man

$$\varphi(x) = \frac{x^\mu - 1}{1 - x},\ \psi(x) = x^{m-\mu},$$

so gilt von diesem $\varphi(x)$, was von dem früheren $\varphi(x)$ gesagt wurde, dass es nämlich während des Intervalles 0 bis 1 nicht unendlich werden kann, oder dass sein Maximum und Minimum M und N endliche Grössen sind. Nach dem citirten allgemeinen Satze von den bestimmten Integralen ist nun

$$M\int_0^1 x^{m-\mu} dx > \int_0^1 \frac{x^\mu - 1}{1 - x} x^{m-\mu} dx > N\int_0^1 x^{m-\mu} dx$$

oder

$$\frac{M}{m - \mu + 1} > \int_0^1 \frac{1 - x^{-\mu}}{1 - x} x^m dx > \frac{N}{m - \mu + 1},$$

woraus man sieht, dass auch dieses Integral sich für unbegränzt wachsende m der Null nähert. Ich hätte der Vollständigkeit wegen diess in meinem Aufsatze bemerken sollen, konnte aber eben so gut voraussetzen, dass wer den Gang des Beweises einmal begriffen hatte, diese Kleinigkeit wohl selbst sehen würde.

Im Folgenden spricht mein Herr Gegner von der beschränkten Auffasssung des bestimmten Integrales.

„Dasselbe ist nicht

$$\int_a^b f(x)dx = \delta[f(a) + f(a + \delta) + f(a + 2\delta) + \ldots]$$

für $\delta = \frac{b - a}{\infty}$, das ist es nur, wenn das allgemeine Integral $\int f(x)dx$ für alle Werthe von $x = a$ bis $x = b$ eine stetige Function von x ist. Das bestimmte Integral ist nichts anderes, als die Differenz zweier besonderen Werthe eines allgemeinen, und diess ist seine syntaktische Bedeutung, der jene arithmetische untergeordnet ist."

Was man da nicht für Neuigkeiten erfährt! Herr Dr. Barfuss scheint nicht zu wissen, dass beide Definitionen des bestimmten Integrales ganz identisch und hinsichtlich ihrer Allgemeinheit sich ganz gleich sind. Wie man aus der Definition:

für

$$\int f(x)dx = \varphi(x) + \text{Const.}$$

ist

$$\int_a^b f(x)dx = \varphi(b) - \varphi(a) \quad (1)$$

die andere

$$\left.\begin{array}{l}\int_a^b f(x)dx = \text{Lim}\,\delta[f(a) + f(a+\delta) + \ldots + f(a+\overline{n-1}\delta)] \\ \delta = \frac{b-a}{n}\end{array}\right\}\ldots(2)$$

ableitet, lässt sich aus jedem guten Lehrbuche lernen; dass aber auch das Umgekehrte eben so leicht ist, will ich hier zeigen.

Sei $f(x)$ die Gleichung einer beliebigen Curve, mögen ferner a und b (wobei $a < b$ sein soll) zwei bestimmte Werthe der Abscisse x bedeuten, zu welchen eben so zwei beliebige Werthe der Ordinate, nämlich $f(a)$ und $f(b)$ gehören. Theilt man das Intervall $b-a$ in n gleiche Theile und zieht durch jeden eine Ordinate, so wird der von $b-a$, $f(a)$, $f(b)$ und dem Curvenstücke dazwischen begränzte Flächeninhalt durch jene Ordinaten in schmale Streifen zerlegt, welche wir als Rechtecke betrachten können und zwar um so genauer, je näher diese Ordinaten an einander liegen, d. h. je grösser die Zahl n ist. Die Summe aller dieser Parallelogramme ist daher desto genauer gleich der von der Curve beschriebenen Fläche, die wir mit $\sum_a^b f(x)$ bezeichnen wollen, je grösser n ist. Setzen wir $\frac{b-a}{n} = \delta$, also $b - a = n\delta$, so wird nun

$$\sum_a^b f(x) = \text{Lim}\,\delta[f(a) + f(a+\delta) + f(a+2\delta) + \ldots f(a+(n-1)\delta]\ldots(3)$$

Aus diesem Ausdrucke erhält man leicht auf rein analytischem Wege:

$$\sum_a^b f(x) + \sum_b^c f(x) = \sum_a^c f(x),$$

d. h. geometrisch: die Fläche von a bis b plus der Fläche von b bis c ist gleich der Fläche von a bis c. Ebenso leicht findet man

$$\sum_a^c f(x) - \sum_a^b f(x) = \sum_b^c f(x) \ldots (4)$$

wovon die geometrische Bedeutung ganz ähnlich ist. Sind A und B das Maximum und Minimum von $f(x)$ während des Intervalles a bis b, so hat man aus (3):

$$\sum_b^a f(x) < \text{Lim}\,\delta[A + A + A + \ldots + A],$$

d. h.

$$< \text{Lim}\ \delta\,.\,nA,$$

oder weil $n\delta = b - a$ ist:

$$\sum_a^b f(x) < (b-a)A;$$

und ebenso leicht findet sich

$$\sum_a^b f(x) > (b-a)B,$$

also

$$(b-a)A > \sum_a^b f(x) > (b-a)B \ldots. (5)$$

d. h. der genannte Flächeninhalt ist kleiner als das Rechteck aus dem Stücke $b-a$ der Abscissenachse und der grössten zwischen a und b vorkommenden Ordinate, und er ist grösser als das Rechteck aus $b-a$ und der kleinsten der zwischen a und b liegenden Ordinaten.

Sehen wir jetzt die Summe $\sum_a^b f(x)$ als eine Function von b an und setzen wir

$$\sum_a^b f(x) = \psi(b) \ldots. (6)$$

Nehmen wir $b = a$, so ist offenbar

$$\sum_a^a f(x) = \psi(a) = 0 \ldots. (7)$$

weil dann gar keine Fläche beschrieben worden ist.

Aus der Gleichung (6) haben wir nun

$$\psi(b+\delta) - \psi(b) = \sum_a^{b+\delta} f(x) - \sum_a^b f(x)$$

$$= \sum_b^{b+\delta} f(x) \quad \text{nach Gleichung (4)}$$

und nach Formel (5), wenn wir $b+\delta$ und b für b und a gesetzt denken:

$$\delta A > \psi(b+\delta) - \psi(b) > \delta B,$$

wo jetzt A und B das Maximum und Minimum von $f(x)$ während des Intervalles b bis $b+\delta$ vorstellen. Man hat ferner

$$A > \frac{\psi(b+\delta) - \psi(b)}{\delta} > B \ldots (8)$$

Lassen wir jetzt δ ins Unendliche abnehmen, so wird

$$\mathrm{Lim}\,\frac{\psi(b+\delta)-\psi(b)}{\delta}=\frac{d\psi(b)}{db}$$

und zugleich rücken A und B immer näher an einander und fallen mit $f(b)$ zusammen. Denn $f(b)$ ist selbst das Maximum und Minimum von $f(x)$ während des Intervalles $x=b$ bis $x=b+0$, weil man dann nicht von der Stelle gekommen ist. Die beiden Gränzen fallen also dann zusammen und die Gleichung (8) geht in die folgende über:

$$\frac{d\psi(b)}{db}=f(b),$$

woraus folgt:

$$\psi(b)=\int f(b)db+\text{Const.}$$

oder was das Nämliche ist:

$$\psi(b)=\int f(x)dx+\text{Const., für } x=b\ldots.(9)$$

Die Constante ist leicht zu bestimmen; denn nach Gleichung (7) ist $\psi(a)=0$, d. h.

$$0=\int f(x)dx+\text{Const., für } x=a\ldots.(10)$$

Durch Subtraktion der vorstehenden Gleichung von (9) erhält man:

$$\psi(b)=\int f(x)dx,\ \text{von } x=a \text{ bis } x=b,$$

d. h. nach Gleichung (6) und (3):

$$\sum_a^b f(x)=\mathrm{Lim}\,\delta[f(a)+f(a+\delta)+\ldots+f(a+\overline{n-1}\,\delta)]$$
$$=\int_a^b f(x)dx,$$

woraus man also sieht, dass beide Definitionen des bestimmten Integrales identisch sind. Bezeichnen wir nämlich $\int f(x)dx$ mit $\varphi(x)$, so ist

$$\sum_a^b f(x)=\mathrm{Lim}\,\delta[f(a)+f(a+\delta)+\ldots+f(a+\overline{n-1}\,\delta)]$$
$$=\varphi(b)-\varphi(a)=\int_a^b f(x)dx.$$

Daran knüpfen sich mancherlei Betrachtungen.

Ist nämlich $f(x)$ reell von $x=a$ bis $x=b$, so muss auch das Integral $\int_a^b f(x)dx$, d. h. die von der reellen Ordinate über-

strichene Fläche, reell sein, weil alle die einzelnen Glieder $f(a)$, $f(a+\delta)$ u. s. w. reell sind. Es folgt daraus die Reellität der Differenz $\varphi(b)-\varphi(a)$. Diese kann auf zweierlei Weise hervortreten; entweder sind nämlich $\varphi(b)$ und $\varphi(a)$ beide reell oder beide imaginär, da die Differenz zweier imaginären Grössen reell sein kann, wie z. B. $\alpha+\gamma\sqrt{-1}-(\beta+\gamma\sqrt{-1})$. Keinenfalls aber darf es vorkommen, dass eine der Functionen $\varphi(b)$ und $\varphi(a)$ reell und die andere imaginär sei; denn die Differenz einer reellen und imaginären Grösse ist immer imaginär und kann demnach nicht einer reellen Grösse gleich sein, wie es nach dem Obigen nöthig ist.

Gleichwohl bringt mein Herr Gegner imaginäre Werthe solcher Integrale heraus, deren Differenzialformeln unter dem Integralzeichen reell sind, z. B. das Resultat:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1-x^2}=\tfrac{1}{2}l(-1).$$

Um diesen Widerspruch aufzuklären, will ich der Sache auf den Grund gehen.

Die Differenzialrechnung lehrt uns das Resultat:

$$d.e^x=e^x dx.$$

Soll hier die rechte Seite reell sein, so ist diess auch auf der linken nöthig; denn wenn ich $x\sqrt{-1}$ für x setze, wird

$$\begin{aligned} d(e^{x\sqrt{-1}}) &= d(\cos x+\sqrt{-1}\ \sin x) \\ &= (-\sin x+\sqrt{-1}\ \cos x)dx, \end{aligned}$$

mithin auch die rechte Seite imaginär. Wenn also $d.e^x$ reell sein soll, muss es e^x selbst sein. Nun erhalten wir aber für $e^x=y$ aus obiger Gleichung

$$dy=yd(\log\ \text{nat}\ y)$$

oder

$$dly=\frac{dy}{y}.$$

Hier gilt wieder das Nämliche; soll $\frac{dy}{y}$ reell sein, so muss auch ly reell sein, was schon daraus folgt, dass e^x reell angenommen werden musste. Man sieht es auch aus der geometrischen Bedeutung des Differenzials. Differenziiren heisst zur Gränze übergehen; der Differenzialquotient einer Linie ist ihr Endpunkt, der Differenzialquotient einer Fläche die sie begränzende Linie u. s. w. Auf diese Weise kann man jeder Differenziation einer auch noch so wunderlichen Function eine geometrische Bedeutung abgewinnen. Wollte man nun behaupten, dass das Differenzial einer imaginären Grösse eine reelle Grösse sei, so hiesse diess: eine unmögliche geometrische Figur hat eine mögliche Gränze (Anfang oder Ende), was reiner Unsinn ist. So hat auch die Formel $dly=\frac{dy}{y}$ nur für reelle y Bedeutung. Nehme ich jetzt $y=a-x$, so wird

$$dl(a-x)=\frac{-dx}{a-x},$$

dabei setze ich stillschweigend voraus, dass x nicht $>a$ sei, denn sonst wäre wieder die Gränze eines Unmöglichen ein Mögliches. Nehme ich ebenso $y=x-a$, so gilt die Formel

$$dl(x-a)=\frac{dx}{x-a}=\frac{-dx}{a-x}$$

nur für solche x, die nicht $<a$ sind, aus dem nämlichen Grunde.

Kommt mir jetzt umgekehrt die Differenzialformel

$$\frac{-dx}{a-x}$$

zum Integriren vor, so muss ich erst wissen, ob $a>$ oder $<x$ ist, sonst kann ich schlechthin das Integral gar nicht angeben. Ist $a>x$, so ist einzig und allein

$$\int\frac{-dx}{a-x}=l(a-x),\text{ aber nicht etwa }=l(x-a);$$

ist aber dagegen $a<x$, so ist allein:

$$\int\frac{-dx}{a-x}=\int\frac{dx}{x-a}=l(x-a)\text{ und nicht }=l(a-x).$$

Beides lässt sich aber vereinigen, wenn man, wie der Herr Herausgeber schreibt:

$$\int\frac{dx}{a-x}=-\tfrac{1}{2}l.(a-x)^2$$

und

$$\int\frac{dx}{x-a}=+\tfrac{1}{2}l.(x-a)^2,$$

wo es nun rechts ganz gleichgültig ist, ob man $a-x$ oder $x-a$ schreibt, da das Quadrat davon immer positiv, also der halbe Logarithmus davon immer reell ist. Der Herr Herausgeber hat in seinem Lehrbuche der Differenzialrechnung richtig bemerkt, dass diese Bezeichnungsweise gar nicht überflüssig oder unbedeutend ist, denn wir sehen an den Resultaten des Herrn Dr. Barfuss, in welche Irrthümer man bei der Nichtbeachtung dieser Regel verfallen kann. Hat man also z. B. den Werth des Integrales

$$\int\frac{dx}{1-x^2}=\tfrac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x}+\tfrac{1}{2}\int\frac{dx}{1-x}$$

zu bestimmen, so ist für $x>1$:

$$\int\frac{dx}{1-x^2}=\tfrac{1}{2}l(1+x)-\tfrac{1}{2}l(x-1)=\tfrac{1}{2}l\frac{x+1}{x-1}$$

und für $x<1$:

$$\int\frac{dx}{1-x^2}=\tfrac{1}{2}l(1+x)-\tfrac{1}{2}l(1-x)=\tfrac{1}{2}l\frac{1+x}{1-x};$$

braucht man die erste Form für $x=\infty$, die zweite für $x=0$, so wird

$$\int_0^\infty\frac{dx}{1-x^2}=l(1)-l(1)=0;$$

oder nach der kürzeren Weise des Herrn Herausgebers:

$$\int\frac{dx}{1-x^2}=\tfrac{1}{4}l.(1+x)^2-\tfrac{1}{4}l.(1-x)^2=\tfrac{1}{4}l.\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2,$$

woraus wieder für $x=\infty$, $x=0$

$$\int_0^\infty\frac{dx}{1-x^2}=0$$

folgt, wie es sein muss.

Mein Herr Gegner hat sich hier, wo er $\tfrac{1}{2}l(-1)$ herausbringt, wieder einmal von der unglücklichen Idee der **Einheit der Form** leiten lassen und übersehen, dass sie ihn hier geradezu ins Gebiet des Unsinns geführt hat, weil er mir nach dem Obigen nun zugeben müsste, dass die Gränze eines unmöglichen Dinges ein mögliches sein könne. Wenn überall Einheit der Form herrschen sollte, warum verlangt er denn nicht auch, dass das Integral

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$$

immer durch die nämliche Formel gegeben werden solle, während er doch selbst bei positiven c immer die logarithmische, bei negativen die Kreisfunctionenformel gebraucht haben wird, um imaginäre Grössen zu vermeiden?

Ich muss nun noch eine Frage des Herrn Doctors Barfuss beantworten. Er findet

$$\int\frac{dx}{1-x^3}=\tfrac{1}{3}\int\frac{dx}{1-x}+\tfrac{1}{6}l(1+x+x^2)+\frac{1}{\sqrt{3}}\ \text{Arctan}\ \frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$$

Für $x=\infty$, $x=0$ erhält er aus dem Arcustangens den Werth $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$ und fragt nun verwundert: „aber was wird denn aus $\int_0^\infty\frac{dx}{1-x}+\tfrac{1}{6}l(1+x+x^2)$?" d. h. richtiger, was wird aus

$$\tfrac{1}{3}\int\frac{dx}{1-x}+\tfrac{1}{6}l.(1+x+x^2),$$

wenn wir $x=\infty$, $x=0$ setzen und beide Werthe subtrahiren? Hier ist die Antwort. Wir haben

$$\int\frac{dx}{1-x}=-\tfrac{1}{2}l.(1-x)^2.$$

folglich

$$\tfrac{1}{3}\int\frac{dx}{1-x}+\tfrac{1}{6}l(1+x+x^2)$$

$$=-\tfrac{1}{6}l.(1-x)^2+\tfrac{1}{6}l(1+x+x^2)=\tfrac{1}{6}l\frac{1+x+x^2}{1-2x+x^2}$$

$$=\tfrac{1}{6}l\frac{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}+1}.$$

Daraus folgt für $x=\infty$, wo wir uns der zweiten, und für $x=$ wo wir uns der ersten Form bedienen:

$$\tfrac{1}{3}\int\frac{dx}{1-x}+\tfrac{1}{6}l(1+x+x^2)=0,\ \{x=0 \text{ bis } x=\infty\},$$

mithin bleibt

$$\int_0^\infty\frac{dx}{1-x^3}=\frac{\pi}{3\sqrt{3}},$$

wie es die allgemeine Formel

$$\int_0^\infty\frac{x^{m-1}dx}{1-x^n}=\frac{\pi}{n\tan\frac{m\pi}{n}}$$

ebenfalls giebt. Letztere ist daher kein „imaginärer Ausdru und kein „arithmetischer Unsinn".

Hiermit ist Alles, was mein Herr Gegner wider meine Inte tionen sagt, gebührend gewürdigt. Wenn derselbe uns glau machen will, reelle Differenzialformeln könnten imaginäre Integ haben, so muss er selbst das Umgekehrte zugeben, dass näm imaginäre Functionen reelle Differenzialquotienten erzeugen kö ten, was deswegen Unsinn ist, weil sich ohne Ausnahme je Differenziation die geometrische Bedeutung des Uebergangs Anfangs- oder Endgränze unterlegen lässt. (M. s. Fischer ü den Sinn der höheren Analysis.) Aber was hat denn Herr Barfuss uns für Aufklärung verschafft, wenn er sagt, sein Integ

$$\int_0^\infty\frac{dx}{1-x^2}=\tfrac{1}{2}l(-1)$$

habe keine arithmetische, sondern nur eine syntaktische Bed tung.? An die Stelle eines Unbegreiflichen schiebt er ein deres Unbegreifliches; welche ist denn die syntaktische Bed tung von $\frac{1}{2}l(-1)$? Hier heisst es wahrscheinlich wieder: „ wo uns die Begriffe fehlen, da stellt ein Wort zu rechter sich ein." *)

---

*) Das Verkehrte in dem genannten Resultate sieht man auch so. Es ist, den Integrallogarithmus mit li bezeichnet:

Was Herr Doctor Barfuss ferner über die Convergenz der Reihen u. s. w. sagt, sind willkührliche Begriffsbestimmungen. Will er nach seiner Ansicht die oder jene Reihe convergent nennen, die wir divergent nennen, so möge er das thun, auf den Namen kommt nichts an.

IV.

Man wird aber vielleicht fragen, woher kommt es denn, dass gerade diejenigen, welche sich ganz sorglos dem Gebrauche der Reihen, ohne Kritik ihrer Convergenz oder Divergenz überliessen, doch so wenig falsche Resultate herausbrachten? Sollte demnach ein solcher Gebrauch nicht zu rechtfertigen sein?

Hierauf ist die Antwort folgende. Man benutzt in der Analysis die Reihen zu zwei verschiedenen Zwecken. Entweder will man eine unbekannte Grösse näherungsweise darstellen, oder man sucht ein und den nämlichen Ausdruck auf verschiedene Weise in zwei nach Potenzen einer Hauptgrösse fortschreitende Reihen zu verwandeln und durch Vergleichung der Coefficienten gleichnamiger Potenzen jener Hauptgrösse zu neuen Resultaten zu gelangen. Dass man für den ersten Zweck nur convergirende Reihen brauchen könne, versteht sich von selbst; für die zweite Anwendung liefert uns ein früher erwähnter Satz die gewünschte Aufklärung. Wenn nämlich die Reihe

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots$$

für alle Werthe von x, welche innerhalb eines gewissen Intervalles $x = u$ bis $x = v$ liegen, zur Summe Null hat, so ist $a = b = c = d$ u. s. w. $= 0$. Daraus folgt weiter:

Wenn die Gleichungen

$$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots$$
$$f(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \ldots$$

für alle x innerhalb eines gewissen Intervalles $x = u$ bis $x = v$ richtig bleiben, so ist

$$a = \alpha,\ b = \beta,\ c = \gamma,\ \text{u. s. w.}$$

$$e^{-u}\, li(e^u) = \int_0^\infty \frac{dx}{1-x} e^{-ux}, \quad -e^u\, li(e^{-u}) = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x} e^{-ux}$$

(M. s. meine Beiträge zur Theorie bestimmter Integrale S. 72.)

Addirt man beides und nimmt dann $u = 0$, so wird

$$li(1) - li(1) = 2\int_0^\infty \frac{dx}{1-x^2},$$

also nach Herrn Dr. Barfuss die Differenz zweier reellen Grössen gleich der imaginären $l(-1)$?! Herr Dr. Barfuss scheint hiernach unseres Lehrers mathematische Naturphilosophie besser studirt zu haben, als seine Logik.

Hierin steckt das ganze Geheimniss. Z. B. Man findet auf verschiedenen Wegen die beiden Gleichungen

$$\tan x = \frac{2^2(2^2-1)}{1.2}B_1 x + \frac{2^4(2^4-1)}{1.2.3.4}B_3 x^3 + \ldots . \quad (1)$$

wo B_1, B_3, u. s. w. gewisse positive Zahlen sind, und

$$\tan x = \frac{2x}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2} + \frac{2x}{\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2 - x^2} + \ldots . \quad (2)$$

Die Gleichung (1) gilt nicht allgemein; denn $\tan x$ ist eine unstetige Function von x; an der Stelle $x = \frac{\pi}{2}$ springt sie aus $+\infty$ in $-\infty$ über [$\tan(\frac{\pi}{2} - \delta) = +\infty$, $\tan(\frac{\pi}{2} + \delta) = -\infty$ für unendlich kleine δ]; jede nach Potenzen von x fortschreitende Reihe bildet dagegen eine stetige Function von x; also kann zwischen beiden Ausdrücken nicht für alle Werthe von x Identität statt finden, und in der That verschwindet dieselbe über $\frac{\pi}{2}$ hinaus, und macht dann einer blossen syntaktischen Verwandschaft Platz. Die Gleichung (2) lässt sich so schreiben:

$$\tan x = \frac{4}{\pi^2}\left[\frac{2x}{1-\left(\frac{2x}{\pi}\right)^2} + \frac{1}{3^2}\frac{2x}{1-\left(\frac{2x}{3\pi}\right)^2} + \ldots .\right]$$

wobei man die einzelnen Glieder in Reihen verwandeln kann, sobald

$$2x < \pi,\ 2x < 3\pi \text{ u. s. f.}$$

ist. Diese Bedingungen reduciren sich auf die erste, d. h. auf $x < \frac{\pi}{2}$, und man erhält:

$$\left.\begin{aligned} \tan x = \ & \frac{2^3}{\pi^2}\left[\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots .\right]x \\ & + \frac{2^5}{\pi^4}\left[\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \ldots .\right]x^3 \\ & + \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Beide Gleichungen (1) und (3) sind nun zwar nicht für alle möglichen Werthe von x, aber doch für gewisse x (von $x = 0$ bis $x = \frac{\pi}{2}$) richtig, und daher ist die Vergleichung der Coefficienten gleichnamiger Potenzen von x erlaubt. Wir bekommen daher

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots . = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2^2-1)\pi^2}{1.2}B_1$$

$$\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \ldots . = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2^4-1)\pi^4}{1.2.3.4}B_3$$

u. s. f.

und zwar vollkommen richtig, obschon die Gleichungen (1) und (3) nicht allgemein gelten.

Aehnlicher Art sind alle Reihenbenutzungen in der Analysis, bei denen etwas Richtiges herauskam; die angewendeten Reihen waren den geschlossenen Ausdrücken, für welche sie figurirten, wenigstens innerhalb eines gewissen Intervalles gleich und mithin lieferte die Coefficientenvergleichung richtige Resultate. Man kann daher die Regel aufstellen:

Verwandelt man Behufs der Coefficientenvergleichung einen Ausdruck in zwei verschiedene, nach Potenzen der nämlichen Hauptgrösse fortschreitende Reihen, so hat man nicht nöthig, eine ängstliche Untersuchung anzustellen, wie weit wohl die Convergenz derselben reichen möge. Es genügt zu wissen, dass wenigstens für alle innerhalb eines kleinen Intervalles (etwa von 0 bis 1) liegende Werthe der Veränderlichen arithmetische Gleichheit vorhanden sei, d. h. die Reihen convergiren (denn wenn sie divergiren, nähern sie sich ihrem angeblichen Werthe nicht); man ist dann zur Vergleichung der Coefficienten gleichnamiger Potenzen berechtigt.

Ganz anders sieht die Sache aus, wenn man solche Reihen vergleicht, bei denen für keinen Werth der Veränderlichen Identität vorhanden ist. Hier kommt man jederzeit auf Unsinn. So ist es Euler gegangen, wenn er

$$\cos x - \cos 2x + \cos 3x - \ldots \text{ in inf.} = \tfrac{1}{2}$$

setzt. Diese Gleichung ist als solche nie richtig; man braucht nur $x =$ einem aliquoten Theile von π zu setzen, um sogleich auf eine Reihe von der Form $a \pm a + a \pm a$ u. s. w. zu kommen; z. B. für $x = \frac{\pi}{3}$ erhält man:

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} - 1 \\ &+ \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} - 1 \\ &+ \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} - 1 \\ &+ \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} - 1 \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

und das soll doch nicht $= \frac{1}{2}$ sein? wiewohl es zu $\frac{1}{2}$ in einer syntaktischen Beziehung stehen mag. Daher sind auch die von Euler gefundenen Folgerungen

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots = 0$$
$$1^4 - 2^4 + 3^4 - 4^4 + \ldots = 0$$

sämmtlich falsch; höchstens könnte man sie dadurch interpretiren, dass man sagte: das Gleichheitszeichen steht hier nicht in arithmetischer, sondern in syntaktischer Bedeutung, d. h. durch eine gewisse syntaktische Operation kann ich aus der Null so viel Glieder jener Reihen entwickeln, als ich will. Das ist wohl möglich, aber zur Bezeichnung derartiger Beziehungen darf kein Gleichheitszeichen gebraucht werden.

Glücklicherweise sind solche Reihen, welche für jeden Werth

der darin vorkommenden Veränderlichen divergiren, sehr selten, und darin liegt der Grund, warum man selten auf falsche Resultate gekommen ist. Indessen habe ich einige aufgetrieben, welche zugleich zeigen, dass man nicht nur zu arithmetisch, sondern sogar zu syntaktisch falschen Resultaten gelangen kann, wenn man sich dem Calcul ohne Kritik überlässt.

1. Es ist bekanntlich

$$\frac{r \sin x}{1 - 2r \cos x + r^2} = r \sin x + r^2 \sin 2x + r^3 \sin 3x + \dots.$$

Für $r = 1$ erhält man, wofern nicht $x = 0$ ist:

$$\tfrac{1}{2}\cot \tfrac{1}{2}x = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots.$$

Dasselbe findet man auch durch Zerlegung der einzelnen Sinus in ihre imaginären Theile und Addition nach der allgemein sein sollenden Formel $u + u^2 + u^3 + \dots. = \frac{u}{1-u}$. Obiges Resultat ist aber, abgesehen von numerischen Werthen, schon syntaktisch falsch; denn wenn man beide Theile der Gleichung nach Potenzen von x entwickelt, so findet sich:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{x} - \frac{B_1 x}{1.2} - \frac{B_3 x^3}{1.2.3.4} - \dots. \\
&= [1 + 2 + 3 + \dots.]\frac{x}{1} \\
&\quad - [1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots.]\frac{x^3}{1.2.3} \\
&\quad + \dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

und hier kommt auf der linken Seite das Glied $\frac{1}{x}$ vor, während es auf der rechten fehlt, ganz gegen alle Syntaktik! Der Fehler liegt darin, dass in der allgemeinen Formel $r = 1$ genommen wurde, während sie nur für $r < 1$ richtig bleibt. Ist $r = 1$, so hat man bis zum $n$ten Gliede:

$$\sin x + \sin 2x + \dots. + \sin nx = \tfrac{1}{2}\cot \tfrac{1}{2}x - \frac{\cos(2n+1)\frac{x}{2}}{2\sin \frac{x}{2}}.$$

Der Rest auf der rechten Seite verschwindet für wachsende n nicht, darf also nicht wegbleiben. Verwandelt man beide Theile in Reihen, so fängt die Entwickelung des Restes mit $-\frac{1}{x}$ an, welches sich gegen das in $\frac{1}{2}\cot \frac{1}{2}x$ vorkommende $\frac{1}{x}$ hebt, und man bekommt die bekannten Summenformeln für

$$\begin{aligned}
&1 + 2 + 3 + \dots. + n, \\
&1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots. + n^2, \\
&\text{u. s. w.}
\end{aligned}$$

Man sieht ferner hieraus, dass das von Herrn Doctor Barfuss auf S. 229. über Reste Gesagte falsch ist. Nach seiner Ansicht wäre hier der Rest

$$R = \sin nx + \sin(n+1)x + \ldots \text{ in inf.};$$

woher käme denn nun in diesen Rest das Glied $\frac{1}{x}$, womit der unsrige anfängt?

2. Ein nicht weniger frappantes Beispiel ist folgendes.

Wir haben

$$x + x^3 + x^5 + \ldots = \frac{x}{1-x^2} = -\frac{x}{x^2-1} \quad (A)$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^5} + \ldots = \frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}} = +\frac{x}{x^2-1} \quad (B)$$

folglich durch Subtraction

$$-\frac{2x}{x^2-1} = (x-\frac{1}{x}) + (x^3-\frac{1}{x^3}) + (x^5-\frac{1}{x^5}) + \ldots \quad (C)$$

Nun giebt es für jedes beliebige x und ganze positive, aber ungerade m folgenden Satz (Cauchy cours d'analyse page 551.):

$$x^m - \frac{1}{x^m} =$$

$$2\left[\frac{m}{2}(x-\frac{1}{x}) + \frac{(m+1)m(m-1)}{2.4.6}(x-\frac{1}{x})^3 + \frac{(m+3)(m+1)m(m-1)m-3)}{2.4.6.8.10}(x-\frac{1}{x})^5 + \ldots\right]$$

Wendet man diesen Satz auf die Gleichung (C) für $m = 1, 3, 5$ u. s. w. an, so wird

$$\begin{aligned} -\frac{x}{x^2-1} = \; & \tfrac{1}{2}(x-\frac{1}{x}) \\ & + \tfrac{3}{2}(x-\frac{1}{x}) + \tfrac{1}{2}(x-\frac{1}{x})^3 \\ & + \tfrac{5}{2}(x-\frac{1}{x}) + \tfrac{5}{2}(x-\frac{1}{x})^3 + \tfrac{1}{2}(x-\frac{1}{x})^5 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Nimmt man diese Reihen in verticaler Richtung zusammen und bemerkt zugleich, dass die linke Seite $= -\frac{1}{x-\frac{1}{x}}$ ist, so erhält man: . . . .

$$-\frac{1}{x-\frac{1}{x}} = (\tfrac{1}{2}+\tfrac{3}{2}+\tfrac{5}{2}+\dots)(x-\tfrac{1}{x})$$
$$+(\tfrac{1}{2}+\tfrac{5}{2}+\dots\dots\dots)(x-\tfrac{1}{x})^3$$
$$+(\tfrac{1}{2}+\dots\dots\dots\dots)(x-\tfrac{1}{x})^5$$
$$+\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Nun ist aber x eine beliebige Grösse, folglich ist es auch $x-\frac{1}{x}$, welches wir $=z$ setzen wollen. Denn um irgend ein beliebiges z herauszubringen, hat man die quadratische Gleichung $x-\frac{1}{x}=z$ nach x aufzulösen, wodurch man jederzeit reelle x erhält. Bezeichnen wir die in obiger Gleichung vorkommenden Coefficienten von $(x-\frac{1}{x})$, $(x-\frac{1}{x})^3$ u. s. w. mit a_1, a_3 u. s. f., so finden wir

$$-\frac{1}{z} = a_1 z + a_3 z^3 + a_5 z^5 + \dots,$$

was schon syntaktisch falsch ist.

3. Addirt man die Gleichungen (A) und (B) im vorigen Beispiel, so kommt

$$0 = x+\frac{1}{x} + (x^3+\frac{1}{x^3}) + (x^5+\frac{1}{x^5}) + \dots \quad (D)$$

Nun giebt es für ungerade m und beliebige x folgenden Satz:

$$x^m+\frac{1}{x^m}$$
$$=(x+\frac{1}{x})\Big[1+\frac{(m+1)(m-1)}{2.4}(x-\frac{1}{x})^2$$
$$+\frac{(m+3)(m+1)(m-1)(m-3)}{2.4.6.8}(x-\frac{1}{x})^4+\dots\Big]$$

(Cauchy a. a. O. page 551.), unter dessen Anwendung für $m=1, 3,$ u. s. w. die Gleichung (D) sich so gestaltet:

$$0 = (x+\frac{1}{x})$$
$$+(x+\frac{1}{x})[1+(x-\frac{1}{x})^2]$$
$$+(x+\frac{1}{x})[1+3(x-\frac{1}{x})^2+(x-\frac{1}{x})^4]$$
$$+(x+\frac{1}{x})[1+6(x-\frac{1}{x})^2+5(x-\frac{1}{x})^4+(x-\frac{1}{x})^6]$$
$$+\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

r wenn man beiderseits mit $x + \frac{1}{x}$ dividirt, $x - \frac{1}{x} = z$ setzt
die Reihen vertical summirt:

$$\begin{aligned}0 = \;& 1 + 1 + 1 + 1 + \dots\\ &+ (1 + 3 + 6 + 10 + \dots)z^2\\ &+ (1 + 5 + 15 + 35 + \dots)z^4\\ &+ \dots\dots\dots\dots\dots\end{aligned}$$

hin müsste nach dem Principe der Coefficientenvergleichung sein:

$$\left.\begin{aligned}&1 + 1 + 1 + 1 + \dots\\ = \;&1 + 3 + 6 + 10 + \dots\\ = \;&1 + 5 + 15 + 35 + \dots\\ &\dots\dots\dots\dots\end{aligned}\right\} = 0,$$

h. für ein ungerades m überhaupt:

$$0 = 1 + \frac{m}{1} + \frac{m(m+1)}{1.2} + \frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3} + \dots,$$

hrend man aus dem binomischen Satze für negative m und $x =$
1 findet:

$$\infty = 1 + \frac{m}{1} + \frac{m(m+1)}{1.2} + \frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3} + \dots$$

o wieder ein Fall, in welchem eine divergente Reihe zwei ver-
iedene Summen hat.

Uebersicht man die beiden letzten Beispiele genauer, so be-
rkt man leicht, dass darin weiter nichts, als ein Schmuggel
ter dem Deckmantel des Gleichheitszeichens getrieben
rden ist. Denn von den Gleichungen (A) und (B) ist als solche
eine jedesmal falsch, wenn die andere richtig ist, oder mit an
en Worten, wenn die eine Reihe convergirt, divergirt die an-
e, ist also der anderen Seite des Gleichheitszeichens nicht gleich,
dern nur syntaktisch mit derselben verwandt. Brauchen wir das
chen ☋ für eine solche syntaktische Gleichheit der Form (d. h.
lytische Beziehung, in so fern man durch ein gewisses Verfah-
aus der geschlossenen Form so viele Glieder aus der unbestimmt
laufenden Reihe entwickeln kann, als man will), so stehen jene
ichungen für $x < 1$:

$$x + x^3 + x^5 + \dots = \frac{x}{1 - x^2} = -\frac{x}{x^2 - 1}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^5} + \dots ☋ \frac{\frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}} ☋ \frac{x}{x^2 - 1}$$

für $x > 1$:

$$x + x^3 + x^5 + \ldots \mho \frac{x}{1-x^2} \mho -\frac{x}{x^2-1}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^5} + \ldots = \frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}} = \frac{x}{x^2-1}$$

und für $x=1$:

$$\left.\begin{array}{l} x + x^3 + x^5 + \ldots = \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^5} + \ldots = \end{array}\right\} \infty.$$

Aus diesen Gleichungen folgt aber: — gar Nichts, weil man mit dem Zeichen $\mho$ nicht weiter rechnen kann. Also war an allen den fehlerhaften Resultaten nur die verkehrte Anwendung des Gleichheitszeichens bei divergirenden Reihen schuld. Dies ist meine Erklärung, die wohl auf den Namen einer genügenden und einfachen Anspruch machen darf. Ich fordere dagegen Herrn Dr. Barfuss auf, die 3 letzten paradoxen Beispiele nach seiner Ansicht zu erklären, wenn ihm diess überhaupt möglich ist. Einem etwaigen Einwande desselben will ich gleich im Voraus begegnen. Er könnte sagen: „Sie haben in der Gleichung $(A) -\frac{x}{x^2-1}$ für $\frac{x}{1-x^2}$ gesetzt und so das Gesetz (?) der Einheit der Form verletzt; wenn auch die Reihe links die syntaktische Entwickelung von $\frac{x}{1-x^2}$ bildet, so ist sie doch nicht die Entwickelung von $-\frac{x}{x^2-1}$. Dann würde aber mein Herr Gegner den ersten Grundsatz der Mathematik: für $A=B$ und $B=C$ ist $A=C$, leugnen. Da ist denn kein anderes Herauskommen möglich, als dass er sagte: ja die erste Gleichung $A=B$ ist nicht als solche, sondern als syntaktische Beziehung zu betrachten. Allerdings, wenn ein Dreieck einem zweiten ähnlich, dieses einem dritten an Fläche gleich ist, so folgt weder daraus, dass das erste dem dritten ähnlich, noch dass es ihm gleich sei. Hiermit würde mir Herr Dr. Barfuss zugeben, was ich eben behaupte, dass man nämlich nicht eher bei Reihen Gleichheitszeichen brauchen dürfe, als bis man von ihrer Convergenz überzeugt ist, und dass für divergente Reihen ein anderes Zeichen, etwa mein obiges $\mho$, nöthig sei, und dass man daher mit divergenten Reihen nicht schlechthin rechnen dürfe.

Ich glaube durch das bisher Gesagte jede der beiden einander gegenüber stehenden Ansichten in ihre rechte Stelle gerückt zu haben. Es wäre gewiss interessant, die Theorie der Reihen consequent nach der Ansicht meines Herrn Gegners bearbeitet zu sehen, wie diess auf unserer Seite durch Cauchy geschehen ist. Nur müsste bei einer solchen Darstellung streng beobachtet werden, was ich über den Gebrauch von Zeichen gesagt habe, damit nicht etwa eine solche für die Wissenschaft höchst gefährliche Pascherei entstände, wie ich sie im zweiten und dritten Beispiele zur Warnung durchgeführt habe.

V.

Ich will endlich noch einem Vorwurfe begegnen, den ich über unsere Partei gehört habe, nämlich dem: „die neuere Schule enthalte zwar geschickte Analytiker (wir danken recht schön)," aber eine philosophische Ansicht über die Mathematik, eine Metaphysik des Calculs gehe ihr gänzlich ab." Diese Bemerkung, die übrigens gar nicht die Sache, sondern höchstens einige ihrer Verfechter treffen kann, ist zum Mindesten sehr voreilig. Die ältere Schule bestand sehr lange, ehe sie Jemand, namentlich erst Fries, von ihrer philosophischen Seite betrachtete; wie kann man nun von einer Schule, die noch im Entstehen begriffen ist und dem alten Schlendrian mühsam genug das Terrain abstreiten muss, gleich eine philosophische Betrachtung verlangen? Aber auch diess wird geleistet werden und zwar hoffe ich selbst in einiger Zeit das Meinige hierzu beizutragen. Ich will diesen ohnehin etwas lang gewordenen Aufsatz nicht durch eine solche Entwickelung noch mehr verlängern, kann es mir aber nicht versagen, wenigstens auf eine interessante Analogie hinzuweisen, welche zwischen der Philosophie und Mathematik in ihrer gegenwärtigen Verfassung statt findet. Die jetzige Zeit der Mathematik, in welcher die neuere Schule die ältere mit Recht zu verdrängen sucht, hat die grösste Aehnlichkeit mit jener, in welcher Kant mit seiner Kritik der reinen Vernunft auftrat. Die Philosophen hatten sich bis dahin ohne Kritik der Spekulation überlassen und glaubten an die Allgemeingültigkeit der Denkgesetze, mit denen sie Alles, auch selbst das Gebiet des Uebersinnlichen beherrschen wollten. So die Mathematiker, wenn sie in ihrer sogenannten allgemeinen Arithmetik die unbegränzte Allgemeinheit der analytischen Operationen behaupteten.

Jenem Unwesen stellte sich die Kantische Kritik gegenüber und wies in folgenden Resultaten der Spekulation ihr wahres Gebiet an:

Die Methaphysik lehrt uns den Gebrauch von vier Grundbegriffen des denkenden Verstandes, nämlich der vier Categorieen Quantität, Qualität, Relation und Modalität. Der Gebrauch derselben erstreckt sich aber nur auf solche Begriffe, für welche in der Erfahrung ein congruirender Gegenstand aufgezeigt werden kann, d. h. ein solcher, der einer reinen Anschauung in den Formen des Raumes und der Zeit fähig ist. Versucht es dagegen der Verstand, jene vier Denkgesetze auf solche Begriffe anzuwenden, welche diese Bedingung nicht erfüllen, also übersinnliche sind (Ideen), so stösst derselbe auf die gröbsten Widersprüche, die Antinomieen, woraus weiter folgt, dass eine solche Anwendung eine durchaus unrechtmässige ist, und dass man von jenen Ideen keinen Gebrauch zur Erweiterung des philosophischen Wissens machen könne.

Ganz ähnlich steht es um die Mathematik.

Die Arithmetik lehrt uns den Gebrauch von vier Grundoperationen des rechnenden Verstandes, nämlich den vier Species; sie zeigt uns aber denselben nur an solchen Grössen, die entweder endliche sind, oder sich einer endlichen bestimmten Grösse als Gränze nähern (z. B. Reihen, die unter besonderen Fällen convergiren). Versucht es dagegen der Vorstand, jene Operationen auf solche Grössen anzuwenden, welche diese Bedingungen nicht erfüllen

(divergirende Reihen), so stösst er auf die gröbsten Widersprüche, woraus weiter folgt, dass eine solche Anwendung eine durchaus unrechtmässige ist und dass man von jenen Reihen, so lange sie divergiren, keinen Gebrauch zur Erweiterung des mathematischen Wissens machen könne.

Es geht uns mit den divergenten Reihen in der Analysis wie mit manchen Ausdrücken in der analytischen Geometrie. Fragt man z. B., welche ist die geometrische Bedeutung der Gleichung

$$(y+2x)^2+(y+3x)^2+1=0,$$

wenn x die Abscissen, y die Ordinaten bezeichnen, so ist die Antwort: gar keine; denn für jedes reelle x erhält man ein imaginäres y, die Gleichung stellt daher weder einen Punkt, noch eine Linie, noch sonst etwas dar. Sie ist ein Gebilde der combinirenden Algebra, welches von einer gewissen, nämlich der geometrischen Seite betrachtet, gar keine Bedeutung hat, wenn es auch von einer anderen Seite angesehen nicht eben ohne Geltung ist. Ganz ähnlich verhält es sich mit den divergenten Reihen. Für einen Calcul, der es mit Gleichheitszeichen zu thun hat, und das ist fast die ganze Analysis, haben Reihen wie

$$1-2+4-8+16-32+\ldots.$$

$$1-1.2+1.2.3-1.2.3.4+\ldots.$$

gar keine Bedeutung, weil kein Ausdruck gegeben werden kann, dem sie wirklich gleich wären. Eine Betrachtung, die sich am Faden der Identitäten fortspinnt, erreicht hier ihr Ende. Divergente Reihen sind Gebilde, oder um einen hübschen Ausdruck von Fries*) zu brauchen, Figuren der combinatorischen Analysis. Hier hat Fries ganz Recht; er hätte bloss noch einen Schritt thun und unterscheiden sollen, ob der Calcul, in welchen man eine divergente Reihe einführt, sich mit Gleichheiten oder anderweitigen Beziehungen beschäftigt; er würde dann bemerkt haben, dass für eine Betrachtungsweise der ersten Art, und diess ist hauptsächlich die Analysis, bloss die numerische Bedeutung der Reihen zulässig ist, und damit hätte er das Richtige getroffen.

*) Mathematische Naturphilosophie. S. 162.

XXXI.

ber Aristarchs Methode, die Entfernung der Sonne von der Erde zu bestimmen.

Von

dem Herausgeber.

§. 1.

Aristarchs Methode, die Entfernung der Sonne von der Erde estimmen, ist in ihrem Princip so einfach, und zugleich, inso- man die Entfernung des Monds von der Erde, die sich be- tlich mittelst einer völlig directen Methode mit hinreichender uigkeit bestimmen lässt, als bekannt vorauszusetzen berech- ist, so direct, dass dieselbe, wenn sie auch für die Wissen- t selbst von keiner Bedeutung mehr ist, doch beim Unterrichte r Astronomie sorgfältiger berücksichtigt zu werden verdient, als wie es wenigstens scheint, meistens zu geschehen pflegt. Wenn laher diese Methode, die Kepler für so schön hielt, dass er n seinen Ephemeriden für das Jahr 1619 dem Galilei und us, die schon mit Fernröhren beobachteten, zur Anwendung st empfahl, zum Gegenstande des vorliegenden Aufsatzes ma- und dieselbe aus einem allgemeineren Gesichtspunkte, als dies hrem ersten Erfinder geschah, zu betrachten und darzustellen chen werde, so habe ich dabei durchaus nur ihre Bedeutung en Unterricht in methodischer Beziehung im Auge, indem ich ich der Meinung bin, dass dieselbe überhaupt als eine zweck- ge geometrische und trigonometrische Uebung für Schüler n kann, und wünsche, dass dieser Aufsatz zunächst auch nur liesem Gesichtspunkte beurtheilt werden möge.

§. 2.

Es kann wohl als hinreichend bekannt vorausgesetzt werden, Aristarchs Methode, die Entfernung der Sonne von der Erde estimmen, in ihrer ursprünglichen und einfachsten Gestalt darin ht, den Mond zur Zeit seiner Viertel, die man daran erkennt, die Lichtgränze auf dem Monde genau als eine gerade Linie eint, zu beobachten, und in diesem Moment*) die scheinbare

n der Schwierigkeit, diesen Moment genau zu treffen, liegt vorzüglich ie Unsicherheit der Methode und die geringe Genauigkeit der durch ieselbe erhaltenen Resultate.

Entfernung der Lichtgränze von dem Mittelpunkt der Sonne zu messen. Ist dann E der Beobachtungsort, M der Mittelpunkt des Monds, S der Mittelpunkt der Sonne, so ist MES die gemessene scheinbare Entfernung der Lichtgränze von dem Mittelpunkte der Sonne, und da nun wenigstens mit grosser Annäherung EMS ein rechter Winkel ist, so hat man die Gleichung

$$EM = ES \,.\, \cos MES,$$

aus der sich

$$ES = \frac{EM}{\cos MES} = EM \,.\, \sec MES$$

ergiebt. Ist man also die Entfernung EM des Monds vom Beobachtungsorte aus anderweitigen Messungen als bekannt vorauszusetzen berechtigt, so lässt sich mittelst der vorhergehenden Formel die Entfernung ES der Sonne vom Beobachtungsorte berechnen. Ueberhaupt liegt, wie man sogleich übersehen wird, dieser Methode, die Entfernung der Sonne von der Erde zu bestimmen, vorzüglich die Idee zum Grunde, die anderweitig bekannte Entfernung des Monds von der Erde zur Basis oder Standlinie zu machen, auf welche die Messung gegründet wird, weil wegen der grossen Entfernung der Sonne von der Erde der Durchmesser der letzteren eine nicht hinreichend grosse Standlinie darbietet, wenn man eine nur einigermaassen genügende Genauigkeit zu erreichen beabsichtigt.

§. 3.

Indem wir nach diesen vorläufigen allgemeinen Andeutungen die in Rede stehende Methode jetzt zu grösserer Allgemeinheit zu erheben versuchen werden, wollen wir annehmen, dass man zu irgend einer passenden Zeit mit geeigneten Instrumenten, etwa mit einem Spiegelsextanten, die folgenden Grössen gemessen habe:

den scheinbaren Halbmesser des Monds . . . . δ,
den scheinbaren Halbmesser der Sonne . . . . δ_1,
die scheinbare Entfernung der inneren Ränder der Sonne und des Monds von einander . . . . α,
die scheinbare Entfernung der Lichtgränze auf dem Monde von dem erleuchteten Mondrande, da wo diese Entfernung am grössten ist . . . . λ,

die Höhen der obern oder untern Ränder der Sonne und des Monds, woraus man mittelst der bekannten scheinbaren Durchmesser leicht die Höhen der Mittelpunkte der Sonne und des Monds findet.

Da man diese Grössen, wenn nicht mehrere mit gleich guten Instrumenten versehene Beobachter sich mit einander vereinigt haben, nicht alle in einem und demselben Zeitmomente, wie es eigentlich erforderlich ist, messen kann, so muss man in kurzen mit einer Uhr zu bestimmenden Zeitintervallen mehrere Messungen derselben anstellen, und diese Messungen dann auf bekannte Weise durch Interpolation sämmtlich auf ein gewisses mittleres Zeitmoment reduciren.

Dies vorausgesetzt, ist nun $\alpha + (\delta + \delta_1)$ die scheinbare Entfernung der Mittelpunkte der Sonne und des Monds von einander,

welche man mit Hülfe der Höhen der Mittelpunkte wegen der Refraction corrigiren muss, wobei man sich ganz auf dieselbe Weise wie bei der Bestimmung der Längen durch Monddistanzen zu verhalten hat, was, als sich in jedem guten astronomischen Lehrbuche findend, hier wohl als bekannt vorausgesetzt werden kann. Bezeichnen wir die auf diese Weise wegen der Refraction corrigirte scheinbare Entfernung der Mittelpunkte der Sonne und des Monds von einander durch μ, die scheinbare Entfernung der Lichtgränze auf dem Monde von dem Mittelpunkte der Sonne aber durch ν, so ist offenbar $\nu = \mu + \lambda - \delta$, und daher auch ν eine bekannte Grösse.

Den wahren Halbmesser des Monds und die Entfernung seines Mittelpunkts vom Beobachtungsorte wollen wir im Folgenden durch r und ϱ, den wahren Halbmesser der Sonne und die Entfernung ihres Mittelpunkts vom Beobachtungsorte dagegen durch r_1 und ϱ_1 bezeichnen.

§. 4.

Durch den Beobachtungsort und die Mittelpunkte der Sonne und des Monds denken wir uns jetzt eine Ebene gelegt, welche wir als die Ebene der xy annehmen. Der Beobachtungsort sei der Anfang der xy, die von dem Beobachtungsorte nach dem Mittelpunkte der Sonne gezogene gerade Linie sei der positive Theil der Axe der x, und der positive Theil der Axe der y werde auf der Seite der Axe der x angenommen, auf welcher sich zur Zeit der Beobachtung der Mond befindet; so sind offenbar

$$\varrho \cos \mu \text{ und } \varrho \sin \mu$$

die Coordinaten des Mittelpunkts des Monds, und die Gleichung des Durchschnitts der Ebene der xy mit der Oberfläche des Monds ist also

$$1) \quad (x - \varrho \cos \mu)^2 + (y - \varrho \sin \mu)^2 = r^2.$$

Ferner ist offenbar

$$2) \quad y = x \operatorname{tang} \nu$$

die Gleichung der von dem Beobachtungsorte nach der Lichtgränze gezogenen geraden Linie. Sind nun ξ, η die Coordinaten des Durchschnittspunkts dieser geraden Linie und des durch die Gleichung 1) charakterisirten Kreises, so hat man nach dem Vorhergehenden zur Bestimmung dieser Coordinaten die beiden Gleichungen

$$\eta = \xi \operatorname{tang} \nu,$$
$$(\xi - \varrho \cos \mu)^2 + (\eta - \varrho \sin \mu)^2 = r^2;$$

aus denen sich nach leichter Rechnung mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander

$$3) \begin{cases} \xi = \cos \nu \{\varrho \cos(\mu - \nu) \pm \sqrt{r^2 - \varrho^2 \sin(\mu - \nu)^2}\}, \\ \eta = \sin \nu \{\varrho \cos(\mu - \nu) \pm \sqrt{r^2 - \varrho^2 \sin(\mu - \nu)^2}\}; \end{cases}$$

oder, weil $r = \varrho \sin \delta$ ist,

$$4)\quad \begin{cases} \xi = \varrho \cos \nu \{\cos(\mu - \nu) \pm \sqrt{\sin \delta^2 - \sin(\mu - \nu)^2}\}, \\ \eta = \varrho \sin \nu \{\cos(\mu - \nu) \pm \sqrt{\sin \delta^2 - \sin(\mu - \nu)^2}\}; \end{cases}$$

oder

$$5)\quad \begin{cases} \xi = \varrho \cos \nu \{\cos(\mu - \nu) \pm \sqrt{\sin(\delta + \mu - \nu) \sin(\delta - \mu + \nu)}\}, \\ \eta = \varrho \sin \nu \{\cos(\mu - \nu) \pm \sqrt{\sin(\delta + \mu - \nu) \sin(\delta - \mu + \nu)}\}; \end{cases}$$

ergiebt. Berechnet man aber den Hülfswinkel Θ mittelst der Formel

$$6)\quad \tang \Theta = \frac{\sqrt{\sin(\delta + \mu - \nu) \sin(\delta - \mu + \nu)}}{\sin(\mu - \nu)},$$

was jederzeit leicht geschehen kann, so werden die vorhergehenden Gleichungen:

$$7)\quad \begin{cases} \xi = \dfrac{\varrho \cos \nu \cos(\mu - \nu \mp \Theta)}{\cos \Theta}, \\ \eta = \dfrac{\varrho \sin \nu \cos(\mu - \nu \mp \Theta)}{\cos \Theta}. \end{cases}$$

Die Gleichung des nach dem Punkte $(\xi\eta)$ gezogenen Mondhalbmessers ist

$$8)\quad y - \varrho \sin \mu = \frac{\eta - \varrho \sin \mu}{\xi - \varrho \cos \mu}(x - \varrho \cos \mu),$$

und folglich, wenn man die aus 7) bekannten Werthe von ξ und η einführt:

$$9)\quad y - \varrho \sin \mu = \frac{\sin \nu \cos(\mu - \nu \mp \Theta) - \sin \mu \cos \Theta}{\cos \nu \cos(\mu - \nu \mp \Theta) - \cos \mu \cos \Theta}(x - \varrho \cos \mu)$$

wo sich nun frägt, wie man die Zeichen in dieser Gleichung und überhaupt in den obigen Gleichungen zu nehmen hat, worüber sich auf folgende Art eine bestimmte Entscheidung leicht geben lässt.

Bezeichnen wir die Entfernung der Lichtgränze vom Beobachtungsorte durch E, so ist

$$E^2 = \xi^2 + \eta^2,$$

und folglich nach 5)

$$E^2 = \varrho^2 \{\cos(\mu - \nu) \pm \sqrt{\sin(\delta + \mu - \nu) \sin(\delta - \mu + \nu)}\}^2.$$

Weil nun $\nu = \mu + \lambda - \delta$, also

$$\mu - \nu = \delta - \lambda,\quad \cos(\mu - \nu) = \cos(\delta - \lambda),$$

und, da im vorliegenden Falle der absolute Werth von $\delta - \lambda$ gewiss niemals 90° übersteigt, $\cos(\delta - \lambda)$, folglich auch $\cos(\mu - \nu)$ stets positiv ist, so liefert das obere Zeichen in vorstehender Glei-

ung für E jederzeit einen grösseren Werth als das untere, weslb man, da die Lichtgränze natürlich immer dem Beobachter zukehrt ist, in der vorstehenden Gleichung, und folglich auch überupt in allen obigen Gleichungen die unteren Zeichen nehmen ıss. Daher muss man

$$10)\quad \begin{cases} \xi = \dfrac{\varrho \cos \nu \cos(\mu - \nu + \Theta)}{\cos \Theta}, \\ \eta = \dfrac{\varrho \sin \nu \cos(\mu - \nu + \Theta)}{\cos \Theta} \end{cases}$$

tzen, und die Gleichung des nach dem Punkte ($\xi\eta$) gezogenen ondhalbmessers ist

$$)\quad y - \varrho \sin \mu = \frac{\sin \nu \cos(\mu - \nu + \Theta) - \sin \mu \cos \Theta}{\cos \nu \cos(\mu - \nu + \Theta) - \cos \mu \cos \Theta}(x - \varrho \cos \mu).$$

ın ist aber, wie man mittelst einiger einfachen goniometrischen rwandlungen leicht findet:

$$\text{n}\ \nu \cos(\mu - \nu + \Theta) - \sin \mu \cos \Theta = \sin(\nu - \mu) \cos(\nu - \Theta),$$
$$\text{s}\ \nu \cos(\mu - \nu + \Theta) - \cos \mu \cos \Theta = -\sin(\nu - \mu) \sin(\nu - \Theta);$$

ıd folglich

$$12)\quad y - \varrho \sin \mu = -(x - \varrho \cos \mu) \cot(\nu - \Theta)$$

e Gleichung des nach dem Punkte ($\xi\eta$) gezogenen Mondhalbessers.

Die Gleichung der durch den Punkt ($\xi\eta$) gezogenen Berührenn des durch die Gleichung 1) charakterisirten Kreises sei

$$y - \eta = A(x - \xi),$$

ist wegen der Gleichung 12) nach den Principien der analytihen Geometrie

$$1 - A \cot(\nu - \Theta) = 0,\quad A = \tan(\nu - \Theta);$$

so

$$13)\quad y - \eta = (x - \xi) \tan(\nu - \Theta)$$

e Gleichung der durch den Punkt ($\xi\eta$) gezogenen Berührenden s durch die Gleichung 1) charakterisirten Kreises.

Da diese Berührende offenbar auch eine Berührende des Kreis sein muss, in welchem die Oberfläche der Sonne von der Ebene er xy geschnitten wird, so ist r_1 die Entfernung des Mittelpunkts er Sonne von der in Rede stehenden Berührenden, und folglich, ı ϱ_1,0 die Coordinaten des Mittelpunkts der Sonne sind, nach den rincipien der analytischen Geometrie

$$r_1^2 = \frac{\{(\varrho_1 - \xi) \tan(\nu - \Theta) + \eta\}^2}{1 + \tan(\nu - \Theta)^2}$$

der

$$r_1{}^2 = \{(\varrho_1 - \xi) \sin(\nu - \Theta) + \eta \cos(\nu - \Theta)\}^2;$$

also, weil $r_1 = \varrho_1 \sin \delta_1$ ist:

$$\varrho_1{}^2 \sin \delta_1{}^2 = \{(\varrho_1 - \xi) \sin(\nu - \Theta) + \eta \cos(\nu - \Theta)\}^2,$$

und folglich

$$\pm \varrho_1 \sin \delta_1 = (\varrho_1 - \xi) \sin(\nu - \Theta) + \eta \cos(\nu - \Theta),$$

woraus sich leicht

$$\varrho_1\{\sin(\nu - \Theta) \mp \sin \delta_1\} = \xi \sin(\nu - \Theta) - \eta \cos(\nu - \Theta),$$

also, wenn man für ξ und η ihre aus dem Obigen bekannten Werthe einführt:

$$2\varrho_1 \sin \tfrac{1}{2}(\nu - \Theta \mp \delta_1) \cos \tfrac{1}{2}(\nu - \Theta \pm \delta_1) = -\varrho \cos(\mu - \nu + \Theta) \tang \Theta$$

woraus sich

$$14)\quad \frac{\varrho_1}{\varrho} = -\frac{\cos(\mu - \nu + \Theta) \tang \Theta}{2\sin \frac{1}{2}(\nu - \Theta \mp \delta_1) \cos \frac{1}{2}(\nu - \Theta \pm \delta_1)},$$

oder nach 6)

$$15)\quad \frac{\varrho_1}{\varrho} = -\frac{\cos(\mu - \nu + \Theta)\sqrt{\sin(\delta + \mu - \nu) \sin(\delta - \mu + \nu)}}{2\sin(\mu - \nu) \sin \frac{1}{2}(\nu - \Theta \mp \delta_1) \cos \frac{1}{2}(\nu - \Theta \pm \delta_1)}$$

ergiebt, mittelst welcher Formeln ϱ_1 leicht aus ϱ berechnet werden kann.

Bezeichnen wir die Abscisse des Durchschnittspunkts der durch die Gleichung 13) charakterisirten Berührenden mit der Axe der x durch x_1, so ist nach 13)

$$-\eta = (x_1 - \xi) \tang(\nu - \Theta),$$

und folglich

$$x_1 = \frac{\xi \sin(\nu - \Theta) - \eta \cos(\nu - \Theta)}{\sin(\nu - \Theta)}.$$

Weil nun nach dem Obigen

$$\xi \sin(\nu - \Theta) - \eta \cos(\nu - \Theta) = \varrho_1\{\sin(\nu - \Theta) \mp \sin \delta_1\}$$

ist, so ist

$$\frac{x_1}{\varrho_1} = \frac{\sin(\nu - \Theta) \mp \sin \delta_1}{\sin(\nu - \Theta)}$$

oder

$$\frac{x_1}{\varrho_1} = 1 \mp \frac{\sin \delta_1}{\sin(\nu - \Theta)}.$$

Offenbar ist aber stets $\frac{x_1}{\varrho_1} < 1$ und $\sin \delta_1$ positiv. Also muss ...

chung für E jederzeit einen grösseren Werth als das untere, weshalb man, da die Lichtgränze natürlich immer dem Beobachter zugekehrt ist, in der vorstehenden Gleichung, und folglich auch überhaupt in allen obigen Gleichungen die unteren Zeichen nehmen muss. Daher muss man

$$10)\quad \begin{cases} \xi = \dfrac{\varrho \cos \nu \cos(\mu - \nu + \Theta)}{\cos \Theta}, \\ \eta = \dfrac{\varrho \sin \nu \cos(\mu - \nu + \Theta)}{\cos \Theta} \end{cases}$$

setzen, und die Gleichung des nach dem Punkte $(\xi\eta)$ gezogenen Mondhalbmessers ist

$$11)\quad y - \varrho \sin \mu = \frac{\sin \nu \cos(\mu - \nu + \Theta) - \sin \mu \cos \Theta}{\cos \nu \cos(\mu - \nu + \Theta) - \cos \mu \cos \Theta}(x - \varrho \cos \mu).$$

Nun ist aber, wie man mittelst einiger einfachen goniometrischen Verwandlungen leicht findet:

$$\sin \nu \cos(\mu - \nu + \Theta) - \sin \mu \cos \Theta = \sin(\nu - \mu) \cos(\nu - \Theta),$$
$$\cos \nu \cos(\mu - \nu + \Theta) - \cos \mu \cos \Theta = - \sin(\nu - \mu) \sin(\nu - \Theta);$$

und folglich

$$12)\quad y - \varrho \sin \mu = -(x - \varrho \cos \mu) \cot(\nu - \Theta)$$

die Gleichung des nach dem Punkte $(\xi\eta)$ gezogenen Mondhalbmessers.

Die Gleichung der durch den Punkt $(\xi\eta)$ gezogenen Berührenden des durch die Gleichung 1) charakterisirten Kreises sei

$$y - \eta = A(x - \xi),$$

so ist wegen der Gleichung 12) nach den Principien der analytischen Geometrie

$$1 - A \cot(\nu - \Theta) = 0,\quad A = \operatorname{tang}(\nu - \Theta);$$

also

$$13)\quad y - \eta = (x - \xi) \operatorname{tang}(\nu - \Theta)$$

die Gleichung der durch den Punkt $(\xi\eta)$ gezogenen Berührenden des durch die Gleichung 1) charakterisirten Kreises.

Da diese Berührende offenbar auch eine Berührende des Kreises sein muss, in welchem die Oberfläche der Sonne von der Ebene der xy geschnitten wird, so ist r_1 die Entfernung des Mittelpunkts der Sonne von der in Rede stehenden Berührenden, und folglich, da $\varrho_1, 0$ die Coordinaten des Mittelpunkts der Sonne sind, nach den Principien der analytischen Geometrie

$$r_1{}^2 = \frac{\{(\varrho_1 - \xi) \operatorname{tang}(\nu - \Theta) + \eta\}^2}{1 + \operatorname{tang}(\nu - \Theta)^2}$$

oder

$$r_1{}^2 = \{(\varrho_1 - \xi)\sin(\nu - \Theta) + \eta\cos(\nu - \Theta)\}^2;$$

also, weil $r_1 = \varrho_1 \sin\delta_1$ ist:

$$\varrho_1{}^2 \sin\delta_1{}^2 = \{(\varrho_1 - \xi)\sin(\nu - \Theta) + \eta\cos(\nu - \Theta)\}^2,$$

und folglich

$$\pm\varrho_1 \sin\delta_1 = (\varrho_1 - \xi)\sin(\nu - \Theta) + \eta\cos(\nu - \Theta),$$

woraus sich leicht

$$\varrho_1\{\sin(\nu - \Theta) \mp \sin\delta_1\} = \xi\sin(\nu - \Theta) - \eta\cos(\nu - \Theta),$$

also, wenn man für ξ und η ihre aus dem Obigen bekannten Werthe einführt:

$$2\varrho_1 \sin\tfrac{1}{2}(\nu - \Theta \mp \delta_1)\cos\tfrac{1}{2}(\nu - \Theta \pm \delta_1) = -\varrho\cos(\mu - \nu + \Theta)\operatorname{tang}\Theta$$

woraus sich

$$14)\quad \frac{\varrho_1}{\varrho} = -\frac{\cos(\mu - \nu + \Theta)\operatorname{tang}\Theta}{2\sin\frac{1}{2}(\nu - \Theta \mp \delta_1)\cos\frac{1}{2}(\nu - \Theta \pm \delta_1)},$$

oder nach 6)

$$15)\quad \frac{\varrho_1}{\varrho} = -\frac{\cos(\mu - \nu + \Theta)\sqrt{\sin(\delta + \mu - \nu)\sin(\delta - \mu + \nu)}}{2\sin(\mu - \nu)\sin\frac{1}{2}(\nu - \Theta \mp \delta_1)\cos\frac{1}{2}(\nu - \Theta \pm \delta_1)}$$

ergiebt, mittelst welcher Formeln ϱ_1 leicht aus ϱ berechnet werden kann.

Bezeichnen wir die Abscisse des Durchschnittspunkts der durch die Gleichung 13) charakterisirten Berührenden mit der Axe der x durch x_1, so ist nach 13)

$$-\eta = (x_1 - \xi)\operatorname{tang}(\nu - \Theta),$$

und folglich

$$x_1 = \frac{\xi\sin(\nu - \Theta) - \eta\cos(\nu - \Theta)}{\sin(\nu - \Theta)}.$$

Weil nun nach dem Obigen

$$\xi\sin(\nu - \Theta) - \eta\cos(\nu - \Theta) = \varrho_1\{\sin(\nu - \Theta) \mp \sin\delta_1\}$$

ist, so ist

$$\frac{x_1}{\varrho_1} = \frac{\sin(\nu - \Theta) \mp \sin\delta_1}{\sin(\nu - \Theta)}$$

oder

$$\frac{x_1}{\varrho_1} = 1 \mp \frac{\sin\delta_1}{\sin(\nu - \Theta)}.$$

Offenbar ist aber stets $\frac{x_1}{\varrho_1} < 1$ und $\sin\delta_1$ positiv. Also muss mit

vorstehenden Gleichung, und daher auch in allen obigen ungen die obern oder untern Zeichen nehmen, jenachdem $-\Theta)$ eine positive oder eine negative Grösse ist, mittelst s Kriteriums sich also immer sicher entscheiden lässt, wie tlich in den Formeln 14) und 15) die Zeichen zu nehmen

§. 5.

ntwickelt man die partiellen Differentiale von

$$\operatorname{tang}\Theta=\frac{\sqrt{\sin(\delta+\mu-\nu)\,\sin(\delta-\mu+\nu)}}{\sin(\mu-\nu)}$$

ug auf δ, μ, ν als veränderliche Grössen, so erhält man nach n leichten Reductionen:

$$16)\quad\begin{cases} d_\delta \operatorname{tang}\Theta = \dfrac{\sin 2\delta \cot\Theta}{2\sin(\mu-\nu)^2}d\delta, \\ d_\mu \operatorname{tang}\Theta = -\dfrac{2\cot(\mu-\nu)}{\sin 2\Theta}d\mu, \\ d_\nu \operatorname{tang}\Theta = \dfrac{2\cot(\mu-\nu)}{\sin 2\Theta}d\nu; \end{cases}$$

lglich, weil nach den bekannten Regeln der Differentialrech-

$$d_\delta\Theta=\cos\Theta^2 d_\delta \operatorname{tang}\Theta,$$
$$d_\mu\Theta=\cos\Theta^2 d_\mu \operatorname{tang}\Theta,$$
$$d_\nu\Theta=\cos\Theta^2 d_\nu \operatorname{tang}\Theta$$

$$17)\quad\begin{cases} d_\delta\Theta = \dfrac{\sin 2\delta \cos\Theta^2 \cot\Theta}{2\sin(\mu-\nu)^2}d\delta, \\ d_\mu\Theta = -\cot(\mu-\nu)\cot\Theta d\mu, \\ d_\nu\Theta = \cot(\mu-\nu)\cot\Theta d\nu. \end{cases}$$

nun bekanntlich

$$d\Theta=d_\delta\Theta+d_\mu\Theta+d_\nu\Theta$$

ist

$$18)\quad d\Theta=\frac{\sin 2\delta\cos\Theta^2\cot\Theta}{2\sin(\mu-\nu)^2}d\delta$$
$$-\cot(\mu-\nu)\cot\Theta d\mu$$
$$+\cot(\mu-\nu)\cot\Theta d\nu.$$

ckelt man ferner auch die partiellen Differentiale von

$$\frac{\varrho_1}{\varrho}=-\frac{\cos(\mu-\nu+\Theta)\operatorname{tang}\Theta}{2\sin\frac{1}{2}(\nu-\Theta\mp\delta_1)\cos\frac{1}{2}(\nu-\Theta\pm\delta_1)}$$

in Bezug auf μ, ν, δ_1, Θ als veränderliche Grössen, so erhält m
nach einigen leichten Reductionen:

$$19)\begin{cases} d\mu\left(\frac{\varrho_1}{\varrho}\right) = \frac{\sin(\mu-\nu+\Theta)\tan\Theta}{2\sin\frac{1}{2}(\nu-\Theta\mp\delta_1)\cos\frac{1}{2}(\nu-\Theta\pm\delta_1)}d\mu, \\ d\nu\left(\frac{\varrho_1}{\varrho}\right) = \frac{\cos\mu\pm\sin\delta_1\sin(\mu-\nu+\Theta)}{4\sin\frac{1}{2}(\nu-\Theta\mp\delta_1)^2\cos\frac{1}{2}(\nu-\Theta\pm\delta_1)^2}\tan\Theta d\nu, \\ d_{\delta_1}\left(\frac{\varrho_1}{\varrho}\right) = \mp\frac{\cos\delta_1\cos(\mu-\nu+\Theta)\tan\Theta}{4\sin\frac{1}{2}(\nu-\Theta\mp\delta_1)^2\cos\frac{1}{2}(\nu-\Theta\pm\delta_1)^2}d\delta_1, \\ d_\Theta\left(\frac{\varrho_1}{\varrho}\right) = -\frac{\cos\mu\pm\sin\delta_1\sin(\mu-\nu+\Theta)}{4\sin\frac{1}{2}(\nu-\Theta\mp\delta_1)^2\cos\frac{1}{2}(\nu-\Theta\pm\delta_1)^2}\tan\Theta \\ \qquad -\frac{\cos(\mu-\nu+\Theta)\sec\Theta^2}{2\sin\frac{1}{2}(\nu-\Theta\mp\delta_1)\cos\frac{1}{2}(\nu-\Theta\pm\delta_1)}d\Theta; \end{cases}$$

woraus sich leicht

$$20)\quad d\left(\frac{\varrho_1}{\varrho}\right) = d\mu\left(\frac{\varrho_1}{\varrho}\right) + d\nu\left(\frac{\varrho_1}{\varrho}\right) + d_{\delta_1}\left(\frac{\varrho_1}{\varrho}\right) + d_\Theta\left(\frac{\varrho_1}{\varrho}\right)$$

ergiebt.

Setzen wir nun der Kürze wegen:

$$21)\quad A = \frac{\sin 2\delta\cos\Theta^2\cot\Theta}{2\sin(\mu-\nu)^2},$$

$$B = \cot(\mu-\nu)\cot\Theta,$$

$$C = \frac{\sin(\mu-\nu+\Theta)\tan\Theta}{2\sin\frac{1}{2}(\nu-\Theta\mp\delta_1)\cos\frac{1}{2}(\nu-\Theta\pm\delta_1)},$$

$$D = \frac{\cos(\mu-\nu+\Theta)\sec\Theta^2}{2\sin\frac{1}{2}(\nu-\Theta\mp\delta_1)\cos\frac{1}{2}(\nu-\Theta\pm\delta_1)},$$

$$E = \frac{\cos\delta_1\cos(\mu-\nu+\Theta)\tan\Theta}{4\sin\frac{1}{2}(\nu-\Theta\mp\delta_1)^2\cos\frac{1}{2}(\nu-\Theta\pm\delta_1)^2},$$

$$F = \frac{\cos\mu\pm\sin\delta_1\sin(\mu-\nu+\Theta)}{4\sin\frac{1}{2}(\nu-\Theta\mp\delta_1)^2\cos\frac{1}{2}(\nu-\Theta\pm\delta_1)^2}\tan\Theta;$$

so ist

$$d\Theta = Ad\delta - Bd\mu + Bd\nu$$

und

$$d\left(\frac{\varrho_1}{\varrho}\right) = Cd\mu + Fd\nu \mp Ed\delta_1 - (D+F)d\Theta;$$

also

$$d\left(\frac{\varrho_1}{\varrho}\right) = -A(D+F)d\delta \mp Ed\delta_1$$
$$+\{C+B(D+F)\}d\mu + \{F-B(D+F)\}d\nu.$$

Nun kann man aber nach §. 3. offenbar wenigstens mit gross
Annäherung

$$d\mu = d\alpha + d\delta + d\delta_1,\quad d\nu = d\mu + d\lambda - d\delta;$$

also

$$d\mu = d\alpha + d\delta + d\delta_1, \quad d\nu = d\alpha + d\delta_1 + d\lambda$$

setzen. Folglich ist nach dem Vorhergehenden

$$d\left(\frac{\varrho_1}{\varrho}\right) = -A(D+F)d\delta \mp E d\delta_1$$
$$+ \{C + B(D+F)\}(d\alpha + d\delta + d\delta_1)$$
$$+ \{F - B(D+F)\}(d\alpha + d\delta_1 + d\lambda),$$

d. i., wie man leicht findet:

$$22)\quad d\left(\frac{\varrho_1}{\varrho}\right) = (C+F)d\alpha$$
$$+ \{F - B(D+F)\}d\lambda$$
$$+ \{C - (A-B)(D+F)\}d\delta$$
$$+ (C + F \mp E)d\delta_1.$$

Auch erhält man hieraus leicht

$$23)\quad \frac{d\varrho_1}{\varrho} = \frac{\varrho_1}{\varrho} \cdot \frac{d\varrho}{\varrho} + (C+F)d\alpha$$
$$+ \{F - B(D+F)\}d\lambda$$
$$+ \{C - (A-B)(D+F)\}d\delta$$
$$+ (C + F \mp E)d\delta_1.$$

In allen vorhergehenden Gleichungen hat man die obern oder untern Zeichen zu nehmen, jenachdem $\sin(\nu - \Theta)$ eine positive oder eine negative Grösse ist.

§. 6.

Wir wollen nun noch in der Kürze zeigen, wie aus der Entfernung eines Weltkörpers W vom Mittelpunkte C der Erde seine Entfernung von einem beliebigen Orte O auf der Oberfläche der Erde, und umgekehrt wie aus der Entfernung eines Weltkörpers W von einem beliebigen Orte auf der Oberfläche der Erde seine Entfernung von dem Mittelpunkte C der Erde gefunden werden kann, wobei wir grösserer Bestimmtheit wegen im Folgenden annehmen werden, dass der Punkt O in der nördlichen Hälfte der Erdoberfläche liege.

Zu dem Ende sei φ die Polhöhe, φ_1 die sogenannte geocentrische Breite des Orts O, und R sei der nach demselben gezogene Erdhalbmesser *). Ferner seien ω, h das sogenannte scheinbare Azimuth und die sogenannte scheinbare Höhe, dagegen ω_1, h_1 das sogenannte wahre Azimuth und die sogenannte wahre Höhe des Weltkörpers W, wobei die Azimuthe von Süden nach Westen von

*) Wie aus der Polhöhe die geocentrische Breite und der Erdhalbmesser gefunden werden können, ist Archiv. Thl. I. S. 177. gezeigt worden.

0 bis 360° gezählt werden sollen. Die Entfernungen des Weltl
pers W von dem Orte O und dem Mittelpunkte C der Erde s
respective Δ und Δ_1.

Durch den Ort O als Anfang legen wir ein rechtwinkl
Coordinatensystem der xyz. Die Ebene der xz sei die Ebene
Meridians. Der positive Theil der Axe der x sei nach Süden,
positive Theil der Axe der y sei nach Westen, und der posi
Theil der Axe der z sei nach dem Zenith gerichtet. Durch
Mittelpunkt C der Erde als Anfang legen wir ein zweites,
Systeme der xyz paralleles Coordinatensystem der $x_1y_1z_1$.

Die Coordinaten des Weltkörpers W im Systeme der xyz s

$$\Delta \cos \omega \cos h,$$
$$\Delta \sin \omega \cos h,$$
$$\Delta \sin h;$$

und seine Coordinaten im Systeme der $x_1y_1z_1$ sind:

$$\Delta_1 \cos \omega_1 \cos h_1,$$
$$\Delta_1 \sin \omega_1 \cos h_1,$$
$$\Delta_1 \sin h_1.$$

Die Coordinaten des Punktes O in Bezug auf das System
$x_1y_1z_1$ sind aber, wie durch eine leichte geometrische Betracht
sogleich erhellen wird:

$$R \sin(\varphi - \varphi_1),\ 0,\ R \cos(\varphi - \varphi_1);$$

und nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten ha
wir also die drei folgenden Gleichungen:

$$\Delta_1 \cos \omega_1 \cos h_1 = R \sin(\varphi - \varphi_1) + \Delta \cos \omega \cos h,$$
$$\Delta_1 \sin \omega_1 \cos h_1 = \Delta \sin \omega \cos h,$$
$$\Delta_1 \sin h_1 = R \cos(\varphi - \varphi_1) + \Delta \sin h.$$

Quadrirt man auf beiden Seiten dieser Gleichungen, und ad
dieselben dann zu einander, so erhält man die Gleichung

$$\Delta_1^2 = R^2 + \Delta^2 + 2R\Delta\{\sin h \cos(\varphi - \varphi_1) + \cos \omega \cos h \sin(\varphi - \varphi$$

oder, wenn

$$24)\quad \cos \Omega = \sin h \cos(\varphi - \varphi_1) + \cos \omega \cos h \sin(\varphi - \varphi_1)$$

gesetzt wird, die Gleichung

$$25)\quad \Delta_1^2 = R^2 + \Delta^2 + 2R\Delta \cos \Omega.$$

Sind nun Δ, ω, h, also auch Ω gegeben, so erhält man Δ_1 n
elst des Formel

$$26)\quad \Delta_1 = \sqrt{R^2 + \Delta^2 + 2R\Delta \cos \Omega},$$

die sich bekanntlich auf verschiedene Arten zur logarithmischen Rechnung bequem einrichten lässt.

Sind dagegen Δ_1, ω, h gegeben, so erhält man Δ durch Auflösung der quadratischen Gleichung

$$\Delta^2 + 2R\Delta \cos \Omega = \Delta_1{}^2 - R^2,$$

wodurch sich

$$27)\quad \Delta = -R \cos \Omega \pm \sqrt{\Delta_1{}^2 - R^2 \sin \Omega^2}$$

ergiebt.

Das Product dieser beiden Werthe von Δ ist $R^2 - \Delta_1{}^2$, und folglich, da im vorliegenden Falle offenbar immer $\Delta_1 > R$ ist, stets negativ. Daher haben die beiden Werthe von Δ jederzeit entgegengesetzte Vorzeichen. Ist nun $\cos \Omega$ positiv, so ist

$$-R \cos \Omega - \sqrt{\Delta_1{}^2 - R^2 \sin \Omega^2}$$

offenbar negativ, also

$$-R \cos \Omega + \sqrt{\Delta_1{}^2 - R^2 \sin \Omega^2}$$

positiv. Ist dagegen $\cos \Omega$ negativ, so ist

$$-R \cos \Omega + \sqrt{\Delta_1{}^2 - R^2 \sin \Omega^2}$$

offenbar positiv, also

$$-R \cos \Omega - \sqrt{\Delta_1{}^2 - R^2 \sin \Omega^2}$$

negativ. Daher muss man, weil Δ seiner Natur nach nur positiv sein kann, in der Gleichung 27) immer das obere Zeichen nehmen, und folglich

$$28)\quad \Delta = -R \cos \Omega + \sqrt{\Delta_1{}^2 - R^2 \sin \Omega^2}$$

oder

$$29)\quad \Delta = -R \cos \Omega + \sqrt{(\Delta_1 + R \sin \Omega)(\Delta_1 - R \sin \Omega)}$$

setzen.

Nimmt man, was in Folge der Gleichung 24) offenbar verstattet ist, den Hülfswinkel Ω stets positiv und nicht grösser als 180°, so ist $\sin \Omega$ immer positiv, und man kann also

$$\Delta = -R \cos \Omega + R \sin \Omega \sqrt{\frac{\Delta_1{}^2}{R^2 \sin \Omega^2} - 1}$$

setzen. Berechnet man nun den Hülfswinkel Φ mittelst der Formel

$$\sec \Phi = \frac{\Delta_1}{R \sin \Omega}$$

oder mittelst der Formel

$$30)\quad \cos\Phi = \frac{R}{\Delta_1}\sin\Omega,$$

und nimmt Φ positiv und nicht grösser als 90°, was wegen des positiven Vorzeichens von $\sin\Omega$ verstattet ist, so ist

$$\Delta = -R\cos\Omega + R\sin\Omega\,\mathrm{tang}\,\Phi,$$

also

$$31)\quad \Delta = -R\frac{\cos(\Omega+\Phi)}{\cos\Phi},$$

mittelst welcher Formeln Δ sehr leicht berechnet werden kann.

Wenn die Sternzeit der Beobachtung bekannt ist, und auch die Rectascension des Weltkörpers W als bekannt angenommen wird, so kann man immer das Azimuth aus der Höhe h und der Polhöhe φ leicht berechnen, was hier nicht weiter erläutert zu werden braucht.

XXXII.

Einige Bemerkungen über die Reduction der Monddistanzen.

Von

dem Herausgeber.

Wir wollen die wahre und scheinbare Höhe des einen Gestirns durch H, H'; die wahre und scheinbare Höhe des anderen Gestirns durch h, h'; die wahre und scheinbare Distanz durch Δ, Δ' bezeichnen. Werden dann ferner die grössten Kreisbogen, welche die Endpunkte der Höhen H, h' und die Endpunkte der Höhen H', h mit einander verbinden, durch D und $\mathfrak{D}$ bezeichnet, so haben wir offenbar die folgenden Gleichungen:

$$1)\quad \frac{\cos\Delta - \sin H\sin h}{\cos H\cos h} = \frac{\cos\Delta' - \sin H'\sin h'}{\cos H'\cos h'}$$

$$= \frac{\cos D - \sin H\sin h'}{\cos H\cos h'} = \frac{\cos\mathfrak{D} - \sin H'\sin h}{\cos H'\cos h}.$$

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich sehr leicht:

$$2)\ \begin{cases}\cos H' \cos D - \cos H \cos \Delta' = \sin(H-H') \sin h',\\ \cos h' \cos \Delta - \cos h \cos D = \sin(h-h') \sin H;\end{cases}$$

so wie

$$3)\ \begin{cases}\cos h' \cos \mathfrak{D} - \cos h \cos \Delta' = \sin(h-h') \sin H',\\ \cos H' \cos \Delta - \cos H \cos \mathfrak{D} = \sin(H-H') \sin h;\end{cases}$$

und wir haben daher zur Berechnung von Δ aus Δ', H, H', h, h' die folgenden Formeln:

$$4)\ \begin{cases}\cos D = \dfrac{\cos H}{\cos H'} \cos \Delta' + \dfrac{\sin h'}{\cos H'} \sin(H-H'),\\ \cos \Delta = \dfrac{\cos h}{\cos h'} \cos D + \dfrac{\sin H}{\cos h'} \sin(h-h')\end{cases}$$

und

$$5)\ \begin{cases}\cos \mathfrak{D} = \dfrac{\cos h}{\cos h'} \cos \Delta' + \dfrac{\sin H'}{\cos h'} \sin(h-h'),\\ \cos \Delta = \dfrac{\cos H}{\cos H'} \cos \mathfrak{D} + \dfrac{\sin h}{\cos H'} \sin(H-H');\end{cases}$$

wo D und $\mathfrak{D}$ als Hülfsgrössen zu betrachten sind.

Eliminirt man aus den Gleichungen 2) die Grösse $\cos D$, und aus den Gleichungen 3) die Grösse $\cos \mathfrak{D}$, so erhält man die beiden folgenden Gleichungen:

$$6)\quad \cos H' \cos h' \cos \Delta - \cos H \cos h \cos \Delta'$$
$$= \sin(H-H') \cos h \sin h' + \sin(h-h') \sin H \cos H'$$

und

$$7)\quad \cos H' \cos h' \cos \Delta - \cos H \cos h \cos \Delta'$$
$$= \sin(H-H') \sin h \cos h' + \sin(h-h') \cos H \sin H',$$

durch deren Addition sich ferner die Gleichung

$$8)\quad 2(\cos H' \cos h' \cos \Delta - \cos H \cos h \cos \Delta')$$
$$= \sin(H-H') \sin(h+h') + \sin(H+H') \sin(h-h')$$

oder

$$9)\ \cos\Delta = \frac{\cos H \cos h}{\cos H' \cos h'} \cos\Delta' + \frac{\sin(H-H')\sin(h+h') + \sin(H+H')\sin(h-h')}{2\cos H' \cos h'}$$

ergiebt.

Setzt man in den beiden Gleichungen 4)

$$H = H' + (H-H'),\quad h = h' + (h-h');$$

so werden dieselben

$$\cos D = \cos(H - H') \cos \Delta' + \sin(H - H') \frac{\sin h' -}{}$$

$$\cos \Delta = \cos(h - h') \cos D + \sin(h - h') \frac{\sin H}{}$$

oder

$$\cos D = \quad \cos(H - H') \cos \Delta' - \sin(H -$$

$$+ \sin(H - H')(\sin \Delta' + \frac{\sin h' - \sin}{\cos}$$

$$= \quad \cos(H - H') \cos \Delta' + \sin(H -$$

$$- \sin(H - H')(\sin \Delta' - \frac{\sin h' - \sin}{\cos}$$

$$\cos \Delta = \quad \cos(h - h') \cos D - \sin(h - h'$$

$$+ \sin(h - h')(\sin D + \frac{\sin H - \sin}{\cos}$$

$$= \quad \cos(h - h') \cos D + \sin(h - h'$$

$$- \sin(h - h')(\sin D - \frac{\sin H - \sin}{\cos}$$

d. i.

$$\cos D = \cos(H - H' + \Delta') + \sin(H - H') \frac{\sin h'}{}$$

$$= \cos(H - H' - \Delta') + \sin(H - H') \frac{\sin h'}{}$$

$$\cos \Delta = \cos(h - h' + D) + \sin(h - h') \frac{\sin H -}{}$$

$$= \cos(h - h' - D) + \sin(h - h') \frac{\sin H -}{}$$

also nach einer bekannten Zerlegung:

$$10) \quad \cos D =$$

$$\cos(H - H' + \Delta') + 2\sin(H - H') \frac{\sin \tfrac{1}{2}(h' - H' + \Delta')}{\cos}$$

$$= \cos(H - H' - \Delta') + 2\sin(H - H') \frac{\sin \tfrac{1}{2}(h' - H' - \Delta')}{\cos}$$

$$\cos \Delta =$$

$$\cos(h - h' + D) + 2\sin(h - h') \frac{\sin \tfrac{1}{2}(H - h' + D)}{\cos}$$

$$= \cos(h - h' - D) + 2\sin(h - h') \frac{\sin \tfrac{1}{2}(H - h' - D)}{\cos}$$

Bezeichnen wir die kleinen Veränderungen, welche

$$\cos(H - H' + \Delta'), \; \cos(H - H' -$$

erleiden müssen, um in cos D überzugehen, durch

$$d\cos(H-H'+\Delta'),\ d\cos(H-H'-\Delta');$$

die kleinen Veränderungen, welche

$$\cos(h-h'+D),\ \cos(h-h'-D)$$

erleiden müssen, um in cos Δ überzugehen, durch

$$d\cos(h-h'+D),\ d\cos(h-h'-D);$$

so ist nach dem Vorhergehenden:

$$11)\ d\cos(H-H'+\Delta')=2\sin(H-H')\frac{\sin\frac{1}{2}(h'-H'+\Delta')\cos\frac{1}{2}(h'+H'-\Delta')}{\cos H'},$$

$$d\cos(H-H'-\Delta')=2\sin(H-H')\frac{\sin\frac{1}{2}(h'-H'-\Delta')\cos\frac{1}{2}(h'+H'+\Delta')}{\cos H'},$$

$$d\cos(h-h'+D)=2\sin(h-h')\frac{\sin\frac{1}{2}(H-h'+D)\cos\frac{1}{2}(H+h'-D)}{\cos h'},$$

$$d\cos(h-h'-D)=2\sin(h-h')\frac{\sin\frac{1}{2}(H-h'-D)\cos\frac{1}{2}(H+h'+D)}{\cos h'};$$

und da sich diese kleinen Veränderungen mittelst der vorstehenden Formeln immer leicht finden lassen, so wird man mit Hülfe der Tafeln auch immer die kleinen Veränderungen leicht finden können, welche

$$H-H'+\Delta',\ H-H'-\Delta'$$

erleiden müssen, um in D, und welche

$$h-h'+D,\ h-h'-D$$

erleiden müssen, um in Δ überzugehen, wird also auf diese Weise immer Δ ohne Schwierigkeit zu berechnen im Stande sein.

Setzen wir

$$\begin{aligned}\cos D &= \cos\{H-H'+\Delta'+d(H-H'+\Delta')\}\\ &= \cos\{H-H'-\Delta'+d(H-H'-\Delta')\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos\Delta &= \cos\{h-h'+D+d(h-h'+D)\}\\ &= \cos\{h-h'-D+d(h-h'-D)\};\end{aligned}$$

so ist nach den Principien der Differentialrechnung bekanntlich näherungsweise

$$\begin{aligned}\cos D &= \cos(H-H'+\Delta')-\sin(H-H'+\Delta')d(H-H'+\Delta')\\ &= \cos(H-H'-\Delta')-\sin(H-H'-\Delta')d(H-H'-\Delta'),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos\Delta &= \cos(h-h'+D)-\sin(h-h'+D)d(h-h'+D)\\ &= \cos(h-h'-D)-\sin(h-h'-D)d(h-h'-D);\end{aligned}$$

und zur Bestimmung von

$$d(H-H'+\Delta'),\ d(H-H'-\Delta')$$

und

$$d(h-h'+D),\ d(h-h'-D)$$

hat man also nach 11) offenbar die folgenden Näherungsformeln:

$$12)\quad d(H-H'+\Delta')=-2\sin(H-H')\frac{\sin\frac{1}{2}(h'-H'+\Delta')\cos\frac{1}{2}(h'+H'-\Delta')}{\cos H'\sin(H-H'+\Delta')},$$

$$d(H-H'-\Delta')=-2\sin(H-H')\frac{\sin\frac{1}{2}(h'-H'-\Delta')\cos\frac{1}{2}(h'+H'+\Delta')}{\cos H'\sin(H-H'-\Delta')},$$

$$d(h-h'+D)=-2\sin(h-h')\frac{\sin\frac{1}{2}(H-h'+D)\cos\frac{1}{2}(H+h'-D)}{\cos h'\sin(h-h'+D)},$$

$$d(h-h'-D)=-2\sin(h-h')\frac{\sin\frac{1}{2}(H-h'-D)\cos\frac{1}{2}(H+h'+D)}{\cos h'\sin(h-h'-D)},$$

Wie man diese in Theilen des der Einheit gleichen Halbmessers ausgedrückten Veränderungen auf die einfachste und zweckmässigste Weise in Secunden zu verwandeln hat, kann hier füglich als bekannt vorausgesetzt werden, so wie es an diesem Orte überhaupt unnöthig scheint, in weiteres Detail über die beste Art der Anwendung der obigen Formeln einzugehen.

Dass man übrigens auch aus den beiden Gleichungen 5) ganz ähnliche Formeln ableiten könnte, fällt auf der Stelle in die Augen.

XXXIII.

Einige Bemerkungen über die Gleichungen des dritten Grades.

Nach einer Abhandlung des Herrn Professor R. Lobatto zu Delft in dem Journal de Mathématiques pures et appliquées, publié par J. Liouville. Mai 1844. p. 177. frei bearbeitet

von

dem Herausgeber.

In dieser Abhandlung des Herrn Professor Lobatto kommen ausser anderen interessanten Sätzen einige bemerkenswerthe Formeln vor, durch welche zwei Wurzeln einer cubischen Gleichung durch die dritte ausgedrückt werden. Diese Formeln werde ich im Folgenden mittheilen.

Die gegebene cubische Gleichung sei

$$1)\quad x^3 - px + q = 0.$$

Wenn nun

$$2)\quad \begin{cases} y = \sqrt[3]{(-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 - \tfrac{1}{27}p^3})}, \\ z = \sqrt[3]{(-\tfrac{1}{2}q - \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 - \tfrac{1}{27}p^3})} \end{cases}$$

gesetzt wird, wo die Grössen y und z bekanntlich immer den Gleichungen

$$3)\quad 3yz = p,\ y^3 + z^3 = -q$$

genügen, und ausserdem offenbar

$$4)\quad y^3 - z^3 = 2\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 - \tfrac{1}{27}p^3}$$

ist; so ist bekanntlich nach der Cardanischen Formel immer

$$5)\quad u = y + z$$

eine Wurzel der gegebenen cubischen Gleichung, und die beiden anderen Wurzeln u_1 und u_2 derselben erhält man aus den Gleichungen

$$6)\quad u + u_1 + u_2 = 0,\ uu_1u_2 = -q$$

oder

$$7)\quad u_1 + u_2 = -u,\quad u_1 u_2 = -\frac{q}{u}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergiebt sich

$$(u_1 + u_2)^2 - 4u_1 u_2 = u^2 + \frac{4q}{u},$$

d. i.

$$(u_1 - u_2)^2 = u^2 + \frac{4q}{u},$$

und folglich

$$u_1 - u_2 = \pm\sqrt{\frac{u^3 + 4q}{u}}.$$

Verbindet man diese Gleichung mit der ersten der beiden Gleic gen 7), so erhält man

$$u_1 = -\tfrac{1}{2}u \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{u^3 + 4q}{u}},$$

$$u_2 = -\tfrac{1}{2}u \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{u^3 + 4q}{u}};$$

und kann also immer

$$8)\quad \begin{cases} u_1 = -\tfrac{1}{2}u + \tfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{u^3 + 4q}{u}}, \\ u_2 = -\tfrac{1}{2}u - \tfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{u^3 + 4q}{u}} \end{cases}$$

setzen.

Weil aber u eine Wurzel der gegebenen Gleichung und folg

$$u^3 - pu + q = 0$$

ist, so ist

$$u^3 + 4q = pu + 3q = 4pu - 3u^3;$$

also

$$9)\quad \begin{cases} u_1 = -\tfrac{1}{2}u + \tfrac{1}{2}\sqrt{p + \dfrac{3q}{u}} = -\tfrac{1}{2}u + \tfrac{1}{2}\sqrt{4p - 3u^2}, \\ u_2 = -\tfrac{1}{2}u - \tfrac{1}{2}\sqrt{p + \dfrac{3q}{u}} = -\tfrac{1}{2}u - \tfrac{1}{2}\sqrt{4p - 3u^2}. \end{cases}$$

Nach 3) und 5) ist

$$4p - 3u^2 = 12yz - 3(y + z)^2 = -3(y - z)^2,$$

also

$$\sqrt{4p - 3u^2} = (y - z)\sqrt{-3},$$

und folglich

$$10)\quad \begin{cases} u_1 = -\frac{1}{2}\{u - (y-z)\sqrt{-3}\}, \\ u_2 = -\frac{1}{2}\{u + (y-z)\sqrt{-3}\}; \end{cases}$$

oder

$$11)\quad \begin{cases} u_1 = -\frac{1}{2}\{y + z - (y-z)\sqrt{-3}\}, \\ u_2 = -\frac{1}{2}\{y + z + (y-z)\sqrt{-3}\}. \end{cases}$$

Weil, wie man durch Division leicht findet,

$$\frac{y^3 - z^3}{y - z} = y^2 + yz + z^2,$$

$$\frac{y^3 + z^3}{y + z} = y^2 - yz + z^2$$

ist, so ist

$$\frac{y^3 - z^3}{y - z} = \frac{y^3 + z^3}{y + z} + 2yz,$$

und folglich nach dem Obigen

$$\frac{2\sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}}{y - z} = -\frac{q}{u} + \frac{2p}{3} = \frac{2pu - 3q}{3u},$$

also

$$y - z = \frac{6u\sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}}{2pu - 3q} = \frac{3u\sqrt{q^2 - \frac{4}{27}p^3}}{2pu - 3q}.$$

Führt man diesen Werth von $y - z$ in die Gleichungen 10) ein, so erhält man:

$$12)\quad \begin{cases} u_1 = -\frac{1}{2}u - \dfrac{u\sqrt{p^3 - \frac{27}{4}q^2}}{3q - 2pu}, \\ u_2 = -\frac{1}{2}u + \dfrac{u\sqrt{p^3 - \frac{27}{4}q^2}}{3q - 2pu}. \end{cases}$$

Diese Formeln*) sind nach Herrn Lobatto's Angabe von Young in dem Buche: The Analysis and solution of cubic and biquadratic equations. London. 1842. zuerst bekannt gemacht worden.

Um ein Beispiel zu geben, sei

$$x^3 - 7x + 7 = 0$$

die gegebene cubische Gleichung, so ist $p = 7$, $q = 7$, also

$$\sqrt{p^3 - \tfrac{27}{4}q^2} = \sqrt{343 - 330{,}75} = \sqrt{12{,}25} = 3{,}5;$$

*) In der Abhandlung des Herrn Lobatto sind die Formeln von Druckfehlern nicht ganz frei.

und folglich sind

$$u_1 = -\tfrac{1}{2}u - \frac{3{,}5u}{21 - 14u} = -\tfrac{1}{2}u - \frac{u}{6 - 4u},$$

$$u_2 = -\tfrac{1}{2}u + \frac{3{,}5u}{21 - 14u} = -\tfrac{1}{2}u + \frac{u}{6 - 4u}$$

oder

$$u_1 = -\frac{2-u}{3-2u}u,\ u_2 = -\frac{1-u}{3-2u}u$$

zwei Wurzeln der gegebenen Gleichung, wenn u eine Wurzel derselben ist.

Ein anderer englischer Mathematiker, Herr Lockhart, hat von den vorhergehenden verschiedene Ausdrücke zweier Wurzeln einer cubischen Gleichung durch die dritte gegeben, welche im Allgemeinen von der Form

$$\frac{\alpha u + \beta}{\alpha_1 u + \beta_1}$$

sind. Zu diesen bemerkenswerthen Ausdrücken gelangt Herr Lobatto im Wesentlichen auf folgende Weise.

Für $r = \sqrt{p^3 - \frac{27}{4}q^2}$ sei überhaupt

$$13)\quad -\tfrac{1}{2}x \mp \frac{rx}{3q - 2px} = \frac{ax+b}{x+c},$$

so erhält man, wenn der Kürze wegen $2a + c = a_1$ gesetzt wird, nach gehöriger Entwickelung dieser Gleichung die Gleichung:

$$14)\quad \left.\begin{aligned} & x^3 + (a_1 - \frac{3q \pm 2r}{2p})x^2 \\ & + (2b - \frac{3qa_1 \pm 2rc}{2p})x \\ & - \frac{3qb}{p} \end{aligned}\right\} = 0.$$

Soll nun diese Gleichung mit der Gleichung

$$x^3 - px + q = 0$$

identisch sein, so müssen die Grössen a_1, b, c so bestimmt werden, dass sie den drei Gleichungen

$$a_1 - \frac{3q \pm 2r}{2p} = 0,\ 2b - \frac{3qa_1 \pm 2rc}{2p} = -p,\ \frac{3qb}{p} = -q$$

genügen.

Aus der ersten und dritten Gleichung ergiebt sich auf der Stelle

$$a_1 = \frac{3q \pm 2r}{2p},\ b = -\tfrac{1}{3}p.$$

Führt man diese Werthe von a_1 und b in die zweite Gleichung ein, so erhält man

$$4prc + 3q(2r \pm 3q) \mp \tfrac{4}{3}p^2 = 0.$$

Weil nun nach dem Obigen

$$p^3 - \tfrac{27}{4}q^2 = r^2, \text{ also } 4p^3 = 27q^2 + 4r^2$$

ist, so ist, wie man leicht findet:

$$6pc + 9q \mp 2r = 0,$$

also

$$c = -\frac{9q \mp 2r}{6p}.$$

Ferner ist

$$2a = a_1 - c = \frac{3q \pm 2r}{2p} + \frac{9q \mp 2r}{6p} = \frac{9q \pm 2r}{3p},$$

also

$$a = \frac{9q \pm 2r}{6p}.$$

Hieraus sieht man, dass, wenn

$$a = \frac{9q \pm 2r}{6p}, \; b = -\tfrac{1}{3}p, \; c = -\frac{9q \mp 2r}{6p}$$

ist, jeder Werth von x, welcher der Gleichung

$$x^3 - px + q = 0$$

genügt, immer auch der Gleichung

$$-\tfrac{1}{2}x \mp \frac{rx}{3q - 2px} = \frac{ax + b}{x + c}$$

genügt. Da nun nach dem Obigen u eine Wurzel der Gleichung

$$x^3 - px + q = 0$$

ist, so ist auch

$$-\tfrac{1}{2}u \mp \frac{ru}{3q - 2pu} = \frac{au + b}{u + c},$$

und weil nach dem Obigen

$$-\tfrac{1}{2}u \mp \frac{ru}{3q - 2pu}$$

jederzeit Wurzeln der Gleichung

$$x^3 - px + q = 0$$

sind, so sind auch die beiden Werthe von

$$\frac{au+b}{u+c},$$

welche dieser Bruch erhält, wenn man in ihn die beiden obigen Systeme von Werthen der Grössen a, b, c einführt, Wurzeln der in Rede stehenden Gleichung. Also kann man die drei Wurzeln der Gleichung

$$x^3-px+q=0,$$

wie man mittelst des Vorhergehenden leicht findet, immer auch auf folgende Art ausdrücken:

$$15)\quad \begin{cases} u, \\ u_1=\dfrac{(9q+2r)u-2p^2}{6pu-(9q-2r)}, \\ u_2=\dfrac{(9q-2r)u-2p^2}{6pu-(9q+2r)}. \end{cases}$$

Dies sind nach Herrn Lobatto die von Herrn Lockhart gegebenen Formeln.

Ist $x^3-19x-30=0$ die gegebene cubische Gleichung, so ist $p=19$, $q=-30$, also

$$p^3=6859,\ \tfrac{27}{4}q^2=6075,\ r=\sqrt{784}=28;$$

folglich

$$9q+2r=-214,\ 9q-2r=-326.$$

Also ist in diesem Falle

$$u_1=-\frac{107u+361}{57u+163},\ u_2=-\frac{163u+361}{57u+107}.$$

Den übrigen bemerkenswerthen Inhalt der Abhandlung des Herrn Lobatto, welcher vorzüglich die Entwickelung der Wurzeln in Kettenbrüche betrifft, für den Elementarunterricht aber von geringerem Interesse ist, muss man in ihr selbst nachsehen.

Nachschrift.

Das Vorhergehende ruft mir eine schon vor längerer Zeit von mir gefundene goniometrische Transformation einer jeden cubischen Gleichung in's Gedächtniss zurück, die zwar, wenigstens in der , in welcher ich sie jetzt zu geben im Stande bin, für die ung der cubischen Gleichungen selbst nicht von besonderer

Bedeutung, dessenungeachtet aber in mehrfacher Beziehung interessant zu sein scheint. Diese Transformation werde ich im Folgenden vorzüglich deshalb mittheilen, weil dadurch vielleicht der eine oder der andere Leser zu weiteren Untersuchungen über diesen Gegenstand, zu denen mir selbst jetzt Zeit und Musse fehlen, veranlasst werden dürfte.

Die gegebene cubische Gleichung sei überhaupt

$$1)\quad x^3 - mx^2 + nx - k = 0.$$

Sind nun

$$\tang\Theta,\ \tang\Theta_1,\ \tang\Theta_2,$$

wo die Bogen Θ, Θ_1, Θ_2 auch imaginär sein können, ihre drei Wurzeln, so hat man bekanntlich die drei folgenden Gleichungen:

$$2)\quad \begin{cases} \tang\Theta + \tang\Theta_1 + \tang\Theta_2 = m, \\ \left.\begin{array}{l} \tang\Theta\tang\Theta_1 \\ +\tang\Theta\tang\Theta_2 \\ +\tang\Theta_1\tang\Theta_2 \end{array}\right\} = n, \\ \tang\Theta\tang\Theta_1\tang\Theta_2 = k. \end{cases}$$

Weil nun nach einer bekannten goniometrischen Formel

$$\tang(\Theta+\Theta_1+\Theta_2)$$

$$= \frac{\tang\Theta + \tang\Theta_1 + \tang\Theta_2 - \tang\Theta\tang\Theta_1\tang\Theta_2}{1 - \tang\Theta\tang\Theta_1 - \tang\Theta\tang\Theta_2 - \tang\Theta_1\tang\Theta_2}$$

ist, so ist nach dem Vorhergehenden

$$3)\quad \tang(\Theta+\Theta_1+\Theta_2) = \frac{m-k}{1-n},$$

mittelst welcher Formel die reelle Summe $\Theta+\Theta_1+\Theta_2$ immer bestimmt werden kann.

Ferner ist

$$1-n$$

$$= 1 - \tang\Theta\tang\Theta_1 - \tang\Theta\tang\Theta_2 - \tang\Theta_1\tang\Theta_2$$

$$= \frac{\cos(\Theta+\Theta_1)}{\cos\Theta\cos\Theta_1} - \frac{\sin(\Theta+\Theta_1)}{\cos\Theta\cos\Theta_1}\tang\Theta_2$$

$$= \frac{\cos(\Theta+\Theta_1)\cos\Theta_2 - \sin(\Theta+\Theta_1)\sin\Theta_2}{\cos\Theta\cos\Theta_1\cos\Theta_2}$$

$$= \frac{\cos(\Theta+\Theta_1+\Theta_2)}{\cos\Theta\cos\Theta_1\cos\Theta_2},$$

und folglich nach 2) und 3):

$$4)\quad \begin{cases} \cos\Theta\cos\Theta_1\cos\Theta_2 = \dfrac{\cos(\Theta+\Theta_1+\Theta_2)}{1-n} = \dfrac{\sin(\Theta+\Theta_1+\Theta_2)}{m-k}, \\ \sin\Theta\sin\Theta_1\sin\Theta_2 = \dfrac{k\cos(\Theta+\Theta_1+\Theta_2)}{1-n} = \dfrac{k\sin(\Theta+\Theta_1+\Theta_2)}{m-k}; \end{cases}$$

so dass man also jetzt zur Bestimmung der Grössen Θ, Θ_1, Θ_2 überhaupt die drei folgenden Gleichungen hat:

$$5)\quad \begin{cases} \tan g(\Theta+\Theta_1+\Theta_2) = \dfrac{m-k}{1-n}, \\ \cos\Theta\cos\Theta_1\cos\Theta_2 = \dfrac{\cos(\Theta+\Theta_1+\Theta_2)}{1-n} = \dfrac{\sin(\Theta+\Theta_1+\Theta_2)}{m-k}, \\ \sin\Theta\sin\Theta_1\sin\Theta_2 = \dfrac{k\cos(\Theta+\Theta_1+\Theta_2)}{1-n} = \dfrac{k\sin(\Theta+\Theta_1+\Theta_2)}{m-k}. \end{cases}$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt auch

$$\cos\Theta_1\cos\Theta_2 = \frac{\cos(\Theta+\Theta_1+\Theta_2)}{(1-n)\cos\Theta} = \frac{\sin(\Theta+\Theta_1+\Theta_2)}{(m-k)\cos\Theta},$$

$$\sin\Theta_1\sin\Theta_2 = \frac{k\cos(\Theta+\Theta_1+\Theta_2)}{(1-n)\sin\Theta} = \frac{k\sin(\Theta+\Theta_1+\Theta_2)}{(m-k)\sin\Theta};$$

also durch Subtraction und Addition:

$$6)\quad \cos(\Theta_1 \pm \Theta_2) = \frac{\sin\Theta \mp k\cos\Theta}{(1-n)\sin\Theta\cos\Theta}\cos(\Theta+\Theta_1+\Theta_2)$$

$$= \frac{\sin\Theta \mp k\cos\Theta}{(m-k)\sin\Theta\cos\Theta}\sin(\Theta+\Theta_1+\Theta_2),$$

mittelst welcher Formeln, da man die Summe $\Theta+\Theta_1+\Theta_2$ nach dem Vorhergehenden als bekannt vorauszusetzen berechtigt ist, $\Theta_1+\Theta_2$ und $\Theta_1-\Theta_2$, also auch

$$\Theta_1 = \tfrac{1}{2}(\Theta_1+\Theta_2) + \tfrac{1}{2}(\Theta_1-\Theta_2),$$
$$\Theta_2 = \tfrac{1}{2}(\Theta_1+\Theta_2) - \tfrac{1}{2}(\Theta_1-\Theta_2)$$

gefunden werden können, wenn man Θ kennt, so dass also auch auf diese Weise aus jeder Wurzel einer cubischen Gleichung die beiden anderen gefunden werden können.

Aus dem Obigen ergiebt sich auch leicht, dass, wenn der absolute Werth einer der beiden Grössen

$$\frac{\cos(\Theta+\Theta_1+\Theta_2)}{1-n} = \frac{\sin(\Theta+\Theta_1+\Theta_2)}{m-k},$$

$$\frac{k\cos(\Theta+\Theta_1+\Theta_2)}{1-n} = \frac{k\sin(\Theta+\Theta_1+\Theta_2)}{m-k}$$

grösser als die Einheit ist, immer sicher geschlossen werden kann, dass die Gleichung 1) nicht drei reelle Wurzeln haben kann, und also eine reelle und zwei imaginäre Wurzeln haben muss.

Die Gleichungen 2) können auch auf folgende Form gebracht werden:

$$\sin\Theta\cos\Theta_1\cos\Theta_2+\cos\Theta\sin\Theta_1\cos\Theta_2+\cos\Theta\cos\Theta_1\sin\Theta_2$$
$$=m\cos\Theta\cos\Theta_1\cos\Theta_2,$$
$$\sin\Theta\sin\Theta_1\cos\Theta_2+\sin\Theta\cos\Theta_1\sin\Theta_2+\cos\Theta\sin\Theta_1\sin\Theta_2$$
$$=n\cos\Theta\cos\Theta_1\cos\Theta_2,$$
$$\sin\Theta\sin\Theta_1\sin\Theta_2=k\cos\Theta\cos\Theta_1\cos\Theta_2.$$

Durch leichte goniometrische Rechnung findet man aber überhaupt:

$$4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$
$$=-\sin(\alpha+\beta+\gamma)+\sin(-\alpha+\beta+\gamma)+\sin(\alpha-\beta+\gamma)+\sin(\alpha+\beta-\gamma),$$
$$4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$
$$=\cos(\alpha+\beta+\gamma)+\cos(-\alpha+\beta+\gamma)+\cos(\alpha-\beta+\gamma)+\cos(\alpha+\beta-\gamma),$$
$$4\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma$$
$$=\sin(\alpha+\beta+\gamma)-\sin(-\alpha+\beta+\gamma)+\sin(\alpha-\beta+\gamma)+\sin(\alpha+\beta-\gamma),$$
$$4\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$$
$$=-\cos(\alpha+\beta+\gamma)+\cos(-\alpha+\beta+\gamma)+\cos(\alpha-\beta+\gamma)-\cos(\alpha+\beta-\gamma).$$

Wenden wir diese Relationen auf die drei obigen Gleichungen an, so erhalten wir:

$$\sin(-\Theta+\Theta_1+\Theta_2)+\sin(\Theta-\Theta_1+\Theta_2)+\sin(\Theta+\Theta_1-\Theta_2)$$
$$=4m\cos\Theta\cos\Theta_1\cos\Theta_2-3\sin(\Theta+\Theta_1+\Theta_2)$$
$$=(m+3k)\cos\Theta\cos\Theta_1\cos\Theta_2,$$

$$\cos(-\Theta+\Theta_1+\Theta_2)+\cos(\Theta-\Theta_1+\Theta_2)+\cos(\Theta+\Theta_1-\Theta_2)$$
$$=4n\cos\Theta\cos\Theta_1\cos\Theta_2+3\cos(\Theta+\Theta_1+\Theta_2)$$
$$=(n+3)\cos\Theta\cos\Theta_1\cos\Theta_2,$$

$$\sin(-\Theta+\Theta_1+\Theta_2)+\sin(\Theta-\Theta_1+\Theta_2)+\sin(\Theta+\Theta_1-\Theta_2)$$
$$-k\{\cos(-\Theta+\Theta_1+\Theta_2)+\cos(\Theta-\Theta_1+\Theta_2)+\cos(\Theta+\Theta_1-\Theta_2)\}$$
$$=\sin(\Theta+\Theta_1+\Theta_2)+k\cos(\Theta+\Theta_1+\Theta_2)$$
$$=(m-kn)\cos\Theta\cos\Theta_1\cos\Theta_2;$$

wobei sogleich in die Augen fällt, dass die dritte Gleichung eine unmittelbare Folge aus den beiden ersten ist.

Setzen wir nun der Kürze wegen

$$7)\quad\left\{\begin{aligned}&\Theta+\Theta_1+\Theta_2=\sigma,\\&-\Theta+\Theta_1+\Theta_2=\varphi,\\&\Theta-\Theta_1+\Theta_2=\varphi_1,\\&\Theta+\Theta_1-\Theta_2=\varphi_2,\\&(m+3k)\cos\Theta\cos\Theta_1\cos\Theta_2=\mu,\\&(n+3)\cos\Theta\cos\Theta_1\cos\Theta_2=\nu;\end{aligned}\right.$$

wo nach dem Vorhergehenden σ, μ, ν bekannte Grössen sind; so ist

$$\varphi + \varphi_1 + \varphi_2 = \sigma$$

und nach dem Obigen hat man also zur Bestimmung von $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ die drei folgenden Gleichungen:

$$8)\quad \begin{cases} \varphi + \varphi_1 + \varphi_2 = \sigma, \\ \sin\varphi + \sin\varphi_1 + \sin\varphi_2 = \mu, \\ \cos\varphi + \cos\varphi_1 + \cos\varphi_2 = \nu. \end{cases}$$

Aus φ, φ_1, φ_2 ergeben sich aber leicht Θ, Θ_1, Θ_2, weil nach dem Obigen

$$9)\quad \Theta = \tfrac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2),\ \Theta_1 = \tfrac{1}{2}(\varphi_2 + \varphi),\ \Theta_2 = \tfrac{1}{2}(\varphi + \varphi_1)$$

ist.

Aus den Gleichungen

$$\sin\varphi + \sin\varphi_1 + \sin\varphi_2 = \mu,$$
$$\cos\varphi + \cos\varphi_1 + \cos\varphi_2 = \nu$$

folgt nach bekannten goniometrischen Sätzen

$$\sin\varphi + 2\sin\tfrac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)\cos\tfrac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2) = \mu,$$
$$\cos\varphi + 2\cos\tfrac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)\cos\tfrac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2) = \nu$$

oder

$$2\sin\tfrac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)\cos\tfrac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2) = \mu - \sin\varphi,$$
$$2\cos\tfrac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)\cos\tfrac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2) = \nu - \cos\varphi;$$

folglich

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) = \frac{\mu - \sin\varphi}{\nu - \cos\varphi};$$

also wegen der ersten der Gleichungen 8):

$$10)\quad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\sigma - \varphi) = \frac{\mu - \sin\varphi}{\nu - \cos\varphi},$$

mittelst welcher Gleichung φ bestimmt werden muss. Hat man aber φ, so hat man auch $\frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)$ und $\frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2)$ durch die Gleichungen

$$11)\quad \begin{cases} \tfrac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) = \tfrac{1}{2}(\sigma - \varphi), \\ \cos\tfrac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2) = \dfrac{\mu - \sin\varphi}{2\sin\frac{1}{2}(\sigma - \varphi)} = \dfrac{\nu - \cos\varphi}{2\cos\frac{1}{2}(\sigma - \varphi)}; \end{cases}$$

woraus sich dann auch φ_1 und φ_2 mittelst der Formeln

$$12) \quad \begin{cases} \varphi_1 = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) + \frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2), \\ \varphi_2 = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) - \frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2) \end{cases}$$

ergeben.

Weil

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\sigma - \varphi) = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}\sigma - \operatorname{tang} \frac{1}{2}\varphi}{1 + \operatorname{tang} \frac{1}{2}\sigma \operatorname{tang} \frac{1}{2}\varphi}$$

und

$$\sin \varphi = \frac{2\operatorname{tang} \frac{1}{2}\varphi}{1 + \operatorname{tang} \frac{1}{2}\varphi^2}, \quad \cos \varphi = \frac{1 - \operatorname{tang} \frac{1}{2}\varphi^2}{1 + \operatorname{tang} \frac{1}{2}\varphi^2}$$

ist, so wird die Gleichung 10):

$$\frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}\sigma - \operatorname{tang} \frac{1}{2}\varphi}{1 + \operatorname{tang} \frac{1}{2}\sigma \operatorname{tang} \frac{1}{2}\varphi} = \frac{\mu - 2\operatorname{tang} \frac{1}{2}\varphi + \mu \operatorname{tang} \frac{1}{2}\varphi^2}{\nu - 1 + (\nu + 1) \operatorname{tang} \frac{1}{2}\varphi^2},$$

woraus man nach einigen leichten Reductionen die Gleichung

$$\begin{aligned} 13) \quad 0 = \; & (\mu \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\sigma + \nu + 1) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\varphi^3 \\ & + \{\mu - (\nu + 3) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\sigma\} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\varphi^2 \\ & + (\mu \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\sigma + \nu - 3) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\varphi \\ & + \mu - (\nu - 1) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\sigma \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} 14) \quad 0 = \; & \{\mu \sin \tfrac{1}{2}\sigma + (\nu + 1) \cos \tfrac{1}{2}\sigma\} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\varphi^3 \\ & + \{\mu \cos \tfrac{1}{2}\sigma - (\nu + 3) \sin \tfrac{1}{2}\sigma\} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\varphi^2 \\ & + \{\mu \sin \tfrac{1}{2}\sigma + (\nu - 3) \cos \tfrac{1}{2}\sigma\} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\varphi \\ & + \{\mu \cos \tfrac{1}{2}\sigma - (\nu - 1) \sin \tfrac{1}{2}\sigma\} \end{aligned}$$

erhält, welche wegen ihrer Symmetrie wohl einige Aufmerksamkeit zu verdienen scheint.

XXXIV.

Etwas über das Viereck im Kreise.

Von

dem Herausgeber.

In Taf. V. Fig. 1. sei $ABCD$ ein Viereck im Kreise, d
gegenüberstehende Seiten bis zu ihren Durchschnittspunkten E
F verlängert worden sind. Zieht man hierauf die Diagonalen
und CD, so wie die Linie EF. und bezeichnet die Winkel B
ACD, CEF, CFE, AEC, BFC respective durch α, β, φ
φ_1, ψ_1; so hat man, weil $A+B=180^\circ$ ist, die Proportion

$$CE:AC=\sin A:\sin\varphi_1,$$
$$CF:BC=\sin A:\sin\psi_1;$$

also

$$\frac{CE}{CF}:\frac{AC}{BC}=1:\frac{\sin\varphi_1}{\sin\psi_1}=1:\frac{\sin(A+\alpha+\beta)}{\sin(A-\alpha-\beta)}.$$

Nun ist aber, wie leicht erhellet:

$$CE:CF=\sin\psi:\sin\varphi,$$

$$AC:BC=\sin(B-\beta):\sin(A-\alpha)=\sin(A+\beta):\sin(A-$$

also nach dem Vorhergehenden

$$\frac{\sin\psi}{\sin\varphi}:\frac{\sin(A+\beta)}{\sin(A-\alpha)}=1:\frac{\sin(A+\alpha+\beta)}{\sin(A-\alpha-\beta)},$$

und folglich

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi}=\frac{\sin(A-\alpha)\,\sin(A+\alpha+\beta)}{\sin(A+\beta)\,\sin(A-\alpha-\beta)}$$

oder

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi}=\frac{\cos(2\alpha+\beta)-\cos(2A+\beta)}{\cos(2\beta+\alpha)-\cos(2A-\alpha)},$$

raus sich leicht

$$\frac{\sin\varphi + \sin\psi}{\sin\varphi - \sin\psi}$$

$$= \frac{\cos(2\alpha+\beta) + \cos(2\beta+\alpha) - \cos(2A-\alpha) - \cos(2A+\beta)}{\cos(2\alpha+\beta) - \cos(2\beta+\alpha) + \cos(2A-\alpha) - \cos(2A+\beta)}$$

oder

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi+\psi)\cot\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)$$

$$= -\frac{\cos\tfrac{3}{2}(\alpha+\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) - \cos\{2A-\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\}\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\sin\tfrac{3}{2}(\alpha+\beta)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) - \sin\{2A-\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\}\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)}$$

ergiebt.

Es ist aber $\tfrac{1}{2}(\varphi+\psi) = 90^\circ - \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)$, also $\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi+\psi) = \cot\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)$, und folglich nach dem Vorhergehenden

$$\cot\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)$$

$$= -\frac{\cos\tfrac{3}{2}(\alpha+\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) - \cos\{2A-\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\}\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\sin\tfrac{3}{2}(\alpha+\beta)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) - \sin\{2A-\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\}\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta);$$

also, weil

$$2\cos\tfrac{3}{2}(\alpha+\beta)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) = \sin 2(\alpha+\beta) - \sin(\alpha+\beta),$$
$$2\sin\tfrac{3}{2}(\alpha+\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) = \sin 2(\alpha+\beta) + \sin(\alpha+\beta)$$

und

$$\sin 2(\alpha+\beta) = 2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta),$$
$$\sin(\alpha+\beta) = 2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)$$

ist:

$$\cot\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)$$

$$= -\frac{\{2\cos(\alpha+\beta)-1\}\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) - \cos\{2A-\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\}}{\{2\cos(\alpha+\beta)+1\}\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) - \sin\{2A-\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\}},$$

oder, weil

$$\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) + \cos\{2A-\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\} = \quad 2\cos A\cos\{A-\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\},$$
$$\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) - \sin\{2A-\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\} = -2\cos A\sin\{A-\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\}$$

ist:

$$\cot\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi) = -\frac{\cos(\alpha+\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) - \cos A\cos\{A-\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\}}{\cos(\alpha+\beta)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) - \cos A\sin\{A-\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\}}.$$

Leicht bringt man diese Gleichung auch auf die folgende Form:

$$\cos(\alpha+\beta)\sin\tfrac{1}{2}\{(\alpha-\beta)+(\varphi-\psi)\} = \cos A\sin\{A-\tfrac{1}{2}[(\alpha-\beta)-(\varphi-\psi)]\}$$

oder

$$\frac{\sin\tfrac{1}{2}\{(\alpha-\beta)+(\varphi-\psi)\}}{\sin\{A-\tfrac{1}{2}[(\alpha-\beta)-(\varphi-\psi)]\}} = \frac{\cos A}{\cos(\alpha+\beta)},$$

woraus sich

$$\frac{\sin\tfrac{1}{2}\{(\alpha-\beta)+(\varphi-\psi)\}+\sin\{A-\tfrac{1}{2}[(\alpha-\beta)-(\varphi-\psi)]\}}{\sin\tfrac{1}{2}\{(\alpha-\beta)+(\varphi-\psi)\}-\sin\{A-\tfrac{1}{2}[(\alpha-\beta)-(\varphi-\psi)]\}}$$

$$=\frac{\cos A+\cos(\alpha+\beta)}{\cos A-\cos(\alpha+\beta)},$$

also

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\{A+(\varphi-\psi)\}\cot\tfrac{1}{2}\{A-(\alpha-\beta)\}$$
$$=-\cot\tfrac{1}{2}\{A+(\alpha+\beta)\}\cot\tfrac{1}{2}\{A-(\alpha+\beta)\},$$

und folglich

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\{A+(\varphi-\psi)\}$$
$$=-\cot\tfrac{1}{2}\{A+(\alpha+\beta)\}\cot\tfrac{1}{2}\{A-(\alpha+\beta)\}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\{A-(\alpha-\beta)\}$$

ergiebt.

Wenn $A=90^\circ$, und folglich $B=90^\circ$, d. h. wenn die Diagonale CD des Vierecks $ABCD$ ein Durchmesser des um dasselbe beschriebenen Kreises ist, so ist $\cos A=0$, und folglich nach dem Obigen $\cot\frac{1}{2}(\varphi-\psi)=-\cot\frac{1}{2}(\alpha-\beta)=\cot\frac{1}{2}(\beta-\alpha)$, also $\varphi-\psi=\beta-\alpha$. Weil nun $\varphi+\psi=180^\circ-(\alpha+\beta)$ ist, so ist $\varphi=90^\circ-\alpha$, $\psi=90^\circ-\beta$, und die Linie EF steht also auf der gehörig verlängerten Diagonale CD senkrecht, woraus sich der folgende Satz ergiebt:

Die gerade Linie, welche die Durschnittspunkte der gegenüberstehenden Seiten eines in einen Kreis beschriebenen Vierecks, dessen eine Diagonale ein Durchmesser des Kreises ist, mit einander verbindet, steht immer auf dieser gehörig verlängerten Diagonale senkrecht.

Eine zweckmässige Uebung für Schüler wird es sein, einen rein-geometrischen Beweis dieses Satzes zu suchen.

XXXV.

Eine geometrische Aufgabe.

Aus J. F. Pfaff's nachgelassenen Papieren mitgetheilt

von

dem Herausgeber.

Weil es in vielfacher Beziehung interessant ist, die Arbeiten grosser Männer in ihrer ursprünglichen Gestalt kennen zu lernen, so werde ich, wo es mir thunlich zu sein scheint, hin und wieder einige Aufsätze J. F. Pfaff's in unveränderter Form in dem Archive mittheilen, wobei ich bemerke, dass in den von diesem grossen Mathematiker nachgelassenen Heften, in welchen er seine Ideen niederzulegen pflegte, fortwährend deutsche, lateinische und französische Aufsätze mit einander abwechseln. Ich wähle diesmal absichtlich einen französisch geschriebenen Aufsatz über eine ganz elementare geometrische Aufgabe, und ersuche die Leser nur, nicht unbeachtet zu lassen, dass alle diese Aufsätze ursprünglich keineswegs für den Druck bestimmt waren, da Pfaff wohl niemals an deren Veröffentlichung dachte, indem es ganz in seinem trefflichen, höchst anspruchslosen Charakter begründet war, den Genuss lediglich in der Arbeit selbst zu finden, und nach Beendigung einer Arbeit gleich wieder zu einer neuen überzugehen, ohne sich um eine besondere Ausfeilung der beendigten Arbeiten weiter zu bekümmern. Ein Fascimile seiner Handschrift soll vielleicht später einmal gegeben werden.

Problème.

Soient données deux chordes AB, DE (Tab. V. Fig. 2.); l'angle qu'elles font entre eux (étant prolongées) en F; et la distance de leurs milieux ab. Il faut trouver le cercle des deux chordes.

I. Première solution géométrique.

Analyse géométrique.

Soit C le centre du cercle en question: les droites Ca, Cb seront perpendiculaires aux chordes AB, DE. Donc dans le quadrilatère $aCbF$, la somme des 4 angles étant $=$ 4 droits, les angles C et F ensemble feront deux droits. Donc l'angle C est

donné. D'où il suit, que le lieu géométrique du point C est la circonférence d'un segment donné, parce que la base ab et l'angle C de ce segment sont donnés.

Qu'on mène Ce perpendiculaire à ab, on aura

$$ae^2 - be^2 = Ca^2 - Cb^2;$$

mais

$$Aa^2 + Ca^2 = AC^2 = CD^2 = Db^2 + Cb^2;$$

donc

$$Ca^2 - Cb^2 = Db^2 - Aa^2;$$

donc

$$ae^2 - be^2 = Db^2 - Aa^2.$$

Que la droite ab soit coupée en deux segmens égaux en f, on a

$$ae^2 - be^2 = (ae - be)(ae + be) = 2ab . fe = Db^2 - Aa^2.$$

Donc la droite fe et le point e sont donnés. En tirant donc par e la perpendiculaire eC, le centre C sera dans cette perpendiculaire, et comme il est situé aussi dans un segment donné, ce centre lui même sera donné.

Construction.

Décrivez sur la droite donnée ab un segment, dont l'angle C soit $180° - F$ (d'après la solution connue d'Euclide. Livr. III. Prop. 33.). Cherchez à

$$2ab : Db + Aa = Db - Aa (: x)$$

la quatrième proportionelle, et faites la $= fe$, f étant le milieu de ab. Par e élevez eC perpendiculaire à ab, le point où celle-ci coupera le segment construit sera le centre du cercle en question. Ce centre étant trouvé, tout le reste s'en suit immédiatement. Car menant $Aa = \frac{1}{2}AB$, $Db = \frac{1}{2}DE$ perpendiculaires à Ca et Cb, on a les points A, D, etc. etc.

II. Seconde solution géométrique.

L'angle F et la droite ab étant données, le lieu géométrique du point F est un segment donné. Or on a

$$FA . FB = FD . FE,$$

donc

$$(Fa - Aa)(Fa + Aa) = (Fb - Db)(Fb + Db),$$

c'est-à-dire

$$Fa^2 - Aa^2 = Fb^2 - Db^2,$$
$$Fb^2 - Fa^2 = Db^2 - Aa^2.$$

Qu'on abaisse de F sur ab la perpendiculaire Fg, on aura

$$Fb^2 - Fa^2 = bg^2 - ag^2 = (bg + ag)(bg - ag) = 2ab\,.\,fg.$$

Donc on a

$$Db^2 - Aa^2 = (Db - Aa)(Db + Aa) = 2ab\,.\,fg,$$

d'où on parvient à une construction tout à fait semblable à la précédente, en décrivant le segment de l'autre coté de ab, qui appartient pourtant au même cercle.

III. Troisième solution algébrique trigonométrique.

Soit $AB = 2a$, $DE = 2b$; le rayon du cercle cherché $AC = x$; la distance $ab = d$. Dans le triangle aCb on a

$$ab^2 = Ca^2 + Cb^2 - 2Ca\,.\,Cb\,.\cos\,C.$$

Mais $C = 180° - F$, donc $\cos C = -\cos F$; $Ca^2 = AC^2 - Aa^2 = x^2 - a^2$; de même $Cb^2 = x^2 - b^2$. Donc on aura

$$d^2 = x^2 - a^2 + x^2 - b^2 + 2\sqrt{(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)}\,.\cos\,F.$$

Qu'on mette $2x^2 - a^2 - b^2 = y$, on aura

$$x^2 = \frac{y + a^2 + b^2}{2},\quad x^2 - a^2 = \frac{y + b^2 - a^2}{2},\quad x^2 - b^2 = \frac{y + a^2 - b^2}{2};$$

donc

$$d^2 - y = \cos F\,.\sqrt{(y + a^2 - b^2)(y + b^2 - a^2)}$$

et

$$d^4 - 2d^2y + y^2 = \{y^2 - (a^2 - b^2)^2\}\,\cos F^2$$

ou

$$y^2 \sin F^2 - 2d^2y = -d^4 - (a^2 - b^2)^2\,\cos F^2,$$

une équation quadratique pour y. On aurait pu trouver une telle immédiatement pour x^2.

IV. Quatrième solution trigonométrique.

En désignant les angles Cab, Cba par E, E', et en conservant les dénominations ci dessus mentionnées, on a

$$Ca : ab = Ca : d = \sin E' : \sin F,$$
$$Cb : ab = Cb : d = \sin E : \sin F;$$

donc

$$Ca = \frac{d \sin E'}{\sin F}, \quad Cb = \frac{d \sin E}{\sin F}.$$

Or on a (Sol. I.)

$$Ca^2 - Cb^2 = Db^2 - Aa^2 = b^2 - a^2,$$

donc

$$\frac{d^2}{\sin F^2}(\sin E'^2 - \sin E^2) = b^2 - a^2.$$

Mais

$$\sin E'^2 - \sin E^2 = \frac{1 - \cos 2E'}{2} - \frac{1 - \cos 2E}{2}$$
$$= \frac{\cos 2E - \cos 2E'}{2} = \sin \tfrac{1}{2}(E' + E) \sin \tfrac{1}{2}(E' - E)$$
$$= \cos \tfrac{1}{2}C \sin \tfrac{1}{2}(E' - E) = \sin \tfrac{1}{2}F \sin \tfrac{1}{2}(E' - E).$$

Donc on a

$$\sin \tfrac{1}{2}(E' - E) = \frac{b^2 - a^2}{d^2} \cdot \frac{\sin F^2}{\sin \tfrac{1}{2}F} \text{ *)}.$$

Ayant trouvé la différence des angles $E' - E$, comme on connoît leur somme $= F$, on trouve ces angles eux mêmes; d'où suivent

$$Ca = \frac{d \sin E'}{\sin F}, \quad Cb = \frac{d \sin E}{\sin F}, \quad AC = \sqrt{Aa^2 + Ca^2}.$$

---

*) $\sin \tfrac{1}{2}(E' - E) = \frac{2(b-a)(b+a)}{d^2} \sin F \cos \tfrac{1}{2}F$. G.

XXXVI.

Beweis des umgekehrten ptolemäischen Satzes.

Aus J. F. Pfaff's Papieren mitgetheilt

von

dem Herausgeber.

In dem Vierecke $ABCD$ (Taf. V. Fig. 3.) sei

$$AB.CD+AD.BC=AC.BD.$$

Man soll beweisen, dass sich um dieses Viereck ein Kreis beschreiben lässt.

Liesse sich um das Viereck $ABCD$, dessen Winkel wir der Kürze wegen bloss durch A, B, C, D bezeichnen wollen, kein Kreis beschreiben, so würde, da die Summe aller vier Winkel A, B, C, D vier rechte Winkel beträgt, entweder $A+C<2R$ oder $B+D<2R$ sein. Sei nun einmal $A+C<2R$. Beschreibt man dann, was immer möglich ist, um das Dreieck ABD einen Kreis, so wird dieser Kreis jederzeit die Diagonale AC selbst, nicht deren Verlängerung über den Punkt C hinaus, in einem gewissen Punkte E schneiden. Es ist nämlich, wenn man den Winkel BED der Kürze wegen durch E bezeichnet, $A+E=2R$, und folglich, weil nach der Voraussetzung $A+C<2R$ ist, $E>C$, was nach einem bekannten geometrischen Satze nur dann möglich ist, wenn der Punkt E in der Diagonale AC selbst, nicht in deren Verlängerung über den Punkt C hinaus liegt. Zieht man nun die Linien EF, EG, FG, so ist nach einem bekannten Satze aus der Lehre vom Kreise:

$$AC:BC=CF:CE,$$
$$AC:CD=CG:CE,$$
$$BC:CD=CG:CF;$$

und weil ausserdem die Dreiecke ABC und CEF, ACD und CEG, BCD und CFG, die Winkel bei C mit einander gemein haben, so ist

$$\Delta\, ABC \sim \Delta\, CEF,$$
$$\Delta\, ACD \sim \Delta\, CEG,$$
$$\Delta\, BCD \sim \Delta\, CFG.$$

Also ist

$$CF : EF = AC : AB,$$
$$FG : CF = BD : CD,$$

woraus

$$1) \quad FG : EF = AC . BD : AB . CD;$$

ferner

$$CG : EG = AC : AD,$$
$$FG : CG = BD : BC,$$

woraus

$$2) \quad FG : EG = AC . BD : AD . BC.$$

Aus 1) folgt

$$FG : FG - EF = AC . BD : AC . BD - AB . CD,$$

also, weil nach der Voraussetzung

$$AB . CD + AD . BC = AC . BD$$

ist:

$$3) \quad FG : FG - EF = AC . BD : AD . BC.$$

Daher ist nach 2) und 3)

$$FG : EG = FG : FG - EF,$$

also

$$EG = FG - EF,$$

und folglich

$$EF + EG = FG,$$

welches unmöglich ist, da zwei Seiten eines Dreiecks nicht dessen dritter Seite gleich sein können. Also ist die Annahme, dass um das Viereck $ABCD$ kein Kreis beschrieben werden könne, falsch, und es lässt sich daher um dieses Viereck unter der Voraussetzung des Satzes immer ein Kreis beschreiben, wie bewiesen werden sollte.

XXXVII.

Ueber den zweiten Aufsatz des Herrn Doctor Barfuss. Theil V. Heft 2. S. 155.

Von

Herrn Doctor O. Schlömilch,

Privatdocenten an der Universität zu Jena.

Während Herr Dr. Barfuss in seinem ersten Aufsatze eine Krik der neueren Ansichten versucht, giebt er uns in seiner zweiten bhandlung eine Probe seiner Darstellung der Analysis, gegen elche eine nur einigermaassen scharf sehende Kritik sehr Vieles nzuwenden haben wird. So viel sich in der Kürze thun lässt, ill ich hier erwähnen.

Den Anfang macht der Machtspruch: „es ist wohl zu unrscheiden, ob eine Reihe bloss eine Summe unendlich ieler Glieder, oder ob sie die Entwickelung einer unction sei", d. h. mit anderen Worten, wenn da steht

$$f(x) = A + Bx + Cx^2 + \ldots. \quad (1)$$

können hier zwei Bedeutungen dieser Zeile statt finden. Wirkch! ein Anfang, wie man ihn nicht von einem Mathematiker erarten sollte. Gleich die ersten Worte belehren uns, dass eine leichung wie (1) doppelsinnig ist; zwar wird hinzugesetzt, dass ie Convergenz oder Divergenz beide Bedeutungen trenne, aber as hilft uns nichts, wo wir die Form der Reihe noch nicht kenen, wie bei allen Anfängen mittelst der Methode der unbestimmten Coefficienten. Rechnet man aber mit so einer hypothetischen Gleihung weiter, so weiss man keinen Augenblick, ob man es mit einer Identität, oder mit einer syntaktischen Aehnlichkeit zu thun hat, ob also die Rechnungsoperationen, welche die Arithmetik für Identitäten gelehrt hat, hier noch richtig bleiben. Ich werde übrigens nachher auf diesen Punkt zurückkommen. Darauf kommt etwas zur Vertheidigung des Resultates

$$-\tfrac{1}{2} = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots.$$

und diese Vertheidigung stützt sich auf die Behauptung, die fragliche Reihe gebe *nicht* aus der Reihe

$$\cos x + \cos 2x + \ldots. + \cos nx$$

hervor, wenn man die Zahl n (die Gliederanzahl!) ins Unendliche wachsen lasse, anders wenigstens lassen sich die Worte des Herrn Verfassers nicht interpretiren. Das ist wieder ein durch nichts motivirter Machtspruch; wenn in einer Reihe die Gliederanzahl ins Unendliche wächst, so wird sie eine unendliche, sollte man wenigstens denken; wenn mein Herr Gegner das nicht zugiebt, so lässt sich darauf so wenig antworten, als wenn jemand behauptet, er könne sich eine gerade Linie denken, die länger sei, als ein über ihr construirter Halbkreis.

In §. 5. finden wir etwas ganz Neues; ich bitte die Herren Gauss, Cauchy, Dirichlet u. A., die sich so unnütz mit der Convergenzlehre geplagt haben, hier wohl aufzumerken, denn sie erfahren: dass jede aus der Function $f(x)$ entwickelte Reihe convergirt, wenn ihre Glieder bis zum Verschwinden klein werden. Es ist mir sehr lieb, dass ich das weiss; es handelte sich neulich um den Werth des Integrales

$$\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} \cdot \frac{dt}{\sqrt{t}}$$

$$=\int_0^\infty e^{-t} \cdot \frac{dt}{\sqrt{t}} + \int_0^\infty e^{-2t} \frac{dt}{\sqrt{t}} + \int_0^\infty e^{-3t} \frac{dt}{\sqrt{t}} + \ldots \text{ in inf.}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots \text{ in inf.}$$

Ich glaubte erst, derselbe sei unendlich; da aber Herr Dr. Barfuss sagt, die Reihe rechts convergire (denn sie ist eine fallende und auch die Entwickelung einer Function), so wird derselbe wohl ein bestimmter angebbarer sein. Ich hatte nämlich so geschlossen: es ist

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$> \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

d. i.

$$> n\frac{1}{\sqrt{n}} \text{ oder } > \sqrt{n},$$

folglich

$$\text{Lim}\left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) > \text{Lim}\sqrt{n}$$

oder

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots \text{ in inf.} = \infty;$$

aber ich sehe eben, dass ich mich hier geirrt habe; die Reihe

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots \text{ in inf.}$$

geht wahrscheinlich nicht aus $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$ hervor,

wenn man die Gliederanzahl n ins Unendliche wachsen lässt. — Aber Herr Dr. Barfuss beweist doch seinen Satz, wie geht es denn zu, dass wir uns widersprechen? Hierauf ist die Antwort folgende.

Die Frage, ob eine Reihe convergire oder nicht, reducirt sich im Grunde auf eine andere, nämlich die, giebt es einen endlichen Ausdruck, welchem die Reihe identisch ist oder nicht. Findet das Erste statt, so muss die Reihe eine fallende und convergente sein; denn wären alle Glieder grösser, als eine angebbare Grösse ε, so wären alle Glieder zusammen ins Unendliche fortgesetzt

$$>\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon+\ldots.$$

d. i.

$$>\varepsilon(1+1+1+1+\ldots.),$$

mithin wäre die Summe der Reihe unendlich und nicht einem endlichen Ausdrucke identisch, wie vorausgesetzt wurde. Ist ferner $u_1+u_2+u_3+\ldots.$ in inf. $=S$, so heisst diess nichts Anderes, als $\text{Lim}\,(u_1+u_2+\ldots.+u_n)=S$. Hieraus folgt dann unter der Voraussetzung, dass S eine endliche Grösse ist, sehr leicht, dass der Rest der Reihe sich der Null nähern, also die Reihe convergiren müsse. Was thut nun Herr Dr. Barfuss? er zeigt, dass wenn

$$f(x)=X_{(1)}+X_{(2)}+\ldots.$$

ist, die Reihe convergirt, oder weil convergiren einer endlichen Grösse gleich sein heisst und er unter $f(x)$ doch nichts Unendliches versteht, so zeigt er: wenn eine Reihe einer endlichen Grösse gleich gesetzt wird, so ist sie einer endlichen Grösse gleich. Ja daran zweifelt gewiss Niemand, aber Herr Dr. Barfuss hat seinen Satz doch im Gefühl des Richtigen aufgestellt. Die Sache ist so: das unschuldige Zeichen $=$ ist bei Herrn Dr. Barfuss nicht das gemeine Identitätszeichen, wie wir es nehmen; oh nein! das ist ein gar wunderbares, proteusartiges Wesen; einmal lässt es sich wohl zu unseren beschränkten Begriffen herab, das andere mal aber bezeichnet es einen höchst geheimnissvollen syntaktischen oder unbestimmt allgemein analytischen Zusammenhang, so etwa, als wenn Schelling hinsetzt: Wärme $=$ Expansion, was wir Anderen Uneingeweihten und weniger Erleuchteten nicht verstehen, auch verstehen zu wollen uns gar nicht anmaassen dürfen. Wenn daher Herr Dr. Barfuss in §. 5. den Beweis mit den Worten eröffnet: Es sei

$$f(x)=X_{(1)}+X_{(2)}+\ldots.+X_{(n)}+R_{(n)},$$

so weiss man nicht welche Bedeutung gemeint ist; wahrscheinlich aber ist hier nur von der genannten überschwenglichen, für uns unbegreiflichen Symbolik Gebrauch gemacht. So geht es nun fort und die Bedeutung von $=$ schwankt immer zwischen beiden Extremen und klappt zuletzt in die gewöhnliche Auffassung um. Das Alles lässt sich vermeiden, wenn man auf den im vorigen Aufsatze von mir gemachten Vorschlag eingehen will, diese verschiedenen Bedeutungen durch verschiedene Zeichen auseinander zu halten; ausserdem verwirren sich alle Begriffe und man kann gar nicht einmal mit Jemand sich ordentlich verständigen, weil er sich wech-

selweis immer hinter der anderen Bedeutung verkriechen kann, wenn man ihn aus der ersten herausgetrieben hat.

Ich will bloss noch Eines berühren, um zu zeigen, dass der Herr Dr. Barfuss gar nicht einmal weiss, was die neuere Behandlungsweise der Analysis will. Es ist diess die Bemerkung über Cauchy's Beweis für das Binomialtheorem, der darin besteht, dass die Gleichungen

$$f(m) = 1 + m_1 x + m_2 x^2 + \ldots$$
$$f(n) = 1 + n_1 x + n_2 x^2 + \ldots$$

multiplicirt werden, wobei sich durch eine Eigenschaft der Binomialcoefficienten die Gleichung ergiebt:

$$f(m) f(n) = f(m + n),$$

aus welcher $f(m) = [f(1)]^m = (1 + x)^m$ folgt. Mein Herr Gegner meint, weil dieser Beweis sich auf eine Eigenschaft der Coefficienten gründe, so passe er ganz gleichförmig auch für den Fall der Divergenz und will so zeigen, dass der Beweis ebenfalls die allgemeine Gültigkeit der Binomialreihe darthue. Hier sieht man klar das durchaus unkritische Verfahren meines Herrn Gegners. Ich muss, um diess deutlich zu machen, folgende Punkte hervorheben.

I. Die Arithmetik lehrt uns bloss mit geschlossenen Ausdrücken und Gleichungen i. e. absoluten Identitäten rechnen. Will man nun diese Rechnungsoperationen auf nicht geschlossene Ausdrücke (unendliche Reihen) anwenden, so kann diess, wenn man nicht geradezu Hypothesen machen will, nur dadurch geschehen, dass man ein Princip dieser Anwendbarkeit aufweist, d. h. dass man sich einen Rechtstitel verschafft, welcher die Erlaubniss dazu enthält. Diess ist eine Forderung, welche jede gesunde Kritik machen muss, die sich in der Mathematik ebenso nothwendig herausstellt, wie die ganz verwandten Fragen, welche die Kritik der Vernunft zu beantworten hat. Lässt man sie unberücksichtigt oder nimmt auf Treu und Glauben die allgemeine Gültigkeit aller arithmetischen Operationen über die Gränzen hinaus an, innerhalb deren sie beweisbar sind, so verfällt man wie Herr Dr. Barfuss in den Fehler eines unzeitigen Dogmatismus, ganz wie in der Metaphysik.

II. Woher nehmen wir aber jenes Princip? Hierauf lässt sich antworten, wenn man sich an ein ganz allgemeines Gesetz erinnert, welches sowohl in der Philosophie wie in der Mathematik gilt, und welches dahin lautet, dass wir überhaupt nur von solchen Dingen wissenschaftlich etwas ausmachen können, die uns rein anschaulich gegeben werden können. Dazu gehört aber, dass wir sie als Ganzes zu fassen vermögen. Diess lehrt uns auf der metaphysischen Seite die Nichtigkeit aller sogenannten speculativen Theologie, Kosmologie etc., weil wir weder Gott, noch die Welt etc. uns in Zeit und Raum als Ganzes denken können, und auf der mathematischen Seite bekommen wir dadurch eben jenes Princip, welches so heisst: „einer wissenschaftlichen Behandlung unterliegen ins Unendliche fortlaufende Ausdrücke nur in so fern, als sie sich als geschlossenes Ganzes ansehen lassen". Drücken wir diess in mathematischer Sprache aus, so haben wir den Satz: Alle mögli-

chen Rechnungsoperationen sind nur dann auf eine unendliche Reihe anwendbar, wenn dieselbe einer endlichen begränzten Grösse identisch ist, und zwar ist gerade Identität nöthig, weil keine andere Beziehung uns erkennen lässt, ob die fragliche Reihe als endliche Grösse betrachtet werden könne. Soll aber eine unendliche Reihe einer endlichen bestimmten Grösse gleich sein, so muss sie erstlich fallen, wie oben gezeigt wurde, und ausserdem muss sie dann noch die Eigenschaft haben, dass ihre Summe sich jener endlichen Grösse mehr und mehr nähert, je mehr Glieder der Reihe vereinigt werden; Reihen der Art aber nennt man kurz convergirende.

III. Da also die Convergenz der Reihen das Princip der Anwendbarkeit arithmetischer Operationen auf Reihen enthält, so muss die Lehre von der Convergenz der Reihen jeder anderen Betrachtung derselben vorhergehen.

Hieraus sieht man, dass die Hypothese

$$f(x) = A + Bx + Cx^2 + \dots.$$

welche den Anfang der Methode der unbestimmten Coefficienten macht, viel grösser ist, als man gewöhnlich glaubt, weil mit dem Gleichheitszeichen schon die Hypothese der Convergenz und der Anwendbarkeit aller Operationen gemacht ist, während man noch gar nicht weiss, ob man hierzu berechtigt ist. Vor Hypothesen aber hat sich die Mathematik am meisten zu hüten, wenn sie nicht ihren bisherigen Ruhm einbüssen will. Daher ist die umgekehrte Methode vorzuziehen, bei welcher die Form der Reihe $(A, B, C\dots.)$ bekannt ist und folglich auch durch die Convergenz die Anwendbarkeit der zur Summirung nöthigen Operationen gesichert ist. Ebenso einfach sieht man jetzt den Irrthum des Herrn Dr. Barfuss ein; er will für jedes x die beiden Reihen

$$f(m) = 1 + m_1x + m_2x^2 + \dots.$$
$$f(n) = 1 + n_1x + n_2x^2 + \dots$$

mit einander multipliciren. Das ist ein Herumtappen im Finstern, so lange er nicht weiss, ob er endliche Dinge vor sich hat oder nicht; mit unendlichen Factoren aber multipliciren lehrt keine Arithmetik, sie lehrt überhaupt nicht mit Grössen rechnen, die sich dem Rechner unter der Hand verändern. Ja schon dadurch, dass er nur sagt, ich will $1 + m_1x + m_2x^2 + \dots.$ mit $f(m)$ bezeichnen, ist schon stillschweigend angenommen, dass $f(m)$ eine endliche Grösse, folglich die Reihe convergent sei, denn diese Bezeichnung hat keinen Sinn, wenn sie nicht eine Identität sein soll. (Hier bleibt freilich dem Herrn Dr. Barfuss immer wieder die Hinterthür der syntaktischen Entwickelung offen.) Gerade die Multiplication zweier Reihen ist eine Klippe, die man nur durch Handhabung scharfer Kritik vermeiden kann. Es kommt nämlich der Fall vor, dass das Product zweier convergenten Reihen, so wie man es gewöhnlich schreibt, eine divergente Reihe wird, wie man bei Cauchy page 149. sehen kann. Cauchy giebt keine weitere Erklärung; dieselbe liegt sehr einfach darin, dass man das Product willkührlich nach einer Regel anordnet, die bei endlichen Reihen richtig ist, bei unendlichen falsch werden kann. Für Herrn Dr. Barfuss will ich noch bemerken, dass er bei seinem Tadel des Cau-

chy'schen Binomialbeweises ganz übersehen hat, dass die Gleichung $f(m)f(n)=f(m+n)$ zwei Auflösungen hat, nämlich $f(m)=[f(1)]^m$ und das Unendliche, von denen die erste dem Falle der Convergenz, die zweite dem der Divergenz entsprechen würde, wenn man sich überhaupt auf den letzteren einlassen dürfte. Was ich hier mittheile, sind nur die Grundgedanken einer kritischen Philosophie der Mathematik, die ich später im Zusammenhange ausarbeiten werde. Dieselbe Frage nach der Anwendbarkeit der arithmetischen Operationen wiederholt sich auch bei den imaginären Grössen, den unendlichen Producten und Kettenbrüchen und lässt sich auf ähnliche Weise auch dort lösen. Einiges davon enthält mein zu Ostern erscheinendes „Handbuch der mathematischen Analysis", bis zu dessen Vorhandensein ich weitere Discussionen über diesen Gegenstand zu verschieben bitte, weil ein Streit nur dann zu etwas führen kann, wenn die Principien der Sache klar und bestimmt ausgesprochen vorliegen.

Noch eine Bemerkung in Bezug auf Fries. In seiner Naturphilosophie sagt Fries einmal ganz richtig, man könne eigentlich nur mit convergenten Reihen sicher rechnen, hinterher aber macht ihn Eulers sorglose Weise stutzig, und er meint nun, da man doch mit divergenten Reihen auch operirt und nichts wesentlich Falsches herausgebracht habe, so müsse es doch ein Princip geben, nach welchem Rechnungen mit diesen Reihen erlaubt seien. Darauf sagt er: mir scheint die Sache in dem Unterschiede der syntaktischen und arithmetischen Bedeutung der Reihen zu liegen. Hier ist die Sache ganz klar; Fries hat den richtigen Grundgedanken, macht aber Eulers Autorität zu Gefallen eine Hypothese, für die er auch nirgend einen Beweis bringt. Das ganze Argument aber fällt weg, wenn man zeigt, dass wirklich allerhand Verkehrtes durch jenes Rechnen in den Tag hinein herauskommt, wie ich diess in dem vorigen Aufsatze gethan habe, und wenn man kritisch untersucht, auf welchem Grunde jene Rechnungen ruhen. Herr Dr. Barfuss, der wie ich glaube auch Friesianer sein will, hat demnach Fries sehr schlecht verstanden. Das Vermächtniss, welches unser, zwar im Greisenalter, für uns aber doch noch zu früh verstorbene Lehrer uns hinterlassen hat, besteht in der Anforderung, die Wissenschaft, der sich jeder einzelne gewidmet hat, nach den Grundsätzen seiner Philosophie, die nicht umsonst die kritische heisst, zu bearbeiten, wie diess für die Pflanzenphysiologie bereits von unserem genialen Schleiden geschehen ist; ebenso hätte Herr Dr. Barfuss, der älter als ich ist und länger das Glück hatte, Fries persönlich zu kennen, die Mathematik kritisch bearbeiten sollen. Statt dessen ergreift derselbe eine unglückliche Hypothese unseres Lehrers und meint wahrscheinlich, weil sie Fries ausgesprochen hat, sei sie unumstössliche Wahrheit; (wie folgt denn nur aus dem Satze, dass die Principien der Mathematik rein anschaulicher Natur sind, die Lehre von der syntaktischen Bedeutung der Reihen?). Da nun an Herrn Dr. Barfuss diese Aufforderung ungehört vorübergezogen ist, so suche ich jetzt derselben nachzukommen, obgleich diese Aufgabe mit meinen Fähigkeiten bei weitem weniger in Einklang zu sein scheint, als mit den seinigen.

XXXVIII.

Eine neue analytische Gleichung, und deren Anwendung auf die Bestimmung eines vielfachen Integrals und die Summirung einer Reihe.

Von

Herrn F. Arndt,

Lehrer am Gymnasium zu Stralsund.

Mollweide hat sich in seiner Fortsetzung des Klügelschen Wörterbuchs (Artikel Summirung der Reihen S. 739.) mit der Summation der Reihe beschäftigt, deren allgemeines Glied durch $\frac{x^{\lambda_3+k}}{(\lambda_1+k)(\lambda_2+k)(\lambda_3+k)}$ ausgedrückt wird, indem k den von Null bis unendlich wachsenden Index bezeichnet, und stellt die Summe durch drei bestimmte Integrale dar. Indem ich mich nun bemühte, die allgemeinere Reihe zu summiren, deren allgemeines Glied

$$\frac{x^{\lambda_n+k}}{(\lambda_1+k)(\lambda_2+k)\ldots\ldots(\lambda_n+k)}$$

ist, wo k seine vorige Bedeutung hat, wurde ich auf die Untersuchung einer Summe mit endlicher Gliederzahl geleitet, und das Resultat, welches ich fand, schien mir merkwürdig genug zu sein, um es im Folgenden mitzutheilen.

1.

Sind λ_1, λ_2, $\lambda_3 \ldots\ldots \lambda_n$ beliebige, aber sämmtlich von einander verschiedene Grössen, so findet stets die interessante Relation statt:

$$\text{(a)} \quad \left.\begin{array}{l} +\dfrac{1}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)\ldots\ldots(\lambda_1-\lambda_n)} \\ +\dfrac{1}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)\ldots\ldots(\lambda_2-\lambda_n)} \\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +\dfrac{1}{(\lambda_n-\lambda_1)(\lambda_n-\lambda_2)\ldots\ldots(\lambda_n-\lambda_{n-1})} \end{array}\right\} = 0$$

Beweis. Aus der Theorie der Zerlegung der gebrochenen Functionen in Partialbrüche*) ist bekannt, dass man setzen kann

$$\frac{1}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)\ldots\ldots(\lambda_1-\lambda_n)}=\frac{A_1}{\lambda_1-\lambda_2}+\frac{A_2}{\lambda_1-\lambda_3}+\ldots+\frac{A_{n-1}}{\lambda_1-\lambda_n},$$

und dass dann die Coefficienten $A_1, A_2, \ldots A_{n-1}$ durch folgende Werthe bestimmt sind:

$$A_1=\frac{1}{(\lambda_2-\lambda_3)\ldots\ldots(\lambda_2-\lambda_n)},$$

$$A_2=\frac{1}{(\lambda_3-\lambda_2)\ldots\ldots(\lambda_3-\lambda_n)}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A_{n-1}=\frac{1}{(\lambda_n-\lambda_2)\ldots\ldots(\lambda_n-\lambda_{n-1})}.$$

Dividirt man also die Werthe von $A_1, A_2, \ldots A_{n-1}$ resp. durch $-(\lambda_2-\lambda_1), -(\lambda_3-\lambda_1), \ldots -(\lambda_n-\lambda_1)$, und summirt, so entsteht

$$\frac{1}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)\ldots\ldots(\lambda_1-\lambda_n)}=-\frac{1}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)\ldots\ldots(\lambda_2-\lambda_n)}$$

$$-\frac{1}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)\ldots\ldots(\lambda_3-\lambda_n)}$$

u. s. w.

$$-\frac{1}{(\lambda_n-\lambda_1)(\lambda_n-\lambda_2)\ldots\ldots(\lambda_n-\lambda_{n-1})},$$

und wenn man die Glieder auf der Rechten auf die Linke bringt, so entspringt das Theorem, welches ich oben ausgesprochen habe.

2.

Zuvörderst ist nun die Bedingung der Convergenz der Reihe festzustellen, deren allgemeines Glied wir oben angegeben haben. Wird dieses durch u_k bezeichnet, so findet man leicht, dass der absolute Werth des Verhältnisses $\frac{u_{k+1}}{u_k}$ den absoluten Werth von x zu seiner Gränze hat, und nach einem bekannten Theorem von **Cauchy** (s. die Analyse algébrique p. 134), wird also obige Reihe convergent sein, wenn der absolute Werth von x kleiner als die Einheit ist.

Dies vorausgesetzt, bestimme ich die Summe der unendlichen Gliederzahl

$$\sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{x^{\lambda_n+k}}{(\lambda_1+k)(\lambda_2+k)\ldots\ldots(\lambda_n+k)}$$

auf folgende Art.

*) Grunert Leitfaden für den ersten Unterricht in der höhern Analysis. S. 151.

Zuvörderst ist

$$\sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{x^{\lambda_1+k}}{\lambda_1+k} = \int \frac{x^{\lambda_1-1}dx}{1-x},$$

das Integral von $x=0$ bis $x=x$ ausgedehnt. Denn differenziirt man den Ausdruck auf der Linken, und summirt die dadurch entstandene geometrische Progression von unendlicher Gliederzahl, so findet sich $\frac{x^{\lambda_1-1}}{1-x}$, welches zwischen den Gränzen 0 und x integrirt werden muss, um den Werth auf der linken Seite wieder zu finden.

Um nun λ_2+k als Factor in den Nenner zu bringen, multiplicire man jene Gleichung mit $x^{\lambda_2-\lambda_1-1}dx$, und integrire, so entsteht

$$\sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{x^{\lambda_2+k}}{(\lambda_1+k)(\lambda_2+k)} = \int x^{\lambda_2-\lambda_1-1}dx \int \frac{x^{\lambda_1-1}}{1-x}dx,$$

das neue Integral von 0 bis x ausgedehnt.

Ebenso multiplicire man diese Gleichung mit $x^{\lambda_3-\lambda_2-1}dx$, und integrire; dann erhält man

$$\sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{x^{\lambda_3+k}}{(\lambda_1+k)(\lambda_2+k)(\lambda_3+k)}$$
$$= \int x^{\lambda_3-\lambda_2-1}dx \int x^{\lambda_2-\lambda_1-1}dx \int \frac{x^{\lambda_1-1}dx}{1-x}.$$

Geht man auf ähnliche Art fort, so gelangt man zu dem allgemeinen Ausdruck:

$$\text{(b)} \quad \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{x^{\lambda_n+k}}{(\lambda_1+k)(\lambda_2+k)\ldots(\lambda_n+k)}$$
$$= \int x^{\lambda_n-\lambda_{n-1}-1}dx \int x^{\lambda_{n-1}-\lambda_{n-2}-1}dx \ldots \int \frac{x^{\lambda_1-1}dx}{1-x};$$

alle Integrale von $x=0$ bis $x=x$ erstreckt.

Dieses vielfache Integral gestattet eine Zerlegung in n einfache Integrale.

Denn nach der ersten allgemeinsten Reductionsformel ist zuerst

$$\int x^{\lambda_2-\lambda_1-1}dx \int \frac{x^{\lambda_1-1}dx}{1-x} = \frac{x^{\lambda_2-\lambda_1}}{\lambda_2-\lambda_1} \cdot \int \frac{x^{\lambda_1-1}dx}{1-x}$$
$$+ \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2} \cdot \int \frac{x^{\lambda_2-1}dx}{1-x}.$$

Multiplicirt man dieses mit $x^{\lambda_3-\lambda_2-1}dx$, integrirt, und bestimmt jedes Doppelintegral auf der Rechten wieder nach der allgemeinsten Reductionsformel, so wird

$$\int x^{\lambda_3-\lambda_2-1}dx\int x^{\lambda_2-\lambda_1-1}dx\int\frac{x^{\lambda_1-1}dx}{1-x}$$

$$= \frac{x^{\lambda_3-\lambda_1}}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)}\cdot\int\frac{x^{\lambda_1-1}dx}{1-x}$$

$$+\frac{x^{\lambda_3-\lambda_2}}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_2)}\cdot\int\frac{x^{\lambda_2-1}dx}{1-x}$$

$$+\frac{1}{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_3)}\cdot\int\frac{x^{\lambda_3-1}dx}{1-x}.$$

Setzt man diese Entwickelung noch weiter fort, so vermuthet man leicht das hier obwaltende Gesetz, nämlich:

$$\text{(c)}\quad\int x^{\lambda_n-\lambda_{n-1}-1}dx\int x^{\lambda_{n-1}-\lambda_{n-2}-1}dx\ldots\int\frac{x^{\lambda_1-1}dx}{1-x}$$

$$= \frac{x^{\lambda_n-\lambda_1}}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)\ldots(\lambda_n-\lambda_1)}\cdot\int\frac{x^{\lambda_1-1}dx}{1-x}$$

$$+\frac{x^{\lambda_n-\lambda_2}}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_2)\ldots(\lambda_n-\lambda_2)}\cdot\int\frac{x^{\lambda_2-1}dx}{1-x}$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{x^{\lambda_n-\lambda_{n-1}}}{(\lambda_1-\lambda_{n-1})(\lambda_2-\lambda_{n-2})\ldots(\lambda_n-\lambda_{n-1})}\cdot\int\frac{x^{\lambda_{n-1}-1}dx}{1-x}$$

$$+\frac{1}{(\lambda_1-\lambda_n)(\lambda_2-\lambda_n)\ldots(\lambda_{n-1}-\lambda_n)}\cdot\int\frac{x^{\lambda_n-1}dx}{1-x}.$$

Die Factoren der Nenner befolgen das Gesetz, dass zuerst λ_1 von allen übrigen Grössen $\lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_n$, dann λ_2 von allen übrigen, dann λ_3 u. s. w. abgezogen wird.

Um indessen die allgemeine Gültigkeit dieses Resultates zu erweisen, nehmen wir an, dass die Gleichung (c) richtig sei, und erweisen, dass das Gesetz bleibend ist, wenn n übergeht in $n+1$. In der That, multipliciren wir (c) mit $x^{\lambda_{n+1}-\lambda_n-1}dx$, und integriren nach der allgemeinsten Reductionsformel, so erhalten wir n Differenzen, nämlich:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{x^{\lambda_{n+1}-\lambda_1}}{(\lambda_2-\lambda_1)\ldots(\lambda_{n+1}-\lambda_1)}\cdot\int\frac{x^{\lambda_1-1}dx}{1-x}-\frac{1}{(\lambda_2-\lambda_1)\ldots(\lambda_{n+1}-\lambda_1)}\\ +&\frac{x^{\lambda_{n+1}-\lambda_2}}{(\lambda_1-\lambda_2)\ldots(\lambda_{n+1}-\lambda_2)}\cdot\int\frac{x^{\lambda_2-1}dx}{1-x}-\frac{1}{(\lambda_1-\lambda_2)\ldots(\lambda_{n+1}-\lambda_2)}\\ +&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ +&\frac{x^{\lambda_{n+1}-\lambda_n}}{(\lambda_1-\lambda_n)\ldots(\lambda_{n+1}-\lambda_n)}\cdot\int\frac{x^{\lambda_n-1}dx}{1-x}-\frac{1}{(\lambda_1-\lambda_n)\ldots(\lambda_{n+1}-\lambda_n)}\end{aligned}\right\}\int\frac{x^{\lambda_{n+1}-1}dx}{1-x}.$$

Da nun aber $\frac{1}{(\lambda_2-\lambda_1)\ldots(\lambda_{n+1}-\lambda_1)}=(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)\ldots(\lambda_1-\lambda_{n+1})}$

ist, und von den übrigen dieser Coefficienten dasselbe gilt, so ist nach (a) offenbar die Summe der Coefficienten von $\int \frac{x^{\lambda_{n+1}-1}dx}{1-x} =$ $-(-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{(\lambda_{n+1}-\lambda_1)\ldots(\lambda_{n+1}-\lambda_n)} = \frac{1}{(\lambda_1-\lambda_{n+1})\ldots(\lambda_n-\lambda_{n+1})}$, und folglich bleibt die Gleichung (c) richtig.

Somit haben wir nun

$$\text{(d)} \quad \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{x^{\lambda_n+k}}{(\lambda_1+k)(\lambda_2+k)\ldots(\lambda_n+k)}$$

$$= \frac{x^{\lambda_n-\lambda_1}}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)\ldots(\lambda_n-\lambda_1)} \cdot \int_0^x \frac{x^{\lambda_1-1}dx}{1-x}$$

$$+ \frac{x^{\lambda_n-\lambda_2}}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_2)\ldots(\lambda_n-\lambda_2)} \cdot \int_0^x \frac{x^{\lambda_2-1}dx}{1-x}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{x^{\lambda_n-\lambda_{n-1}}}{(\lambda_1-\lambda_{n-1})(\lambda_2-\lambda_{n-1})\ldots(\lambda_n-\lambda_{n-1})} \cdot \int_0^x \frac{x^{\lambda_{n-1}-1}dx}{1-x}$$

$$+ \frac{1}{(\lambda_1-\lambda_n)(\lambda_2-\lambda_n)\ldots(\lambda_{n-1}-\lambda_n)} \cdot \int_0^x \frac{x^{\lambda_n-1}dx}{1-x}.$$

Es fragt sich jetzt, ob diese Reihe noch für $x=1$ gelte. Denkt man sich, um dies zu untersuchen, k schon so gross, dass die Factoren λ_1+k, λ_2+k, u. s. w. sämmtlich positiv sind, und ist $\lambda_\varrho+k$ der kleinste unter ihnen, so ist $\frac{1}{(\lambda_1+k)(\lambda_2+k)\ldots(\lambda_n+k)} < \frac{1}{(\lambda_\varrho+k)^n}$, und folglich $\sum_{k=a}^{k=\infty} \frac{1}{(\lambda_1+k)\ldots(\lambda_n+k)} < \sum_{k=a}^{k=\infty} \frac{1}{(\lambda_\varrho+k)^n}$, wenn a der Werth von k ist, von welchem alle Factoren anfangen positiv zu sein. Da nun nach einem bekannten Satze die Reihe, deren allgemeines Glied $\frac{1}{(\lambda_\varrho+k)^n}$ ist, convergirt, wenn $n>1$ ist, so gilt die Formel (d) für $x=1$ unter der Voraussetzung, dass $n>1$ ist.

Ist endlich $n=1$, so wird die Reihe $\frac{1}{\lambda_1+k} + \frac{1}{\lambda_1+k+1}$ + u. s. w., welche bekanntermassen divergent ist.

3.

Mittelst der Gleichung (d) lässt sich noch eine andere bemerkenswerthe Reihe summiren.

Bezeichnet man den Ausdruck auf der Linken in der Relation (d) durch s_n, multiplicirt ihn mit $x^{\alpha-\lambda_n}$ und differenziirt das Product auf bekannte Weise, nämlich $\frac{d(x^{\alpha-\lambda_n}.s_n)}{dx} = (\alpha-\lambda_n)x^{\alpha-\lambda_n-1}.s_n$ $+ x^{\alpha-\lambda_n} \cdot \frac{d.s_n}{dx}$, so erhält man wegen (b) $\frac{d(x^{\alpha-\lambda_n}.s_n)}{dx}$

$= (\alpha - \lambda_n) x^{\alpha - \lambda_n - 1} . s_n + x^{\alpha - \lambda_n} . x^{\lambda_n - \lambda_{n-1} - 1} . s$
$= (\alpha - \lambda_n) x^{\alpha - \lambda_n - 1} . s_n + x^{\alpha - \lambda_{n-1} - 1} . s_{n-1}$. Führt man die aus (d) sich ergebenden Ausdrücke für s_n und s_{n-1} ein, zieht zusammen, so gelangt man zu

$$\sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(\alpha + k) x^{\alpha + k - 1}}{(\lambda_1 + k)(\lambda_2 + k) \dots (\lambda_n + k)}$$

$$= \frac{(\alpha - \lambda_1) x^{\alpha - \lambda_1 - 1}}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1) \dots (\lambda_n - \lambda_1)} . \int \frac{x^{\lambda_1 - 1} dx}{1 - x}$$

$$+ \frac{(\alpha - \lambda_2) x^{\alpha - \lambda_2 - 1}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_2) \dots (\lambda_n - \lambda_2)} . \int \frac{x^{\lambda_2 - 1} dx}{1 - x}$$

$$+ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$+ \frac{(\alpha - \lambda_n) x^{\alpha - \lambda_n - 1}}{(\lambda_1 - \lambda_n)(\lambda_2 - \lambda_n) \dots (\lambda_{n-1} - \lambda_n)} . \int \frac{x^{\lambda_n - 1} dx}{1 - x}$$

sämmtliche Integrale zwischen den Gränzen 0 und x genommen

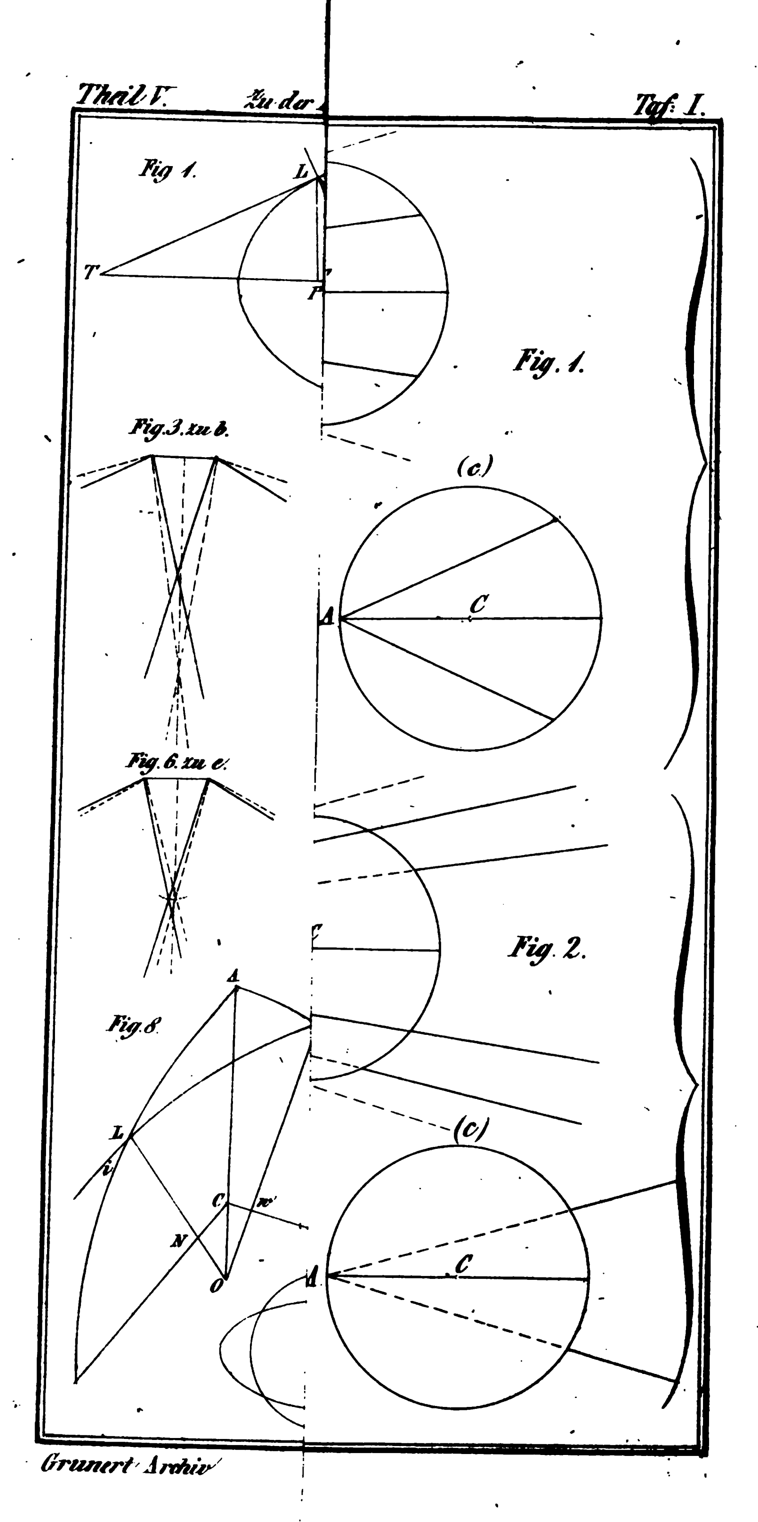
Die Convergenz dieser Reihe ist besonders festzustellen, man von der Reihe in 2. auf sie keinen Schluss machen kann, dem sie durch Differenziation abgeleitet ist.

Dass aber unsere Reihe convergent ist, wenn der absol Werth von x kleiner als die Einheit ist, erhellt aus dem sch oben angewandten Theorem von Cauchy.

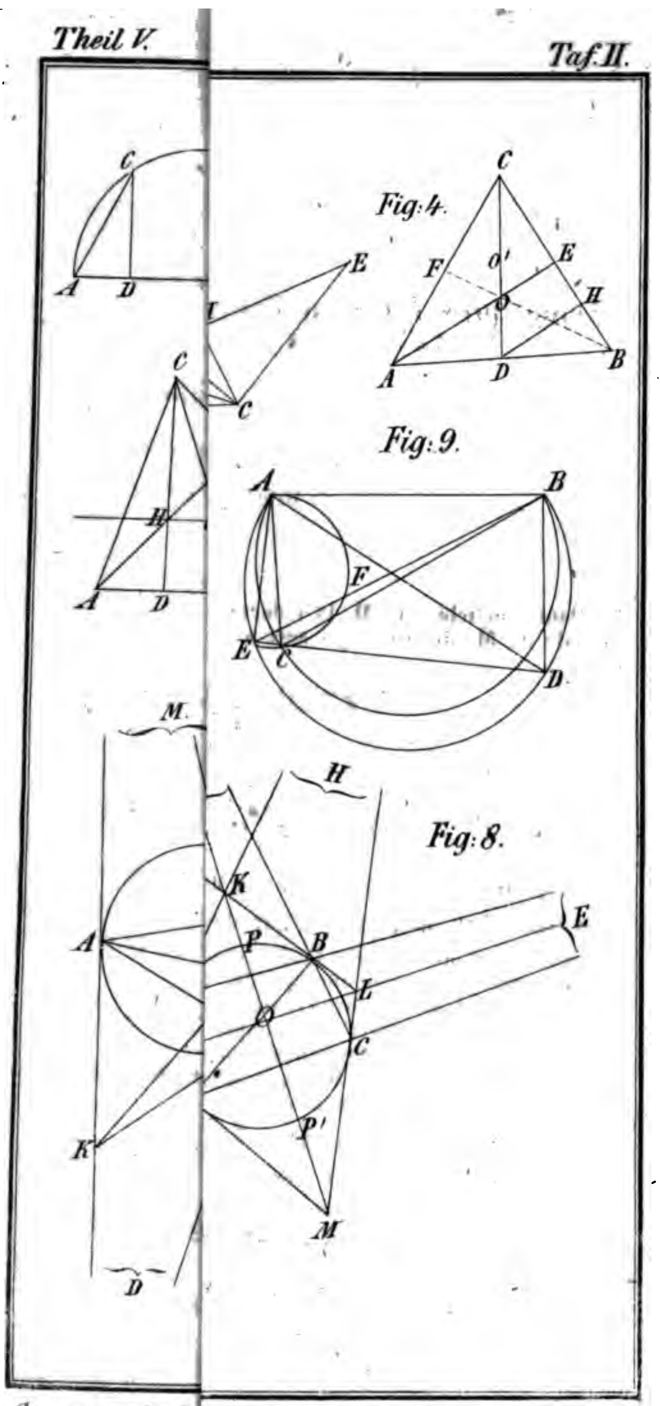
XXXVIII.

Miscellen.

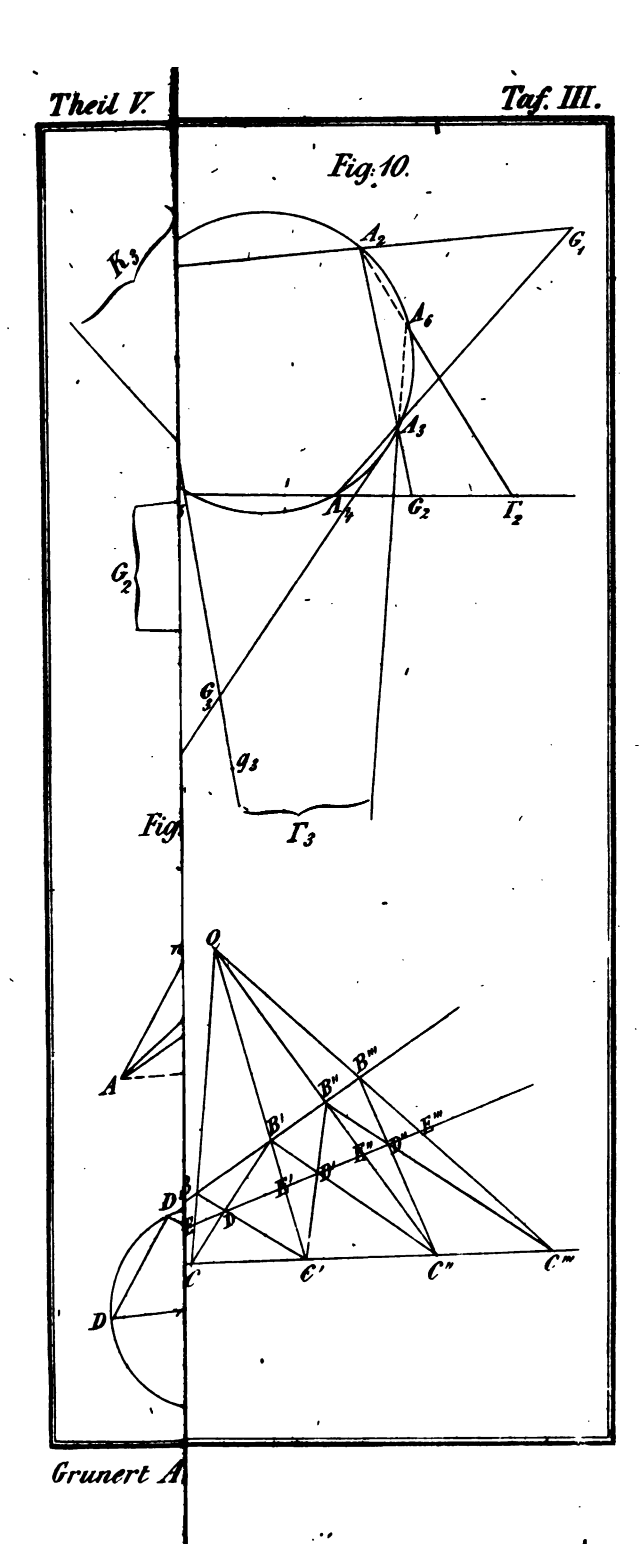
A l'occasion d'une communication de M. Masson sur la phot métrie, M. Abel Transon signale un phénomène curieux que chac peut vérifier très facilement. Si on fait pirouetter une pièce jeu de domino sur le petit clou qui fait ordinairement saillie centre de la face noire, on verra les points de la face numéro échanger, à un certain degré de vitesse très faible, leur coul noire pour une teinte d'un rouge assez vif (Société philomatiq de Paris).


Fig 1.
L
T
P
Fig. 1.
Fig. 3. zu b.
(c)
C
A
Fig. 6. zu e.
Fig. 2.
A
Fig. 8.
L
i
C
w
N
O
(c)
C
A

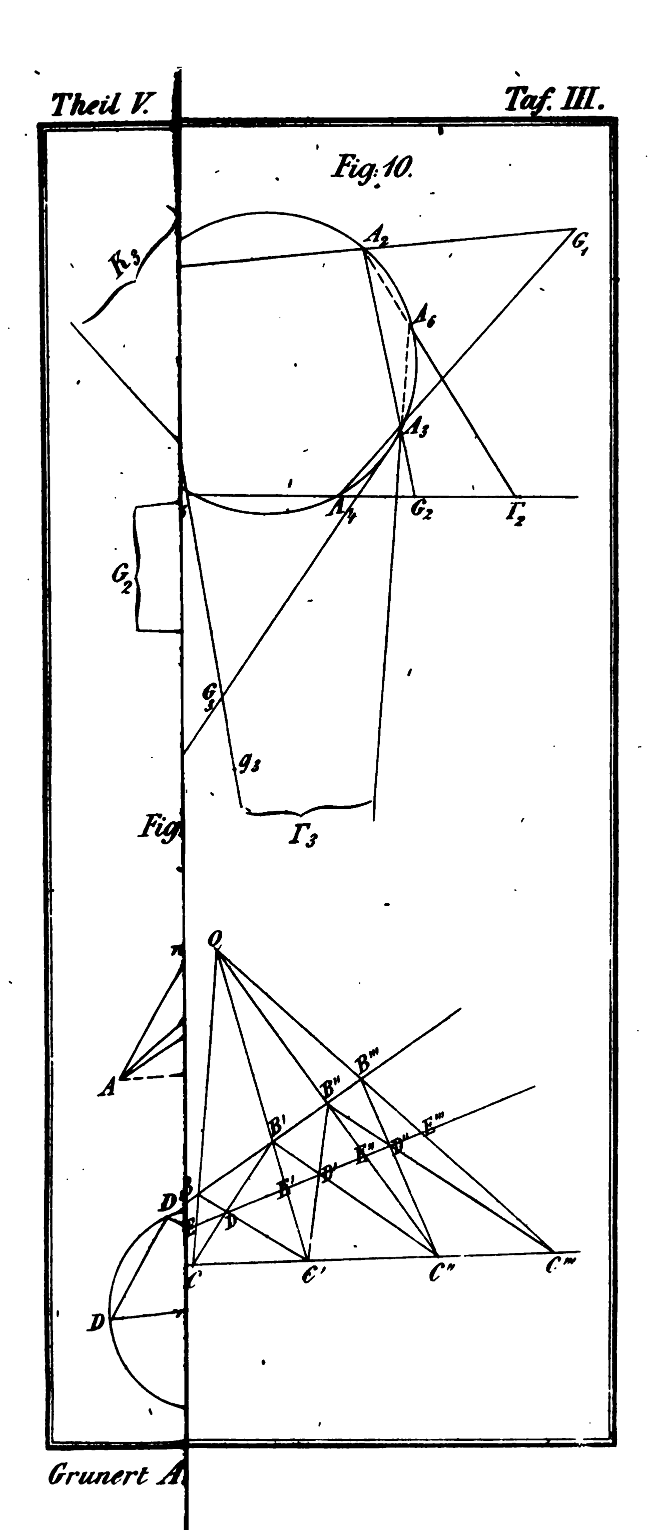



C
A
D
E
C
C
H
A
D
M.
K
A
K
D
Fig: 4.
C
O'
E
F
O
H
A
D
B
Fig: 9.
A
B
F
E
C
D
H
Fig: 8.
K
P
B
E
L
O
C
P'
M



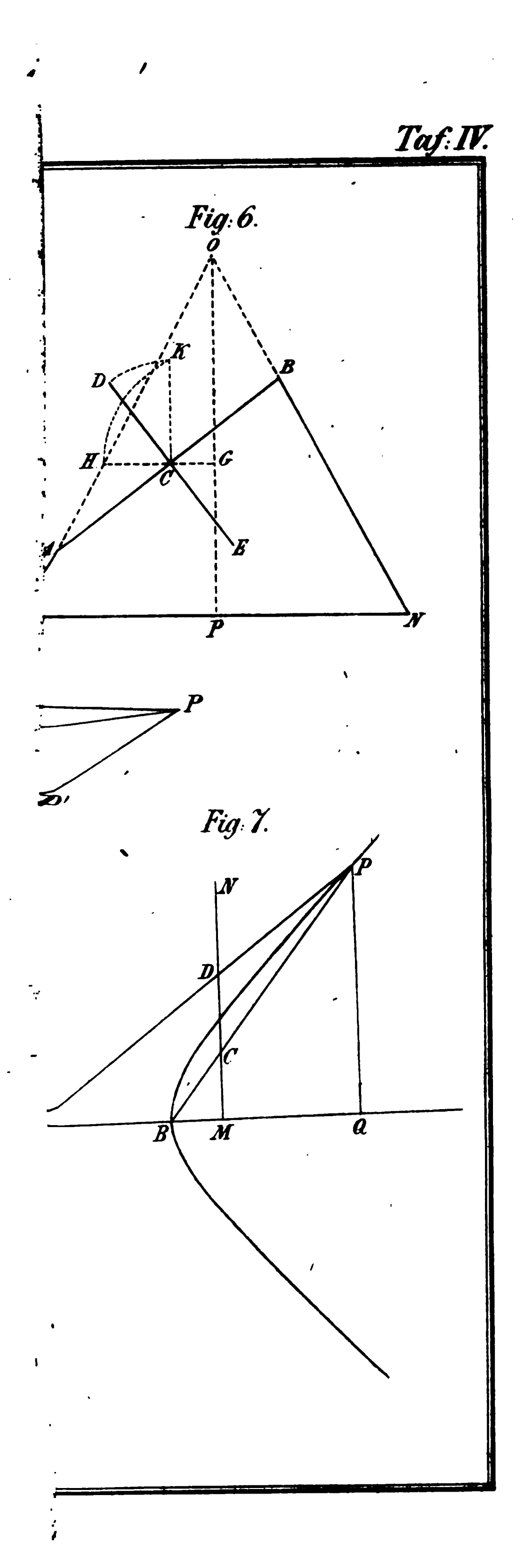

Fig: 10.
K3
A2
G1
A6
A3
A4
G2
Γ2
G2
G3
g3
Γ3
Fig
O
A
B'''
B''
B'
E'''
D''
E''
D'
E'
D
D
E
C
C'
C''
C'''
D



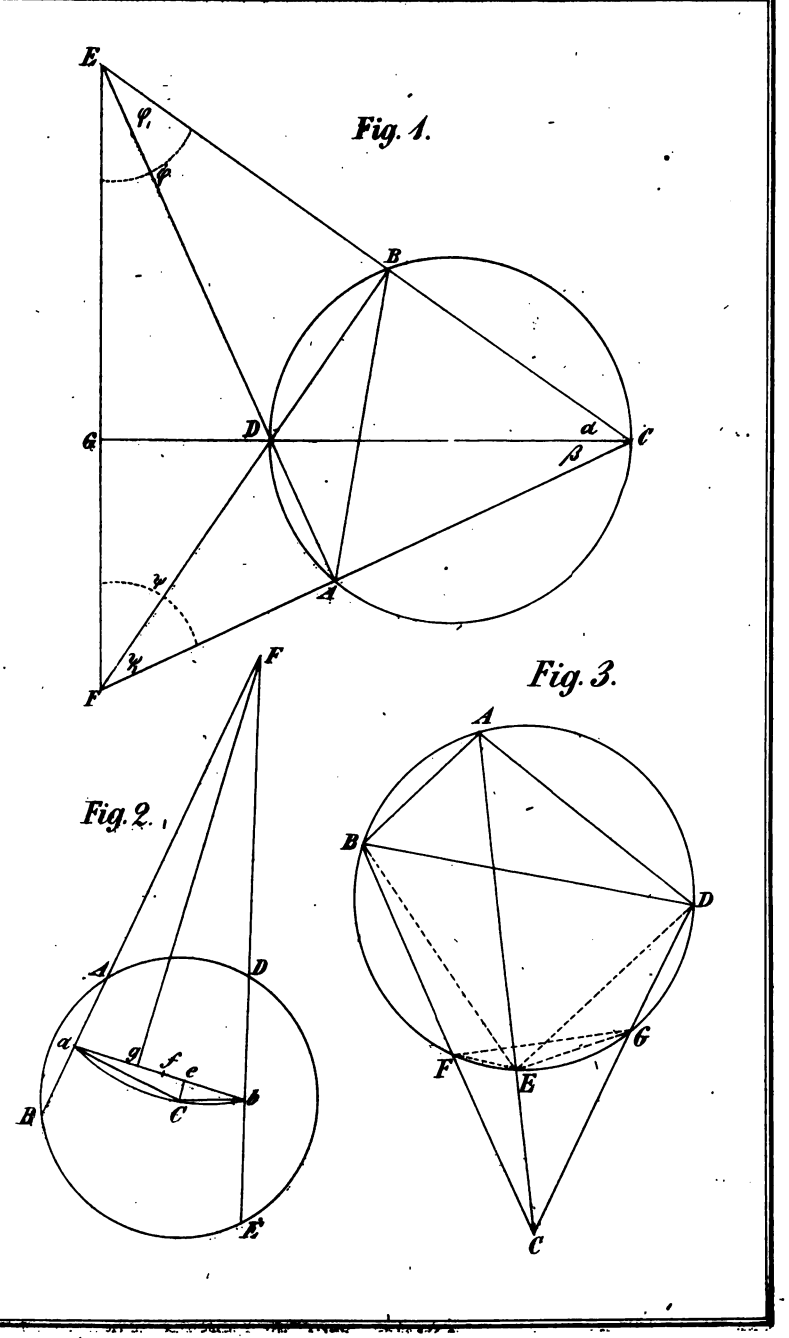

Fig. 10.
K3
A2
G1
A6
A3
A4
G2
Γ2
G2
G3
g3
Γ3
Fig
O
A
B'''
B''
B'
E'''
D''
E''
D'
E'
D
D
C'
C''
C'''
D

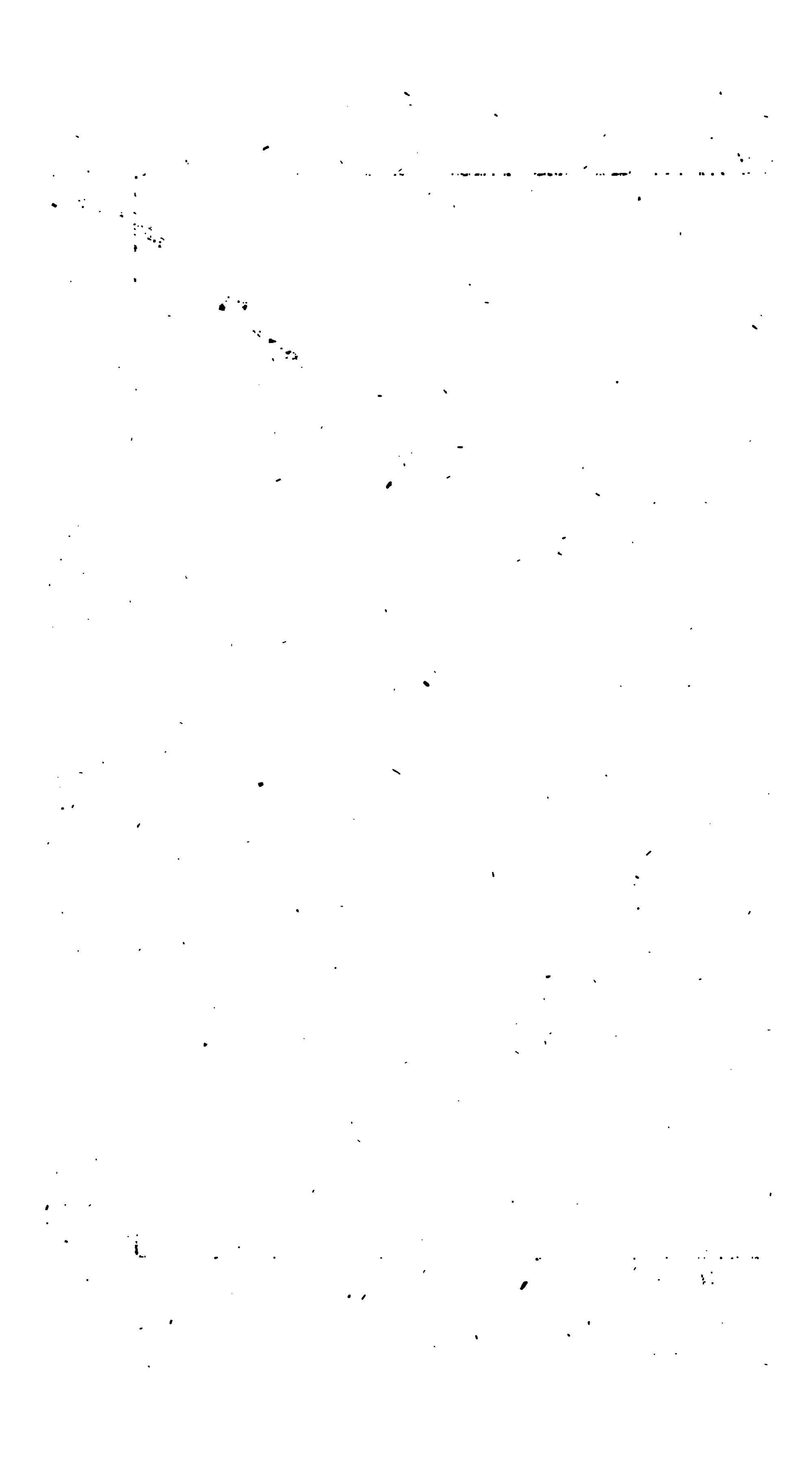


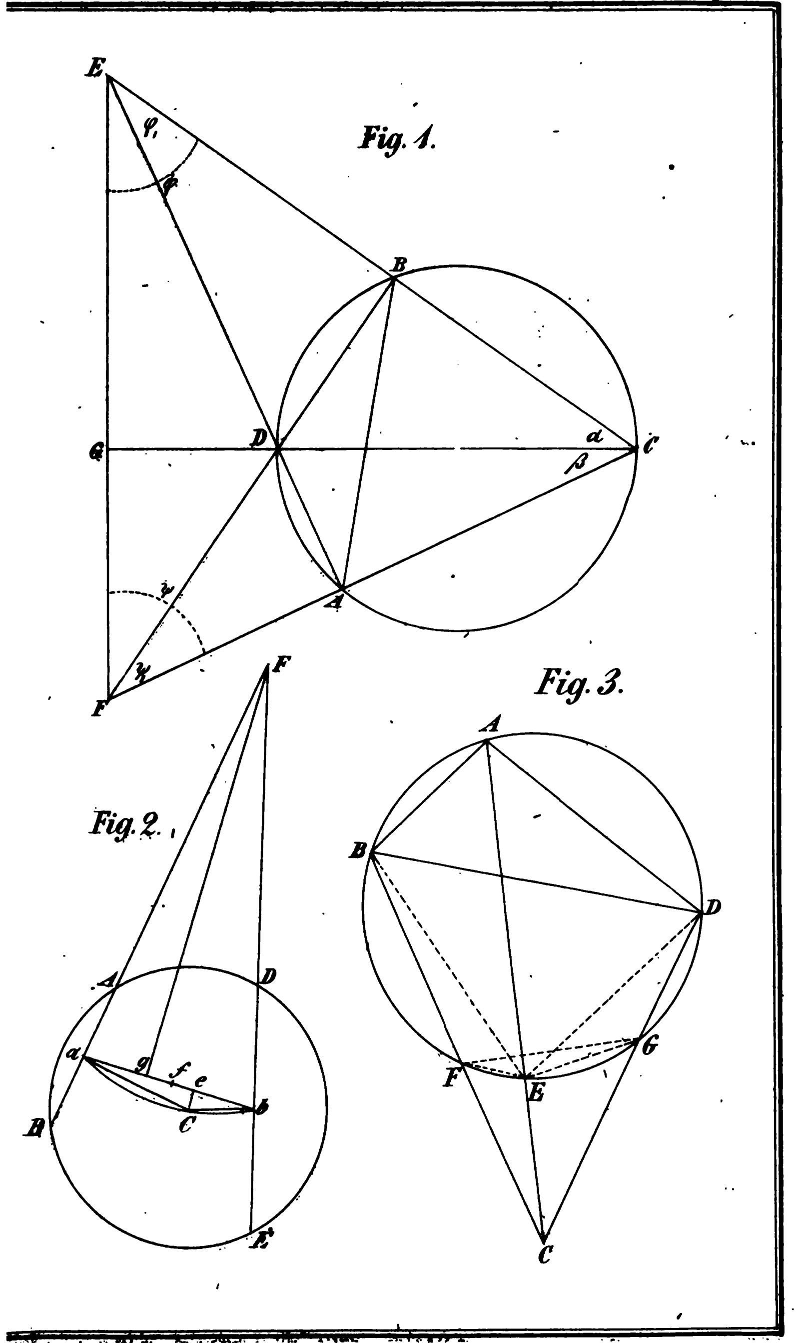
Taf. IV.






Fig. 1.
E
φ,
φ
B
G
D
α
C
β
ψ
A
ψ,
F
Fig. 2.
F
A
D
a
g
f
e
b
B
C
E
Fig. 3.
A
B
D
F
E
G
C




Fig. 1.
E
φ₁
φ
B
G
D
α
C
β
ψ
A
ψ₁
F
Fig. 2.
F
A
D
a
g
f
e
b
C
B
E
Fig. 3.
A
B
D
G
F
E
C









